

le monde
change,
soyez prêts

ANNALES OFFICIELLES 2014
BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES
CCIR CORRIGÉES

SÉRIE « ANNALES »

ANNALES 2014 DE LA BANQUE D'ÉPREUVES COMMUNES CCIR

SUJETS ET CORRIGÉS

HEC

ESSEC

ESCP-EUROPE

E.M.LYON

EDHEC

ESC

IÉNA

Avec le soutien de l'ISC Paris Business School



Le mot

ESPACE PRÉPAS

Nous fêtons cette année la 20^e édition des Annales de la Banque Commune d'Épreuves (BCE), publiée avec le soutien de l'ISC Paris. Un ouvrage de plus ajoutant du poids à la pile de ceux qui accompagnent les candidats aux concours d'entrée des Grandes Écoles de management ? Pas vraiment. N'en déplaise à ceux qui désespèrent de voir s'allonger la liste des titres de référence en même temps que diminue le nombre de jours jusqu'aux premières épreuves écrites ; ces annales sont incontournables. Elles vous servent à accomplir l'exercice le plus important de votre préparation : l'anticipation, la mise en condition.

Il est essentiel de très bien connaître le programme dans chaque matière, mais au moins aussi important de prendre connaissance des sujets tombés l'année dernière, voire les années précédentes encore, afin de vous familiariser aux formulations et aux contraintes de chaque épreuve, dont les professeurs ne manquent par ailleurs certainement pas de vous parler. Vous disposez ici d'un panel de sujets tombés en 2014 que nous avons voulu le plus représentatif possible de la diversité et de l'exigence du concours. Des épreuves communes et d'autres réservées aux candidats des voies scientifique, économique et technologique ; des matières variées ; des fournisseurs différents. Tous les corrigés sont réalisés par des professeurs de classes préparatoires qui ne manquent pas, lorsque cela est nécessaire, de commenter le sujet et leurs propositions de correction. Pour une immersion maximale dans la préparation au concours, doublée d'une prise de recul bienvenue.

Tout comme peut l'être le magazine *Espace Prépas* qui accompagne depuis 30 ans les préparateurs vers l'intégration dans les Grandes Écoles de management. Reportages sur les campus, décryptage des programmes et des stratégies d'écoles, zooms sur leurs spécificités, articles sur l'actualité de la filière (fusions, budgets, nouveaux statuts, etc.), dossiers d'histoire géographique et de culture générale, cartes de géopolitique, numéros « inscription » et SIGEM pour faciliter les choix, enquêtes sur l'avenir des prépas... Rien de ce que doit connaître un futur étudiant des meilleures *business schools* mondiales (revoyez le classement 2014 des *Masters in Management du Financial Times*) ne manque. Associée à la lecture de ce magazine et d'ouvrages complémentaires de préparation proposés par les éditions Studyama, l'étude des Annales de la Banque Commune d'Épreuves participe à une mise en train idéale pour la bonne conduite des épreuves écrites et avant de penser au tour de France des oraux...

Stéphanie Ouezman,
Rédactrice en chef d'*Espace Prépas*.



Sommaire

| | |
|--|-----------|
| LE MOT D'ESPACE PRÉPAS | 3 |
| COEFFICIENTS ET COOPTATION | |
| LES ÉPREUVES DU CONCOURS ISC PARIS 2015 | 7 |
| PRÉSENTATION DE L'ISC PARIS | 9 |
| ÉPREUVES COMMUNES | |
| CULTURE GÉNÉRALE | |
| ÉPREUVE EDHEC-ESSEC | 14 |
| ÉPREUVE EM LYON | 19 |
| RÉSUMÉ DE TEXTE | |
| ÉPREUVE ESC | 27 |
| ÉPREUVE HEC | 34 |
| LANGUE VIVANTE 1 | |
| ANGLAIS IÉNA | 42 |
| ANGLAIS CCIR | 46 |
| ALLEMAND IÉNA | 51 |
| ALLEMAND CCIR | 55 |
| ESPAGNOL IÉNA | 61 |
| ESPAGNOL CCIR | 66 |
| ITALIEN IÉNA | 71 |
| LANGUE VIVANTE 2 | |
| ANGLAIS IÉNA | 75 |
| ANGLAIS CCIR | 78 |
| ALLEMAND IÉNA | 83 |
| ALLEMAND CCIR | 86 |
| ESPAGNOL IÉNA | 90 |

| | |
|----------------------|-----------|
| ESPAGNOL CCIR | 93 |
| ITALIEN IÉNA | 97 |

OPTION SCIENTIFIQUE

| | |
|---|------------|
| HISTOIRE, GÉOGRAPHIE ET GÉOPOLITIQUE DU MONDE CONTEMPORAIN | |
| ÉPREUVE ESCP-EUROPE | 100 |
| MATHÉMATIQUES | |
| ÉPREUVE EM LYON | 112 |
| ÉPREUVE ESSEC | 141 |
| ÉPREUVE HEC | 180 |
| MATHÉMATIQUES II | |
| ÉPREUVE HEC/ESCP EUROPE | 216 |

OPTION ÉCONOMIQUE

| | |
|---|------------|
| ANALYSE ÉCONOMIQUE ET HISTORIQUE DES SOCIÉTÉS CONTEMPORAINES | |
| ÉPREUVE ESCP-EUROPE | 231 |
| ÉPREUVE ESSEC | 241 |
| MATHÉMATIQUES | |
| ÉPREUVE EM LYON | 250 |

OPTION TECHNOLOGIQUE

| | |
|----------------------------|------------|
| ÉCONOMIE | |
| ÉPREUVE ESC | 266 |
| ÉPREUVE ESSEC | 278 |
| DROIT | |
| ÉPREUVE ESC | 299 |
| ÉPREUVE ESSEC | 310 |
| MATHÉMATIQUES | |
| ÉPREUVE ESCP-EUROPE | 318 |
| ÉPREUVE ESC | 336 |

ISC PARIS

ISCparis.com

prepas.iscparis.com

LE MONDE CHANGE,
SOYEZ PRÊTS



LES ÉPREUVES ISC PARIS DU CONCOURS 2014

PRÉSENTATION DE L'ISC PARIS

ÉPREUVES ÉCRITES ET COEFFICIENTS ISC PARIS AUX CONCOURS 2015

| OPTION SCIENTIFIQUE | Concepteur | Coefficient | Durée |
|--|-------------------|--------------------|--------------|
| Dissertation de culture générale | EM LYON | 5 | 4h |
| Contraction de texte | HEC | 3 | 3h |
| Mathématiques | EM LYON | 4 | 4h |
| Langue vivante I | IÉNA | 8 | 4h |
| Langue vivante II | IÉNA | 5 | 3h |
| Histoire, géographie et géopolitique du monde contemporain | ESCP-Europe | 5 | 4h |

| OPTION ÉCONOMIQUE | Concepteur | Coefficient | Durée |
|--|-------------------|--------------------|--------------|
| Dissertation de culture générale | EM LYON | 4 | 4h |
| Contraction de texte | HEC | 3 | 3h |
| Mathématiques | EM LYON | 3 | 4h |
| Langue vivante I | IÉNA | 7 | 4h |
| Langue vivante II | IÉNA | 5 | 3h |
| Economie, sociologie et histoire du monde contemporain | ESCP-Europe | 8 | 4h |

| OPTION TECHNOLOGIQUE | Concepteur | Coefficient | Durée |
|---------------------------------------|-------------------|--------------------|--------------|
| Dissertation de culture générale | ESC | 3 | 4h |
| Résumé de texte | ESC | 3 | 3h |
| Mathématiques | ESC | 3 | 4h |
| Langue vivante I | IÉNA | 4 | 4h |
| Langue vivante II | IÉNA | 3 | 3h |
| Économie/ Droit | ESC | 5 | 4h |
| Management et Gestion de l'entreprise | ESC | 9 | 4h |

| OPTION A/L UIm et ENS Lyon | Concepteur | Coefficient | Durée |
|-----------------------------------|-------------------|--------------------|--------------|
| Contraction de texte | HEC | 3 | 3h |
| Langue vivante I | IÉNA | 7 | 4h |
| Langue vivante II | IÉNA | 5 | 3h |
| Moyenne concours | ENS | 15 | |

| OPTION B/L | Concepteur | Coefficient | Durée |
|----------------------------|-------------------|--------------------|--------------|
| Contraction de texte | HEC | 3 | 3h |
| Dissertation littéraire | ESSEC | 5 | 4h |
| Dissertation philosophique | ESSEC | 4 | 4h |
| Histoire ou géographie | ESCP-Europe | 4 | 4h |
| Langue vivante I | IÉNA | 5 | 4h |
| Langue vivante II | IÉNA | 3 | 3h |
| Épreuve à options | ESSEC | 6 | 4h |

LE MONDE CHANGE, SOYEZ PRÊTS

INTERLOCUTEURS

| | |
|---|---------------------|
| Président du groupe : | Claude Riahi |
| Directeur général : | Bruno Neil |
| Directeur des Études : | Sébastien Tran |
| Directeur des Entreprises Étudiantes : | Mathieu Millet |
| Directrice de la communication : | Emmanuelle Teissier |
| Responsable de la promotion : | Lionel Theulier |
| Responsable du concours : | Fabienne Tisserant |
| Responsable des relations École/Entreprises : | Amélie Foucher |
| Responsable des stages : | Claire Régnier |

INFORMATIONS GÉNÉRALES

Principaux repères

Une formation académique, internationale et professionnelle sur 3 ans

- Création : 1963 (association loi 1901) ;
- Situation : **Paris**, ville privilégiée pour l'emploi, les stages, les partenariats ;
- Reconnaissance par l'État : 1969, diplôme Bac +5 visé par le ministère de l'Éducation nationale, confère le grade de master ;
- Membre de la Conférence des Grandes Écoles ;
- Membre du Chapitre des Écoles de Management ;
- Membre de l'AACSB ;
- Membre de l'EFMD (*European Foundation for Management Development*) ;
- Membre de l'UGEI (Union des Grandes Écoles Indépendantes) ;
- Membre de la FNEGE (Fondation Nationale pour l'enseignement et la gestion des entreprises) ;
- Membre de l'EAIE (*European Association for International Education*) ;
- Membre de la NAFSA (*Association for International Educators*) ;
- Membre de CampusFrance.

Quelques chiffres

- **2216** étudiants ;
- **400** professeurs et professionnels d'entreprises ;
- **24** spécialisations et **8** doubles diplômes en 3^e année (Luxe, Finance, Entrepreneur, Marketing...) ;

- **20** Entreprises Étudiantes (culture & arts, sports & aventures, service aux étudiants, humanitaire) ;
- **175** accords internationaux dans **56** pays ;
 - De **12** à **26** mois de stages ;
- **1200** entreprises associées (stages, offres d'emploi, versement de la taxe d'apprentissage...) ;
- Plusieurs centaines d'entreprises et organismes partenaires ;
- **35 077 €** de salaire annuel au 1^{er} emploi ;
- **Plus de 15 000** anciens élèves.

Frais de scolarité : 10 065 € pour 2014/2015 (moyenne sur trois ans, réévaluée chaque année).

Financement des études : bourses d'État, **bourses ISC Paris** (de 500 à 1 600 €), prêts bancaires à taux préférentiels. Job service interne (ISC Network, missions rémunérées 10 euros de l'heure), emploi du temps aménagé et contrat de professionnalisation.

LE MONDE CHANGE, SOYEZ PRÊTS

Dans un monde interpellé par la globalisation de l'économie, les multiples changements du système économique et social, les évolutions technologiques incessantes, la mission de l'ISC Paris est d'assurer aux élèves sélectionnés une formation généraliste au management, de haut niveau académique assise sur une activité de recherche diversifiée, réellement professionnalisante et conduisant à une insertion professionnelle de qualité.

Dans le cadre de cette formation généraliste, l'ISC Paris se donne aussi pour mission :

- d'accompagner les élèves à devenir acteurs responsables de leur formation et de l'acquisition de leurs connaissances, à construire leur identité professionnelle et à développer leur capacité à donner du sens au travail.
- de développer les capacités décisionnelles des élèves par une pédagogie de l'action stimulant l'esprit d'entreprise, par la mise en œuvre d'enseignements transversaux et par l'acquisition d'une bonne pratique des réseaux.
- de conduire des activités de recherche diversifiée : recherche à visées managériales, à visées théoriques et à visée pédagogique.
- d'encourager les élèves à la prise de risque en milieu complexe et incertain, en leur donnant le goût de l'entrepreneuriat, et en développant leurs capacités d'analyse et de synthèse, de créativité et d'innovation, de prise de décision.
- de construire des communautés apprenantes favorables à l'apprentissage collaboratif, source d'intelligence collective et de création de valeur.
- de préparer les élèves à la conduite du changement par l'hybridation des savoirs, par la capacité à l'approche globale des problématiques de l'entreprise, par l'ouverture d'esprit et la culture générale, par le développement du leadership.
- de prédisposer les élèves à assurer des responsabilités professionnelles dans un environnement international par une exposition aux réalités internationales et une approche multiculturelle du management.

- d'amener les élèves à prendre conscience des exigences de l'éthique des affaires, de la responsabilité sociale de l'entreprise et de créer les conditions favorables d'une pratique de l'altérité, du respect de l'autre et de la solidarité.

100% EXPERT : TROUVER SA VOIE

Objectif de l'ISC Paris : vous dispenser une formation académique de qualité et personnalisée.

Marketing, droit, communication, gestion... avec 31 matières à valider au cours de vos deux premières années d'études, vous aurez la possibilité d'acquérir les connaissances nécessaires pour mener à bien les principales missions d'un manager : définir une stratégie marketing et commerciale, diriger une équipe, gérer un budget ...

Cette polyvalence et cette multidisciplinarité, fortement appréciées des recruteurs, seront complétées par 7 matières de spécialisation à choisir parmi plus de 100 proposées à l'ISC Paris.

En 3^e année, avec plus de 400 heures de spécialisation, vous maîtriserez parfaitement l'un de nos domaines d'expertise. De la Finance au Marketing, du Luxe aux Nouvelles Technologies, des Ressources Humaines à l'International, chacun pourra trouver le domaine de compétence qui conviendra le plus à sa vocation. Ces spécialisations construites comme de véritables Masters vous ouvriront les portes des recruteurs les plus exigeants.

LES 24 SPÉCIALISATIONS ET 8 DOUBLES DIPLÔMES DE 3^E ANNÉE

Marketing/Communication et relations commerciales

- Marketing stratégie
- Marketing communication
- Management des relations commerciales
- E-Business et CRM
- Marketing management des industries créatives
- Marketing management des industries du luxe
- Marketing management du sport
- Marketing des industries du voyage et du tourisme
- Management des études marketing - Double diplôme Master Université Cergy Pontoise (5 places en apprentissage)

Management et systèmes d'informations

- Entrepreneur
 - International Business & Management
 - Achats et supply chain
 - Management des ressources humaines
- Doubles diplômes :
- MBS Innovation in European Business / Cork-Utrecht
 - MBA Management de la performance durable
 - Management de l'information et communication digitale – Double diplôme de l'École Européenne d'Intelligence Économique
 - Management des systèmes d'information
 - Marketing management et technologies de l'information – Double diplôme Master 2 Management des technologies de l'information et de la communication, Université de Cergy-Pontoise

Finance et audit

- Finance
- Doubles diplômes :
- Master 2 Gestion des risques financiers, Université de Cergy-Pontoise
- Master 2 Gestions des instruments financiers, Université de Cergy-Pontoise
- Institutions bancaires – double diplôme de l'Institut technique de Banque
- Expertise audit et contrôle – équivalences avec 5 épreuves du DSCG
- Expertise juridique et fiscale / Ingénierie du patrimoine

100 % CITOYEN DU MONDE : S'OUVRIRE A L'INTERNATIONAL

Objectif de l'ISC Paris : vous ouvrir les portes de l'international.

Conscient du caractère primordial des langues sur le marché du travail, l'ISC Paris vous offre la possibilité d'étudier jusqu'à trois langues étrangères.

C'est pour vous une triple opportunité :

- **Perfectionner votre niveau en anglais**, langue des affaires par excellence, et valider une qualification officielle (TOEIC). À l'ISC Paris, les meilleurs étudiants en anglais pourront suivre le cursus bilingue (International Track) ;
- **Renforcer vos compétences dans une 2^e langue déjà étudiée ou en découvrir une nouvelle ;**
- **S'ouvrir à des cultures plus originales**, avec la possibilité de choisir une 3^e langue (arabe, chinois, coréen, espagnol, hébreu, italien, japonais, portugais, russe...) afin de vous préparer à aborder les nouveaux marchés en pleine effervescence !

Au-delà de votre niveau linguistique, ce sont vos expériences réelles à l'international qui feront la différence aux yeux des recruteurs.

À l'ISC Paris, vous aurez la possibilité en 1^{er} année de faire un stage de 4 mois à l'international ; en 2^e ou 3^e année de partir 1 ou 2 semestres chez un de nos partenaires avec, à la clef un diplôme de l'université d'accueil ; d'effectuer un stage de 6 à 8 mois à l'étranger et enfin de suivre un MBA gratuit en 4^e année !

Pour ceux dont l'objectif professionnel n'est pas orienté vers l'international, il faudra néanmoins valider le « passeport international » en validant le TOEIC avec un score minimum de 785 points et vivre au moins une expérience à l'international : lors d'un stage de 16 semaines minimum et/ou lors d'un échange dans l'une de nos 175 universités partenaires dans 56 pays.

100 % CONNECTÉ : DEVENIR PROFESSIONNEL

Objectif de l'ISC Paris : faire de l'entreprise un lieu d'acquisition des compétences.

Lors de vos recherches de stages et d'emplois, les recruteurs seront particulièrement attentifs à vos expériences professionnelles. En bref : à ce que vous savez faire !

L'ISC Paris a donc développé sa pédagogie autour de l'acquisition d'expériences, en proposant 12 à 26 mois de stage au cours des 3 années. Ces expériences de terrain vous permettront d'appréhender les missions d'entreprises, de tester différents secteurs d'activités et d'acquérir des compétences profes-

sionnelles. De plus, vous pourrez choisir de passer 12 mois en entreprise entre votre 2^e et 3^e année, c'est l'année d'expérience professionnelle. Pour vous aider à aborder ces stages de façon efficace et professionnelle, vous bénéficierez d'un coaching personnalisé.

Autre atout : vous profiterez à Paris, d'une situation géographique exceptionnelle, qui vous donnera accès à un important réseau d'entreprises dans des domaines d'activités variés.

Les moyens mis en place pour trouver un stage

- L'Entreprise Étudiante, Partners ISC, propose à tous les étudiants de l'école des offres de stage en France et à l'international. L'année dernière, ce sont près de 5000 offres de stages qui ont été proposées.
- MyISCstage permet aux recruteurs de déposer leurs offres de stage à partir de notre site internet et à nos étudiants de les consulter en temps réel. Cet outil permet aussi à nos étudiants d'être en contact avec les différents recruteurs afin d'échanger avec eux sur les missions proposées.

Les outils du premier emploi :

- Les forums ISC Paris : permettent deux fois dans l'année à nos étudiants de rencontrer les entreprises qui recrutent ;
- La semaine des métiers et la quinzaine des secteurs d'activité ;
- Les ateliers CV/emploi ;
- CV des jeunes diplômés en ligne, consultables par les entreprises ;
- La rédaction et la soutenance d'un projet professionnel pour chaque étudiant de 3^e année ;
- Un réseau actif de près de 15 200 anciens ;
- Plus de 3000 offres d'emploi déposées en 2013/2014 ;
- Une nouvelle plateforme exclusive : Career Center ISC Paris.

100 % ÉPANOUI : ENTREPRENDRE POUR APPRENDRE

Objectif de l'ISC Paris : prendre une dimension professionnelle avec les Entreprises Étudiantes.

Dès votre première année, et pendant toute votre scolarité, vous pourrez allier formation académique et missions réalisées au sein de votre Entreprise Étudiante. L'intérêt premier de cette « alternance » est de vous permettre d'appliquer l'ensemble des connaissances enseignées en cours lors de missions d'entreprises réelles.

Point d'orgue du parcours, les Entreprises Étudiantes vous obligeront à gérer un emploi du temps conséquent, à l'image des managers en activité. Des expériences qui vous apprendront à vous organiser, à planifier, à déléguer, à anticiper... des qualités attendues par les entreprises.

Depuis 50 ans, l'ISC Paris accompagne ses élèves sur le chemin de la réussite.

CULTURE GÉNÉRALE

DURÉE : 4 HEURES.

Il sera tenu compte des qualités de plan et d'exposition, ainsi que de la correction de la langue. Il n'est fait usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

SUJET

DISSERTATION

L'occupation de l'espace

CORRIGÉ

Par Gilbert Guislain, professeur de culture générale en classes préparatoires Commerciale-Frilleux, à Paris.

Ce libellé est proche d'un ensemble de sujets voisins, soumis aux concours en 2014 : « habiter un espace, est-ce se l'approprier ? », « peut-on s'approprier l'espace ? » (EM Lyon) « partager l'espace » (ESC). Le mot occupation doit être défini et problématisé, dans ses motivations, ses formes et dans les limites de cette démarche. Il convient de noter qu'il s'agit de l'espace et non d'un espace en particulier. Il faut, comme toujours, éviter une avalanche de références philosophiques convenues. Toutefois les contextes culturels importent ainsi que la diversité des exemples, sans oublier l'espace mythique et imaginaire, l'espace amoureux, ou enfin celui des mentalités. Les philosophes des Lumières entendaient par exemple constituer un contre-pouvoir culturel en occupant le champ des valeurs.

Cette question du rapport à l'espace avait été souvent étudiée dans les ouvrages dédiés à ce thème de culture générale : loin de constituer un prêt à penser, leurs analyses sont toujours pertinentes et utiles à tous, en ce qu'ils présentent un très grand nombre de sujets possibles pour les concours.

Occupation, distribution de l'espace social et politique

Occuper l'espace social est révélateur, permet de marquer sa place, de se différencier. La Bruyère, dans les *Caractères*, avait observé la distribution des places, des rangs, des pouvoirs à la cour, il avait mis en cause ceux qui, comme Arrias (*De la cour*) occupent tout l'espace, y compris par leur verbe sans réplique, contraire à la morale classique de l'harmonie sociale. Ceux qui occupent l'espace affichent leur ego surdimensionné et se plaisent à faire attendre autrui. L'ostentation aristocratique fait qu'on se montre, on veut être vu, ce qui est le privilège du pouvoir. Comme l'ont montré Michel Foucault, (*Surveiller et punir*) Norbert Elias (*La société de cour*) et Erving Goffmann (*La Mise en scène de la vie quotidienne*), l'espace social de la modernité est normalisé et codifié. Goffmann définit par exemple, dans *Asiles*, les espaces dont les internés disposent, en jouissant de libertés officieuses. Dans les romans d'apprentissage du XIX^e siècle, la distance sociale, le jeu

sélectif des regards, séparent les notables des exclus. Les places et les relations, constantes ou aléatoires, sont révélatrices des jeux de pouvoir, car on rivalise pour occuper symboliquement l'espace. Balzac avait montré comment les jeunes peinaient à occuper l'espace dans cette société française ou l'on est défini par ce que l'on est, plus que par ce que l'on fait ou par ce que l'on mérite. Dans *Illusions perdues*, Lucien de Rubempré, mal accompagné par Madame de Bargeton, est repéré comme un intrus dans l'espace de l'Opéra, puis abandonné dans sa loge par sa protectrice. Un peu plus tard, à l'époque de Zola, la géographie sociale parisienne du XIX^e siècle révèle une division entre l'Ouest bourgeois et l'Est populaire, l'immeuble parisien lui-même est diversement occupé selon ses étages.

L'urbanisme n'est pas étranger à des préoccupations idéologiques et politiques. Au vieux Paris va succéder une ville monumentale à l'architecture haussmannienne, et mieux contrôlée par le pouvoir. Le privé l'emporte sur l'espace public, où vivaient errants et misérables, encore au XVII^e siècle, selon l'historienne Arlette Farge. L'extension de l'habitat bourgeois et résidentiel au XIX^e siècle, la « gentrification » des anciens centre-ville populaires à la fin du XX^e siècle montre l'extension de la propriété aisée. Si l'étatisation de l'espace a progressé historiquement, il s'est privatisé dans les sociétés libérales, tandis que la vie privée s'est « publicisée ». Des lieux patrimoniaux sont dévolus à des intérêts privés. Les services de « sécurité » privés, les carrés VIP à la faveur d'« événements » sont autant de contraintes et de limites mises à l'exercice des libertés publiques. Tel homme politique est « reçu chez tel journaliste », même dans le service public. L'espace public s'est dépolitisé, les citoyens ne s'y investissant pas, les pouvoirs oligarchiques et technocratiques contrôlant l'espace social – ce que dénoncent vaillamment les « lanceurs d'alerte » – contre ceux qui prennent les grandes décisions de manière opaque. Ces perspectives sont explicitées notamment par Samuel Pelras (*Fragments politiques et L'espace*, florilège ISC 2014 : l'espace public, un concept « vide » ? pages 107-119).

Néanmoins, des urbanistes visionnaires, des utopistes sociaux, des pédagogues innovants ont inventé tout au long des deux derniers siècles diverses manières nouvelles de partager l'espace. Nous pouvons nous réapproprier des lieux, ou bien élaborer de nouveaux lieux à vocation publique pour recréer du lien social et favoriser la démocratie participative. La tradition de l'agora rompt avec l'indifférence des individualistes sans individualité.

Territoires et conflits

Occuper c'est prendre possession de, mais alors que l'animal s'approprie naturellement son territoire, cette démarche fait l'objet, pour l'homme, de calculs ; le territoire, réel ou symbolique, est un enjeu de pouvoir et de rivalité. On fonde une ville et on la jalonne de ses marques historiques et politiques. Il peut s'agir autant d'un espace mythique ou imaginaire que d'une simple occupation physique. Le passé, l'avenir, les ancêtres, l'idée de nation, les amis, les ennemis, les pouvoirs étrangers s'inscrivent ainsi dans des territoires mentaux. L'organisation du temps est aussi une occupation de celui-ci, il en va de même pour la répartition, la distribution de la parole. L'exigence fondamentale démocratique est la transparence et le partage de la parole dans l'espace public, sur des sujets publics, collectifs.

L'occupation de l'espace est souvent pensée en référence au domaine politique et militaire où il s'agit moins, comme nous le verrons après, de dominer des étendues entières que de contrôler des points stratégiques. Il convient d'accorder de l'importance au concept de limite ou de frontière, au sens américain du terme : la frontière sépare la « civilisation » d'un espace vide à remplir et à occuper, dit sauvage.

Le sociologue Baudrillard avait opposé la prédilection américaine pour les espaces ouverts aux espaces français, beaucoup plus étriqués, y compris psychologiquement, caractérisés souvent par la méfiance, la défiance, l'individualisme... Quant à la colonisation française, inspirée des Lumières, et mise en place par Jules Ferry, occupait des territoires pour les civiliser. L'idéalisme républicain, au XIX^e siècle, associait à la théorie des frontières naturelles la volonté nationale, jugeant ainsi illégitime l'occupation de l'Alsace Moselle. Quant à la théorie de l'« espace vital », elle jugeait naturelle l'occupation d'un espace nécessaire à un peuple, réduisant ainsi le politique au biologique.

On peut occuper matériellement l'espace, mais ceci est coûteux et aléatoire, voire fatal, comme l'a montré l'exemple précédent des grands Empires, à vocation universaliste. Tenant des passages, des ports, des détroits, la colonisation anglaise s'est voulue plus sélective, moins pesante que la colonisation française. Les États-Unis ont préféré l'exercice d'une influence, plus « rentable », économe en moyens, disposée en vue de l'effet optimum. Il est préférable de surveiller sans tout vouloir tout occuper comme le montre Foucault dans *Surveiller et punir*. Pour lui, le pouvoir contemporain veut voir, alors que le pouvoir traditionnel voulait être vu, par l'ostentation. Commercialement, on peut envahir agressivement le marché, exercer le « hard power », ou préférer le « soft power » par la séduction et l'influence. Militairement, le mouvement calculé, la ruse sont sans doute à préférer à l'offensive à tout prix, à la recherche systématique de l'occupation de l'espace, comme le montre l'exemple des charges héroïques désastreuses d'Août 1914, lorsque les combattants étaient jetés suicidairement sous l'artillerie ennemie, pour gagner cinquante mètres. La théorie de l'offensive à outrance, se préoccupant peu du terrain et de la logistique, visait à une pénétration rapide des troupes, dans l'illusion de batailles brèves et décisives. Ces charges héroïques fatales comptent parmi les échecs français les plus retentissants (Pierre Servent, *Le complexe de l'autruche*) et ont été imputées à l'aveuglement de l'Etat Major déconnecté du réel, et à l'aveuglement trop constant des élites françaises. Dans *Vitesse et politique*, le sociologue Paul Virilio a analysé les liens de l'espace et du temps, dans les domaines militaire, politique, économique et technologique. Pour lui, la modernité a été marquée par la vitesse, la mobilisation, l'assaut. Les stratégies militaires contemporaines, intégrant la subversion, la déstabilisation, la guérilla, ont renoncé à l'occupation lourde du terrain. Dans les conflits sociaux, si les occupations d'usines ou d'entreprises restent bien réelles, elles prennent surtout un tour symbolique. Sur la scène sociale, le sit-in, le die-in le flashmob, le happening, la manifestation surprise recherchent l'efficacité en peu de moyens, différant ainsi des occupations plus lourdes, plus durables, des places Tahrir en Egypte, Maidan en Ukraine, Puerta del Sol à Madrid... sans oublier le mouvement Occupy Wall Street. Déjà en 1968, l'occupation, l'ouverture ou la fermeture de la Sorbonne avaient fait l'objet d'âpres débats politiques.

Limites de l'occupation de l'espace

C'est l'intérêt qui peut expliquer l'effort d'occupation de tel terrain. Dans *Au bonheur des Dames* de Zola, Mouret, comme autodidacte entrepreneur étranger aux élites installées, entend rentabiliser l'aspect du grand magasin, dont il sature l'espace matériel d'artifices, de manière avantageuse, par la distribution des lieux, pour activer la vente, le transformant ainsi en « cathédrale mondaine », en temple du luxe offert à tous. Mais l'explication utilitariste est un peu brève, car le prestige, la recherche de la gloire, l'ostentation, qui peuvent coûter parfois plus cher qu'ils ne rapportent, fondent aussi cette démarche. Par l'occupation, on peut lire sa

force dans la soumission d'autrui. L'individualisme conflictuel et possessif pointé par Hobbes se révèle ainsi. La critique psychologisante et moralisatrice dénonce habituellement la boulimie de pouvoir, comme celle de Picrochole dans *Gargantua* de Rabelais (chapitre XXXIII). Mieux constituée, plus collective, faisant référence à l'Histoire, l'idéologie peut exalter la domination, l'occupation du monde. La course à l'espace des années 1950-1960 n'était pas seulement l'expression de la rivalité américano-soviétique, elle était aussi l'expression de l'idéologie marxiste messianique et techniciste en cours dans la « cité des étoiles ».

L'occupation de l'espace peut être jugée légitime, revendiquée par exemple au nom de la propriété, du droit du premier occupant, de l'espace « propre » pour Locke (*Traité sur le gouvernement civil*) contre la promiscuité. On peut faire référence à l'intimité bourgeoise dans l'habitat haussmannien du XIX^e siècle, qui relègue à l'arrière l'escalier de service, la cuisine et les toilettes, le salon étant au contraire un théâtre mondain. L'occupation de l'immeuble est alors caractéristique. Le film *Les Femmes du 5^e* avec Fabrice Lucchini oppose ainsi l'appartement bourgeois à la vie populaire et communautaire de l'Europe du Sud, dans les chambres de bonnes.

Rousseau contestait au contraire l'appropriation individuelle dans son second Discours. C'est au nom du droit que je peux occuper tel espace, pour refouler la force injuste. Mais la domination légitime que je pense exercer peut masquer un rapport de force, et telle frontière, que j'estime juste et idéale, n'est peut-être que le point de rencontre de deux forces. La morale revendiquée par une occupation est alors l'instrument d'une politique.

Une réflexion plus critique encore apparaît : L'occupation spatiale n'est-elle pas qu'un simple remplissage, qu'une saturation de l'espace ? Dans *Regards sur le monde actuel* (1945) Valéry écrit que « le temps du monde fini commence », le temps des espaces libres qui caractérisait encore le XIX^e siècle est défunt. On passe de l'isolement des événements au développement des relations dans le cadre de la mondialisation naissante. Le monde apparaît désormais comme un tissu de relations et de contacts multiples. Mais ainsi tout est fermé et tout vide a disparu, l'intériorité est même compromise, car nous sommes sans cesse occupés par le monde extérieur ? Comment exprimer une pensée alternative, si tout est saturé, occupé ? Si tout est possible, alors, paradoxalement, rien n'est possible.

L'occupation la plus large apparaît aussi comme un affaiblissement, une dispersion des forces. Toute une réflexion historique et politique a été menée depuis Montesquieu, à partir de l'exemple de Rome (*Considérations sur les causes de la grandeur des Romains et de leur décadence*, 1734) sur la puissance et le déclin des empires qui occupèrent de vastes territoires. Dans *Naissance et déclin des grandes puissances* (1989), l'historien contemporain Paul Kennedy mesure les atouts de chaque grande puissance européenne dans l'Histoire. Au début du XX^e siècle, les États-Unis entrent en scène, les puissances européennes déclinent et un monde multipolaire se met en place. Une surexpansion impériale et un affaiblissement relatif menacent les pouvoirs dominant de vastes espaces, cette occupation étant parfois coûteuse et politiquement difficile. Il en va ainsi de l'Angleterre impériale, de l'Autriche Hongrie avant 1914, de la France coloniale agissant au nom de la « civilisation » ... et dont le destin est en définitive de se rétracter.

Occupe-t-on définitivement et précisément l'espace ? On peut occuper un espace, le remplir de manière contingente mais lui rester extérieur, ne pas se l'approprier vraiment. L'occupation peut être marquée par l'inertie ou la vanité. Et si l'occupé peut s'accoutumer à l'occupation, il peut aussi résister, extérieurement et intérieure-

rement, par l'exercice de sa liberté. A quoi bon occuper et remplir l'espace s'il reste vide ou s'il l'est vraiment, comme la Bastille en 1789, hormis pour l'enjeu symbolique et la portée historique ? L'occupé peut être indifférent à l'occupant, et celui-ci peut rester extérieur à l'occupé.

D'autre part, en théorie, par sa définition, l'espace – par son caractère infini – déborde tout encerclement, toute appropriation. Il est bien là mais sans jamais être tout à fait ici plutôt que là-bas. Il est même difficile de le penser comme dehors à partir du dedans. S'il est relatif et infini, suis-je à ma place, dans mon « *telos* » quand je l'occupe ? La vanité du voyage, de l'occupation apparaît ; pourquoi être là-bas et non ici, comme le pensait Baudelaire ? Ne vais-je pas mieux quand je voyage en moi-même, comme Montaigne – ou bien « autour de ma chambre », comme Xavier de Maistre sans être toujours affairé, sans cesse occupé par le monde extérieur, peut être aliéné, prisonnier d'un ego démesuré, et jamais disponible ? Et ne convient-il pas de cultiver des liens affectifs et humains à l'espace, d'« habiter cette terre en poète », plus que de l'« occuper » ? Comme la collection parfois, l'occupation, toujours relative, peut exprimer une vaine boulimie : il y aura en effet toujours un nouvel espace à occuper, et un autre qui pourrait manquer, compromettant le succès global de l'entreprise. Ne faut-il pas alors « ouvrir un espace » (sujet HEC 2014), et non occuper l'espace ?

Bibliographie sur le thème 2014-2015 de culture générale

La vérité, Dissertations et méthodes, Sophie Guillouet, Ellipses
Magazine *Espace Prépas*

Bibliographie de culture générale

Cent fiches de culture générale, collectif, Bréal

Éléments de culture générale, J. Bonniot, P. Dumont, G. Guislain, Ellipses

QCM commentés de culture générale, G. Guislain, Studyrama

L'Intégrale de la culture générale, E. Caquet, G. Guislain, F. Grolleau, Ellipses

Fiches de culture générale, Studyrama

Exercices de contraction et de synthèse de textes, G. Guislain, Y. Terrades, Ellipses

Réussir la synthèse de textes, Cl. de Oliveira Gomes, G. Guislain, Studyrama

Dictionnaire de culture générale, sous la direction de F. Laupies, PUF

CULTURE GÉNÉRALE

DURÉE : 4 HEURES.

- La dissertation devra être précise et concise. Elle ne devrait pas excéder 6 à 7 pages, les dépassements ne pouvant se justifier que par une qualité exceptionnelle.
- La note tiendra compte de la présentation, du style, de la correction de la langue et de l'orthographe. Au-delà de 5 fautes d'orthographe et de syntaxe, il y aura pénalisation automatique et progressive.
- Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document, l'utilisation de tout matériel électronique est interdite.

SUJET

PEUT-ON S'APPROPRIER L'ESPACE ?

CORRIGÉ

Par Tony Brachet, agrégé de philosophie, E.N.S. St-Cloud, Professeur au lycée Paul-Lapie (Courbevoie), correcteur des Grandes Ecoles de commerce.

Bien que les correcteurs du sujet de culture générale de l'EM LYON aient pu, à juste titre, déplorer l'absence de diversification – notamment scientifique – de l'approche, par les candidats, de la notion d'espace, c'est la question de l'*appropriation*, plus délicate, qui fait la subtilité du sujet comme sa richesse.

Il y a, certes, bien des « espaces ». La connaissance scientifique en distingue au moins trois. D'abord, la *spatialité* – mathématique – première à l'esprit dans la mesure où, constituée par les seules définitions, elle paraît être la propriété naturelle de la *pensée humaine* qui l'a créée – à défaut de toujours s'y reconnaître, faute de l'« intuition » *appropriée*, qui se dérobe à mesure que les mathématiques, particulièrement les géométries, progressent vers la modélisation d'espaces toujours plus abstraits et éloignés de la perception.

Au contraire, l'espace *réel* dans lequel opère le physicien s'avère à ce point *immatrizable* que, déjà, les penseurs épicuriens le soupçonnaient de reposer sur un « hasard » irréductible que rien ne saurait apprivoiser. On parlera plus précisément aujourd'hui de la *dualité* (que décrit l'asymétrie globale des champs) et on se souviendra du débat passionné de Bohr en contradiction avec Einstein affirmant que « Dieu ne joue pas aux dés ».

Enfin, l'*étendue* – que Descartes prenait pour la matière – a légitimement fourni la majorité des exemples, sans que pour autant les candidats en distinguent suffisamment les « niveaux d'organisation ». L'ambition projet d'initier une « phénoménologie » suppose pourtant des distinguos plus subtils que ceux généralement mobilisés, pratiquement restreints à l'évocation de l'« espace vital », au détriment de l'espace *proprement* humain.

La notion d'*appropriation* appelle des remarques analogues. La *propriété* – sa cause finale et élément de sa définition – peut s'entendre en effet au sens logique du *propre* de Porphyre : le prédicat portant l'attribution essentielle, ce qui est *reconnu* « en propre » ; ou encore symboliquement, comme un patronyme, habituellement détenu à la manière d'un patrimoine, mais pouvant être attribué ou confirmé par convention voire par un rituel social (ainsi Edmond d'Estaing, père du président, obtint-il par décret, en 1922, le droit de « relever » le nom paronyme de l'Amiral d'Estaing, avec sa particule).

Dans l'espace matériel où les choses se prêtent à l'*appropriation* par les personnes, le mot traduira la mise en œuvre d'un droit réel, que les candidats n'ont pas manqué d'explorer, dans ses liens à la *possession* et d'*usufruit*, « démembrement » conceptuellement eux-mêmes ce qui est uni déjà dans les méandres du droit romain. Dans la mesure où la *propriété privée* démembre elle-même, si l'on peut dire, l'espace social, la question de l'*appropriation* revêt ici un caractère dialectique – entre l'*usurpation* qu'elle peut manifester et l'*expropriation* qu'elle peut subir.

Enfin – c'est le cœur du sujet – la plupart des copies auront insisté sur les différentes manières dont la *personnalité* humaine (au-delà des marquages territoriaux, de la volonté de puissance ou de la « possession » sexuelle) fait *sienne* le « monde environnant » de l'institutionnalisation des liens intimes par le mariage dans un espace institutionnel à la création, par l'art, d'espaces imaginaires, voire paradoxaux que la science paraissait se réserver.

Ces trois dimensions de l'*appropriation*, et ces trois – au moins – acceptions de l'*espace* se croisent en un seul réseau conceptuel qui ne laissait aux candidats que l'embarras du choix dans l'organisation de leur travail. Un certain nombre – évoquant Kant – ont ainsi privilégié une approche soit épistémologique (la raison pure est sans prise sur l'espace et se perd dans une double antinomie) soit « pratique » (la volonté s'approprie le désir en instituant une législation « suprasensible » dans un espace communicationnel) soit esthétique (le sublime subvertit l'espace normatif de l'entendement) mais ils n'ont pas lié cette triplicité en une seule problématique, telle que l'élabore par exemple Gilles Deleuze.

Nul n'a évoqué non plus – du moins dans notre « lot » – la triade lacanienne de l'*imaginaire*, du *symbolique* et du *réel* en dépit de sa « puissance de feu », hors même de la psychanalyse, comme lorsque Lacan présente, par exemple, la *topologie*, description non algébrique de l'espace, comme « la saisie du réel par des moyens imaginaires » (*Séminaire XX*) ou lorsqu'il interprète en fonction de la dissymétrie de l'espace *sexué*, par exemple, les *Ménines* de Velasquez.

Pour autant, la plupart (à l'exception des « obsédés » du *Lebensraum*) ont senti que la « subjectivation » – esthétique, désirante – de l'espace constituait bien l'enjeu principal d'un sujet qui n'était, ni de droit, ni de science politique, ni d'histoire, ni de philosophie, mais de culture générale. Dans la présentation ici retenue, l'*art* doit restituer au sujet humain ce que les sciences lui enlèvent en fait de maîtrise de l'espace – symbolique ou réel – mais par des moyens autres que ceux de l'institution d'un espace social qui superpose à celui de la Nature celui de sa propre « aliénation ».

L'espace mathématique – un espace est un ensemble muni d'une structure – où il pourrait sembler que tout dépende des définitions et de la constructibilité (Kant, *Critique de la raison pure*, Méthodologie) aujourd'hui de la *récurtivité* des algorithmes (Church) en sorte que rien ne s'oppose à la liberté d'y représenter ce que l'on veut et de constituer ainsi un véritable « monde intelligible » s'est pourtant révélé, par trois fois au moins, *inappropriable* par la pensée humaine :

- une première fois, lorsque les penseurs-mathématiciens de l'Antiquité, Pythagore en tête, ont pu constater l'*incommensurabilité* du rapport du côté d'un carré à sa diagonale, constat qui vient bouleverser le consensus logique, pédagogique, voire socio-politique, projeté par le « Ménon » platonicien. La diagonale est désormais sans maître, elle erre comme un esclave affranchi dont le tuteur (la raison) ne sait plus que faire, quand bien même – à l'instar de Socrate – il aurait enseigné précédemment à ce dernier comment l'utiliser pour dupliquer le carré ;
- une seconde fois, au moment de la « crise infinitésimale » du XVII^e siècle, lorsque les exigences de la connaissance contraignent les analystes à compter « pour rien », dans le calcul, cet espace des différentielles – qui sont pourtant le reliquat de la dérivation – entraînant une querelle véritablement métaphysique (Carnot, *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal*). Ces entités « négligeables » (notées et nommées différemment par ceux qui les ont inventées) sont-elles quelque chose, ou rien ? ;
- une troisième fois enfin, lorsqu'en 1931 le « théorème d'incomplétude » de Gödel expulse la mathématique du « paradis cantorien » – où elle se tenait encore au dire d'Hilbert – interdisant toute spéculation sur l'« infini ». Grand ou petit, ce dernier redevient « effrayant » comme l'était l'espace lui-même pour Pascal. Ni l'infini « naturel » (l'infinité de la suite des nombres entiers) ni l'infini de « second genre » des nombres « réels », ni le rapport de ces différents espaces – dont chacun possède pourtant une structure algébrique bien définie – ne peuvent plus, désormais, être maîtrisés par notre opérativité finie.

Archytas le pythagoricien imagine un homme placé à la limite du monde et lui demande d'étendre le bras dans le vide environnant. Il souligne que rien ne l'en empêche – il n'y a rien en dehors du monde. Mais comme étendre le bras dans *rien* – si ce n'est un océan de différentielles ? L'espace « clos » de la physique – pour lui donner le qualificatif qu'Alexandre Koyré (*Du monde clos à l'univers infini*) réservait à la science des Anciens – ne dame-t-il pas le pion, si l'on peut dire, au « faux infini » du nombre ?

L'espace physique est antinomique au sens où sa représentation est contradictoire (on sait qu'*onde* et *corpuscule*, par exemple, ne constituent que des images) à ce titre il est en toute rigueur *impensable*. Cette difficulté vaut même s'il est fini : Kant y insistera, dans la première *Antinomie* de la raison pure, affirmant en commentaire que le monde est, selon qu'il est représenté comme fini ou infini, soit « trop petit », soit « trop grand » pour la pensée, qui n'y trouve jamais son compte ni sa mesure.

Le philosophe de Königsberg suggère pourtant, dans les *Remarques* qui suivent le texte, qu'il devrait exister une solution physique, « non sceptique », de la fameuse *Antinomie* : soit exactement ce que la Relativité Générale décrira comme *un monde fini sans limite*, ou doté d'une « courbure ». Philosophie et physique se rencontrent comme « co-propriétaires » d'un espace *irreprésentable*, territoire, domaine ou champ de la raison pure qui n'est autre que celui de la cosmologie.

Qui plus est, l'espace physique accessible – par opposition à celui qui est spéculatif – ne « s'appartient » pas *en propre*. L'opposition interne qui le constitue irréductiblement n'est subordonnée à aucun principe unificateur autre que mathématique. La mécanique reste irréductiblement « quantique », non-déterministe voire « non-locale » ; elle traite, pour une bonne part, d'entités « non-séparables », particules et charges. N'ayant affaire qu'à des interactions – *il n'y a pas, en toute rigueur*, note Cohen-Tannoudji, *de particules élémentaires* (*La Matière-espace-temps*, p. 300) la science ne nous autorise pas à « arraisonner » l'Univers.

Hegel en donne une raison (*Encyclopédie des sciences philosophiques*, 1817).

Non loin de Newton qui définissait l'espace comme le corps de Dieu, seulement concédé à la connaissance humaine, le philosophe définit l'espace comme l'extériorité, non seulement pour la conscience (l'espace est le « monde extérieur ») mais « *en soi et pour soi* ». L'extériorité de l'espace est celle de la Nature elle-même : dépourvue d'essence propre, celle-ci ne peut être *conçue* – intellectuellement appropriée – que comme spatialité et contingence. Elle est étrangère, et avec elle l'espace, à l'*Esprit* dans sa visée de « faire sien » tout ce qu'il rencontre dans le monde que nous appelons réel.

En regard de la *déappropriation* – pour reprendre l'expression de Fethi Benslama visant la « perte d'identité » – voire du désenchantement que nous inflige la connaissance physique (égarement dans un monde de hasard, aux formes étranges et irrémédiablement antinomique) le « génie humain », comme l'a nommé Maurice Pradines, œuvre à la *réappropriation* de l'espace. Face à l'extériorité, l'homme est *sujet* – et beaucoup ont rappelé, avec Heidegger, qu'il est également *projet*, en sorte que l'opposition entre-temps et espace, indécise dans le monde physique – Bergson allant jusqu'à contester, dans *Durée et simultanéité*, l'expression « espace-temps » – vient ici à maturité.

Le sujet *vivant* déjà – *même* animal – se montre capable de multiples synthèses qui transcendent l'« extériorité » du donné de manière à le faire, proprement, *sien*. L'« appropriation », de « son » espace – *Umwelt* – est, comme le montre longuement Piaget, le premier « réflexe » de l'animal – en général, et de l'animal humain en particulier. Le fondateur de l'épistémologie génétique en précise les éléments : à l'*accommodation* – notion quelque peu lamarckienne définissant la capacité adaptative de l'être à son milieu (ainsi, la célèbre girafe de Lamarck allonge-t-elle progressivement, de génération en génération, le cou jusqu'à atteindre le feuillage) s'oppose l'*assimilation*, par lequel un vivant fait *sien* le milieu, qui devient ainsi un *territoire*.

Ainsi, l'appropriation *réelle* du monde – bien distincte de celle du calcul ou du concept – est à la fois active et passive, évoquant la *synthèse passive* par laquelle un Husserl, au terme de son avancée, caractérise précisément le « monde de la vie ». Dans la perspective de Piaget, l'*Umwelt* est *constitué* par le vivant lui-même, à la manière d'une « sphère d'appartenance » antérieure à la conscience, et conditionnant celle-ci puisque les opérations intellectuelles ont leur racine dans l'activité vitale.

Souligner que la matière inerte, la substantialité des choses, outre qu'elle fait au contraire l'objet de l'appropriation, ne *s'approprie* jamais rien, est un truisme – sauf à attribuer à la façon de certains ésotéristes, Leibniz en tête, à l'ambre, par exemple, une « intention » de retenir prisonnière la mouche, ou à la place celle de congeler le mammoth en vue de le préserver de la fossilisation : ce qui revient à attribuer à la matière les propriétés du vivant, sinon de l'*Esprit*.

D'une manière aussi originale, Hegel écrit (*Phénoménologie de l'Esprit*, ch. I) : « *les animaux eux-mêmes doutent à ce point de la réalité des choses du monde extérieur, soupçonnent à ce point qu'elles ne sont pas propres à elles-mêmes, mais dépendantes, qu'ils s'en saisissent sans plus et les consomment* ». Piagétien ou pradinien avant la lettre, le chantre de la dialectique appréhende ici l'animal comme un penseur *idéaliste* si peu convaincu de la réalité même de l'espace, que le seul désir est de l'annihiler par la force d'un *jus abutendi* congénital.

Le monde « résiste » certes à toute assimilation par un Moi avide et glouton. Une « indigestion » de *non-Moi* renverra l'*Esprit* à sa solitude, à l'idée – très soulignée par les candidats – que le monde est, au fond, impropres à l'hébergement de l'hu-

main, voire incompréhensible et hostile, comme il l'est pour l'*Etranger* de Camus, générant amertume et nostalgie. D'un point de vue « réaliste », *Moi et Non-Moi*, comme chez Fichte, doivent *composer*, en sorte qu'à toute « extension » du premier fasse pièce une limitation par le second, et finalement une auto-limitation, source de l'univers juridique et éthique.

Certains, pourtant, n'ont pas craint de faire de Fichte, relayé par la notion d'*espace vital*, un précurseur d'Hitler. C'était ignorer, en particulier, que le philosophe a publié *L'Etat commercial fermé*, où il tente d'imposer aux nations un modèle de développement radicalement opposé à tout expansionnisme, et même à tout échange international. Certes, l'auteur des *Discours à la nation allemande* n'a pas été sans nourrir le refrain de l'appropriation nationaliste du sol par une tradition sanctuarisée, mais il est étranger à l'ambition de vassaliser les territoires comme à celle de domestiquer les races.

Entre ce monde extérieur comme lieu de renoncement, que certains préféreront décréter vide de substance que de persister à « investir » – et l'espace de domination et de conquête le *corps propre*, support de volonté de puissance plutôt que de vouloir-vivre, apparaît comme le vecteur de la mainmise sur l'espace. On peut douter que l'animal ressent « son » corps comme *propre* en ce sens-là, que, prisonnier du *Selbstgefühl* (sentiment de soi, cénesthésie) il dépasse le plan de l'être en direction de l'*avoir*, même subconscient, semblable en cela à un enfant qui joue, mais ne thésaurise pas.

Seul « lieu propre » de mon être, quelconque pour ceux qui ne l'« habitent » pas, le corps que je suis m'*appartient* à la manière d'une chose dont je peux – sauf en droit canon – disposer par aliénation limitée – celle qui m'asservit à l'espace social – ou le suicide comme mise en œuvre du *jus abutendi* lié à toute propriété, tandis que les *autres*, qui vivent dans le lieu commun, ont obligation de le traiter comme l'*incarnation* de ma personne (Hegel, *Philosophie du Droit*, livre I).

S'il n'y avait que des rapports juridiques – *extérieurs* comme les définit Kant – le *Contrat social* les réglerait : les hommes renoncent, pour ne plus souffrir de la violence de la possessivité originelle, à ce qu'ils ont acquis ou aux droits qu'ils pensent détenir par nature, et les échangent contre des droits civils – dont le droit de propriété – tout en restant redevables de leur personne, dans l'éventualité de la peine de mort ou de la guerre, envers l'Etat qui gère désormais l'espace *social*.

Ainsi, chez Rousseau, c'est de notre corps *propre* dont – à l'issue du Contrat Social – nous sommes les moins propriétaires, bien que la sécurité en soit désormais assurée. Le Contrat lui-même implique une « non-appartenance » à soi qui nous *destine*, au fond, à la vie sociale comme à la rencontre avec autrui. Kant n'est pas loin, qui définit le devenir de l'espèce – comme le produit de l'égoïsme naturel, sociabilité comprise. Toutefois, à l'« état de nature », l'homme n'est pas seulement un sauvage qui s'« approprie » ce que bon lui semble – terre, esclaves et femmes. Le phénomène du *potlach* – la destruction volontaire et ostentatoire des biens, tels que les troupeaux d'animaux domestiqués – montrent qu'il y a *un au-delà de la propriété*, même pour le plus primitif des hommes ; il ouvre l'espace du *don*, analysé par Mauss.

Jacques Derrida a écrit *Donner le temps*. N'y a-t-il pas, également, un art de *donner l'espace* ?

Cette question engage une investigation plus serrée. Notre corps est le corps propre (ce prédicat que l'on peut substituer au sujet). Le corps de l'*autre* est le

corps étranger. Mais il est des corps *plus étrangers* que d'autres, en ceci qu'ils ne présentent avec le nôtre, et ceux qui lui sont analogues, que « moins » d'affinité. Le corps *sexué*, est *plus autre* – ou plus radicalement Autre – que le corps d'*autrui* en général, et il constitue un objet d'appropriation problématique, celui du désir.

Le corps *sexué*, s'il faut en croire le discours psychanalytique, freudien ou lacanien, appartient à un autre espace que le corps tout court. Ainsi, dans l'espace fantasmatique la petite fille décrite par Freud s'« approprie » sans cesse le pénis, la femme l'« incorpore », la mère le « restitue » – sous forme d'enfant ; cependant que l'imaginaire masculin fait double, ou triple l'espace de la féminité : à la fois analogique (le parallélisme clitoridien) euclidien (celui de la supposée « castration ») topologique enfin, si l'on interpelle la profonde réversibilité du fantasme maternel. L'« appropriation » sexuelle du corps de l'Autre, comme autre sexe, se heurte ainsi à une difficulté autre qu'éthique. Le droit, là encore, en dispose aisément, puisque, dans l'espace juridique du mariage, rien n'interdit aux humains de rêver *posséder légitimement, exclusivement, la capacité sexuelle de l'autre*, organes génitaux compris, ainsi que le formule Kant dans une célèbre définition de la *Doctrine du droit* où il tente de fonder un « droit personnel à modalité extérieure » qui n'est pas sans évoquer le droit de cuissage. Mais cette définition censée endiguer la « *vaga libido* » animale ne règle nullement l'abyme de la différence sexuelle dont doit s'accommoder le désir humain.

La psychanalyste Luce Irigaray a poursuivi dans toute son œuvre, jusque dans l'histoire de la philosophie, ce qu'elle nomme *la tache aveugle d'un vieux rêve de symétrie* : entre la caverne toute utérine – à la fois protectrice et trompeuse – de la *République* de Platon, et la « passivité réceptrice » de l'*intuition sensible externe* – l'espace, pour Kant, que l'entendement ne saurait s'amalgamer – la *matière* d'Aristote constitue un potentiel « fécondable » qui ne tient sa *forme* que de l'action d'un principe mâle. Le Stagirite en aurait tiré (au dire de Nietzsche, *Le Gai Savoir*, II, §75) cette pensée extravagante qu'« *une femme petite n'est jamais belle* », la féminité étant associée à l'*indétermination* de la matière, et la « beauté » à la détermination par la *forme*, soit ce qui n'est pas spatial, ce qui ne relève pas de la « chôra ».

L'auteur de l'*Ethique à Nicomaque* ne voit rien, dans l'espace, qui ferait belle la matière. Il faut la peupler de formes. Jean Rostand nous rappelle, dans son *Esquisse d'une histoire de la biologie*, que les tenants du « préformationisme » se plaisaient à imaginer que le corps – ou la semence – d'Adam, ou l'utérus d'Eve, ou les trois ensemble, *contiennent* littéralement – en miniature – toute l'humanité. De même, dans le monde de Leibniz, une partie quelconque de l'espace contient tout l'Univers, un étang plein de poissons, écrit-il, est encore plein d'étangs pleins d'autres poissons (*Monadologie*, § 67-68).

Cette imagerie, que Deleuze (*Le Pli*) compare, en la joignant aux textes célèbres de la *Théodicée* sur les « mondes parallèles » à l'architecture baroque – la démultiplication de perspective incarnant la pluralité des « mondes possibles » – transcende même le temps et le réduit à l'espace. Ainsi, dans les *Nouveaux Essais*, le philosophe précisa sa pensée (cf. *Monadologie*, & 73 et 76) qu'un animal qui meurt ne fait que « rapetisser » à l'infini et que sa substance est conservée. Ainsi, même ce qu'un « moderne » considérera comme un rappel au *Néant* – constitutif du Temps – est interprété comme un changement de dimension.

On le sent, nous sommes tout proches ici d'une *esthétisation* de l'espace. Ainsi, le *sublime* de la *Critique de la faculté de juger* relaie-t-il heureusement l'aporie d'Aristote, quoique par un autre extrême. Kant soutient que l'entendement et l'imagination concourent dans l'expérience du sublime, mais en s'opposant. Dans cette

perspective, on dira – en vertu de l'accord de notre jugement avec notre image de l'objet – *belle* une femme « normalement » grande, alors qu'une naine sera perçue comme *sublime* en raison de son « inachèvement » même, mesuré par l'entendement mais renversé par l'imagination et un certain idéal moral.

Berkeley illustre cette originalité de la relation esthétique au monde, qui suspend la possessivité du désir, lorsqu'il évoque – lui l'*immatérialiste* – le plaisir qu'il éprouve à se promener dans tel jardin dont son propriétaire, ne tirerait, selon l'auteur, nul agrément que celui de l'ostentation. Berkeley affirme alors qu'il est le *véritable* propriétaire – conformément à la racine du mot *usufruit*, celui qui jouit réellement de la chose et en détient l'usage, plutôt que le titre. Kant soutient que le jugement esthétique est *universel, parce que désintéressé*. Que sont, en effet, les musées, palais et labyrinthes, sinon des objets de satisfaction pour tous, dans la mesure même où ils n'appartiennent en propre à personne ?

Concluons. Il y a attitude du regard, puis de la connaissance, qui allège la pression effrayante de l'espace – écrasement par la densité ou attraction du vide – ; qui retourne l'avidité en curiosité, me rend présent l'Univers, ordinairement étranger à mes aspirations, différent et inconnu. Pascal le sait, qui passe du *Discours sur les passions de l'amour aux Pensées*, – notamment à la pensée de Dieu, hors de l'espace, à moins qu'il ne soit, comme pour Nicolas de Cuse, confondu avec lui, « *circonférence dont la périphérie est partout et le centre nulle part* ».

Jaspers aussi parlera de l'*Englobant*. Toutefois, l'appropriation de l'espace par la pensée – dans et par la contemplation esthétique, ou l'ivresse métaphysique d'un Kant méditant sur le sublime des étoiles – ne saurait contenter l'homme, qui dispose également de la faculté de le *recréer* par l'art. Encore artisanal, il produisait, comme tout travail, un *double* du monde que l'esprit pouvoir conjurer l'extériorité en le reproduisant. Puis l'imagination le libère des contraintes de l'espace perçu, autorisant la mise en perspective ou en abyme jusqu'à faire de l'art un « révélateur » du réel.

Ainsi, la mise en forme « topologique » de l'espace par Escher motive l'intérêt scientifique pour l'étude d'un groupe de symétries original (Jean-Pierre Luminet, *L'Univers chiffonné*, p. 382). Chez Calder, la représentation du mouvement s'affranchit de la position du corps dans l'espace, évoquant cette dépropriation du vertige que Sartre, dans *L'Être et le Néant* (ch. 2) imagine dominé par la liberté du sujet. Apprivoisant le vide, l'art fait de même pour la matière. Il sublime les formes en les étirant comme Giacometti, les abstrait dans le style cubiste, et enfin *recrée un monde entier*, à la manière d'un Kandinsky, auquel Kojève suggère avec succès – ce dernier adoptera son analyse – qu'il est le premier peintre « concret », parce que détaché tant de la *reproduction* d'impressions ou d'expressions que de l'*abstraction* elle-même, toutes liées à la dissociation d'un *objet* et d'un *sujet*.

Dans l'œuvre de Kandinsky, toute référence au monde de la perception – par conséquent, à la dualité de la conscience – est abandonnée (il en sera de même, peut-on ajouter, chez Vasarely ou Delaunay). Ce n'était pas le cas chez Picasso, « expressionniste symbolique » et en ce sens dépendant du monde donné et des relations de ses éléments dans l'espace, « ordre des simultanités ». tandis que « l'abstraction lyrique » n'est, elle, guère plus détachée du « sujet » que l'esthétique impressionniste. Kandinsky, comme ses successeurs, bâtit au contraire des « mondes concrets » au sens où il construit, à partir de *rien* – que ces *symboles* qui n'expriment ni l'état du monde, ni la subjectivité (à peine quelque charge ésotérique que traduit la couleur) et dont la combinatoire va constituer le *monde* du tableau – des *espaces* inédits, qui n'appartiennent ni à la nature, ni à la science.

L'expérience, qu'on pourrait dire ici *globale* de l'espace, ne semble plus mériter ici le qualificatif d'*émotionnelle* (Pierre Kaufmann, *L'expérience émotionnelle de l'espace*) au sens de ce que nous éprouvons devant les œuvres, figuratives ou non, relevant du *sublime* kantien, – par exemple, les tableaux de Carl Gaspard Friedrich. Il ne s'agit pas non plus de l'espace de l'*entendement* rendant hommage à la seule « beauté » et lui subordonnant l'imagination comme chez Braque. Plus qu'un « réductionnisme » abstraitif et finalement « cartésien », le style créatif de Kandinsky exprime un « désaisissement » radical du regard et une dépropriation consentie du « sujet » du *sujet*, rappelant, que ce que nous voulons si passionnément faire « notre », nous *réapproprier* comme si nous l'avions perdu – n'est pas perdu que le temps – n'est que « *la libre extériorité de la Nature* ».

Kojève termine toutefois son étude (*Les peintures concrètes de Kandinsky*, 1966) par cette remarque que les mondes picturaux créés par son oncle ne sont toutefois pas *habitables* – quand bien même, n'en déplaise à Heidegger dans sa méditation de l'œuvre d'art, du chemin et du poème, ils auront été *bâties et pensés*.

Bibliographie

Russell, *La philosophie de Leibniz*, Edition des archives contemporaines, 2012
Kant, *Critique de la faculté de juger*
Kauffmann P., *L'expérience émotionnelle de l'espace*, Vrin, 1967
Sami-Ali, *Le corps, l'espace et le temps*, Dunod, 2^e éd., 1998
Luminet J-P, *L'univers chiffonné*, O. Jacob, 2011

Thème de culture générale 2014-2015

La vérité, Dissertations et méthodes, Sophie Guillouet, Ellipses
Magazine *Espace Prépas*

Ouvrages de culture générale

Cent fiches de culture générale, collectif, Bréal
Éléments de culture générale, J. Bonniot, P. Dumont, G. Guislain, Ellipses
L'intégrale de la culture générale, E. Caquet, G. Guislain, F. Grolleau, Ellipses
Dictionnaire de culture générale, sous la direction de F. Laupies, PUF

RÉSUMÉ DE TEXTE

DURÉE : 3 HEURES.

Résumez en 400 mots le texte suivant.

Une tolérance de 40 mots est admise : le résumé devra être strictement compris entre 380 et 420 mots.

Les candidats doivent indiquer, sur leur copie, le nombre employés de 50 en 50 (marque dans le texte et regard dans la marge), ainsi que le total exact à la fin.

Les correcteurs tiendront compte de la présentation de la copie et de la correction de la langue.

L'usage de documents et de tout matériel électronique est interdit.

ESC

S U J E T

Le culturisme est l'art de cultiver le corps pour l'amener à ressembler à une image. Tel est le paradoxe de cette étrange activité, qui revient à engager la réalité la plus concrète, celle du corps propre, dans la voie d'une progressive déréalisation, au profit d'une image idéale de ce que ce corps devrait représenter, comme si la vérité du corps n'était pas contenue dans sa réalité. La métaphore de la « culture » témoigne de cette volonté de penser le corps selon un modèle qui fut plutôt, et de façon privilégiée, celui de l'esprit. L'esprit, « cultivé » par les arts et les sciences, s'émancipait progressivement de ses limites pour se comprendre lui-même comme valeur et comme liberté. On donnait le nom d'éducation à cette échappée belle vers l'autonomie. Le corps, lui, a toujours été tenu de rester à la place que lui assignent les multiples discours qui le prennent pour objet, et en font un objet.

L'éducation dite « physique » n'a jamais cherché à rendre au corps son autonomie, mais bien plutôt à le corseter davantage. Le corps n'est toujours éduqué que pour respecter des normes et des valeurs qui lui sont étrangères, comme si l'idée même d'émancipation ou de libération du corps paraissait d'emblée suspecte. On le voit bien lorsqu'on se mettra à parler de culture physique, puis de culturisme : le soupçon se fera dénigrement. En ne voulant voir, dans cette place nouvelle donnée au souci du corps, que la marque d'une aliénation propre à nos sociétés « matérialistes », on dissoudra le problème de la place du corps dans la culture en le rabattant sur le vieux dualisme qui dévalorise le corps par rapport à « l'âme » ou à « l'esprit », censé représenter seul l'essence de l'humain, le corps ne sortant de l'horizon animal où on le pense que pour servir les intérêts sociaux. Ainsi moquera-t-on l'inculture du culturiste, cet adorateur du corps, forcément au détriment de l'attention qu'il devrait plutôt porter à son esprit, seul objet véritable d'un culte humaniste.

Mais au fond, l'esprit cultivé fait-il autre chose que de s'adorer lui-même ? Jaloux du corps, l'esprit prend garde à ce que le corps ne soit jamais qu'un objet, à soi invisible même lorsqu'on lui tend un miroir. Est-ce le corps que l'on voit, lorsqu'on en fait l'objet de nos préoccupations hygiénistes et médicales ? Est-ce encore lui qui est désiré, lorsque l'entraînement militaire ou sportif vante la performance, l'efficacité, comme ses qualités essentielles ? La santé, les armes, la gloire des

nations vantent le corps, mais c'est un corps docile, une machine efficace, le vecteur malléable des idéologies productivistes ou des utopies politiques de la régénération. L'éducation physique des collèves, des casernes et des usines n'avait pas pour but de libérer le corps, et en rattachant l'idée du développement du corps et de ses qualités à l'accomplissement de finalités extérieures à lui, en ne faisant de lui qu'un moyen, l'éducation physique témoignait d'une aliénation *du* corps plus que d'une aliénation *au* corps.

L'idée d'une « culture physique » a signifié un affranchissement du corps dont il faut prendre la mesure. Lorsqu'Eugène Sandow, pionnier de cet art, ouvre en 1897 ses « Instituts de culture physique », et lorsqu'il fait paraître en 1904 un ouvrage intitulé *Body-building, or man in the making*, il fait plus que donner son nom à une pratique. Il tente de réconcilier le corps avec les idéaux de la culture classique, comme si la culture physique, loin d'être une alliance de mots, était pleinement adéquate à son objet : l'idéal grec. L'image à laquelle Sandow voulait ressembler est précisément celle que la culture classique a érigée en modèle : le corps grec de la statuaire antique, le canon de ses proportions, proposé comme modèle à tout sculpteur, et comme idéal esthétique à tout spectateur. Pour celui qui désire « sculpter sa propre statue », l'idéal grec de la beauté du corps sera l'image de la perfection convoitée. Être « en forme » ne signifie plus la trivialité de la bonne mine. C'est dans un sens supérieur et spirituel même que l'on veut désormais un corps « en forme », en forme d'athlète grec, de héros ou de dieu. L'entraînement qui vise à donner au corps les proportions rêvées ne s'embarrassera plus de la forme au sens vulgaire. La notion de la santé, encore présente dans l'idée de culture physique, est à peu près absente du culturisme, qui assume son idéal esthétique en plaçant au-dessus de tout la quête d'une perfection pour laquelle il faut sacrifier tout son temps et parfois sa santé.

Le culturisme est en ce sens un art du dépouillement, l'abandon volontaire d'une forme du corps rejetée comme finalement moins réelle que la forme imaginaire qui nous guide dans les mues douloureuses que l'on provoque à chaque entraînement. La culture est à la fois l'exercice, et le résultat de cet exercice, qui nous rapproche de plus en plus de ces « modèles » que nous adorons. En ce sens, le culturisme est une façon de faire disparaître, d'ensevelir sous lui-même un corps sévèrement jugé dans ce qu'il est « au naturel » : imparfait, laid, sans forme, comme le sont toutes choses qui ne sont qu'adaptées à *minima* aux besoins les plus triviaux de l'existence. Dire du culturisme qu'il est un culte du corps, c'est se tromper lourdement si l'on ne précise pas que le corps adoré est, au mieux, présent dans les statues de Polyclète comme le Christ est présent dans les icônes : sur le mode paradoxal de l'absence, l'absence de l'être désiré – notre corps – dont une image sous nos yeux excite pourtant le désir, et nous montre un accomplissement possible.

Loin de rendre au corps un culte, le culturiste est bien plutôt celui qui d'emblée le méprise sous les formes dans lesquelles il est sempiternellement donné. D'abord celle du corps inculte, indigne d'admiration, que nous héritons de la nature, de nos parents. Le culturiste n'est pas un « naturiste » : nulle valeur à ses yeux pour un simple « produit de la nature », pour le corps que « Dieu » nous aurait donné. Il refuse d'être ou de rester comme la nature l'a fait. Le culturiste est bien plutôt humilié de n'être pas autant qu'il le pourrait ce qu'il veut être : il est pour lui sans indulgence aucune et l'hypertrophie du corps ne signifie pas une boursofflure de l'ego, même si de savants théologiens parleraient ici de l'orgueil prométhéen d'une créature en révolte. Bien au contraire, le culturisme va de pair souvent avec une forme d'humilité, voire de timidité, que reconnaissent facilement ceux qui fréquentent les gymnases. L'envers de l'idéalisme est une insatisfaction qui est un

principe permanent d'inquiétude. La maniaquerie du culturiste, dans ses modes de vie programmés, ses entraînements et ses régimes, trahit cette frustration où le plonge son désir de perfection.

Cependant le culturiste refuse aussi bien l'artifice social qui consiste à cacher les imperfections de ce corps « naturel ». Il refuse le corps civilisé, socialisé, travesti par le cosmétique vulgaire qui flatte l'apparence et ne montre de la volonté que la volonté de plaire. L'idéal grec est celui de la fierté du corps dévoilé et de la méfiance envers les travestissements que lui imposent la mode et les convenances : le maquillage et le vêtement sont les sophismes du corps. Ainsi Platon dans le *Gorgias* refusait les beautés étrangères, empruntées à l'art du simulacre, et leur opposait-il la gymnastique comme *therapeia*, soin et entretien du corps lui-même, visible dans la nudité. C'est donc un contresens de s'imaginer que le culturiste cherche à plaire en montrant son corps. Il ne veut plaire avant tout qu'à lui-même. Hors des gymnases ou des concours où il croise ses pairs, le culturiste affronte plus souvent le quolibet, voire le dégoût, qu'il ne s'attire la louange. Les corps masculins à la mode, même présentés nus dans les magazines, sont sournoisement vêtus par l'imaginaire marchand relayé par les *mass media* : ils excitent ce désir de posséder propre à notre civilisation, ils ne montrent rien d'authentique. Ces corps consensuels de mannequins auxquels nous sommes conviés à nous identifier portent les valeurs du jeunisme. Or seule une pensée magique peut nous faire croire que l'on peut « rester jeune » en employant des grigris ou des poudres de perlimpinpin. Le culturiste s'en moque, qui ne vise pas la jeunesse mais l'éternité de la forme parfaite. Lui seul est authentiquement nu quand il se déshabille : la démesure de son corps est irrécupérable par un désir calibré pour la publicité. Il y a en lui du monstrueux, un défi à l'esthétique conventionnelle du corps qu'il réfute par sa seule présence. Qu'on ne doit pas appeler beau ce qui simplement plaît : cette thèse classique de la philosophie est une maxime de culturiste.

Le corps du culturiste ne se veut donc ni naturel ni sophistiqué. Ses valeurs ne sont pas celles de l'utilité (la force, la souplesse, viennent par surcroît), ni de la complaisance sociale. À quoi donc peut-il ressembler ? De quoi est-il l'image ? Lorsqu'il manifeste l'excellence qu'il pense avoir atteinte, il pose dans des concours ou des championnats, comme ceux, très relevés, de Monsieur Univers ou de Monsieur Olympia. Cette pose est une pause, une sorte d'éternité factice : l'enchaînement des gestes du *posing* soudain se fige en une figure convenue, double biceps, dorsaux, quadriceps, et le corps devient statue. Eugène Sandow affectionnait particulièrement les poses inspirées de la statuaire antique, comme celle du Gaulois mourant. Entièrement nu, le guerrier celte se meurt et l'expression de son visage est celle d'une vie fuyante saisie dans la froideur d'un marbre où il agonise éternellement. Pour le culturiste moderne, c'est la photographie plus que la statuaire qui représente le paradigme de son art. Chaque pose est un cliché. Mais il s'agit de faire éclater cette convention, de faire déborder du cadre un corps exubérant à force de perfection. Art du point de vue, de l'instantané et de la lumière, le culturisme est spéculaire, aussi bien que spectaculaire. Bien poser au moment du concours signifie s'emparer du point de vue du spectateur et le retenir par la fascination. Il s'agit d'en mettre littéralement « plein la vue », ce « plein » est celui d'un corps soudain immobile, qui déploie en un instant toutes ses puissances et sature le regard par sa mise en scène. Tous les muscles doivent être contractés et clairement visibles. Cette contraction statique ne ressemble à rien de naturel, entendons de dynamique, de lié à un mouvement, tel qu'on le voit dans la photographie d'un geste sportif. Réduit à une pure forme, le corps n'est plus qu'une figure immobile dont la surface est sculptée par la lumière.

Ce n'est pas le volume qui définit le culturisme, mais la complexité de la surface. Le volume du corps ne signifie rien s'il ne manifeste pas la machine musculaire dans son détail plus fin. Un corps gras peut être fort, massif, impressionnant, mais ce n'est pas un corps de culturiste. Le propre du culturisme c'est le corps sec, dégraissé à l'extrême. Cette confusion du muscle et de la masse était encore celle de la période pré-moderne où les Hercule de foire, les « *strongmen* », comme Sampson ou Charles Atlas, devaient impressionner d'abord par leur masse et leur force, accomplie dans des tours de cirque. La pose mettait en valeur la force, les « gros muscles » lui étant naturellement liés. La sécheresse musculaire, résultat d'un travail rigoureux d'entraînement et surtout de diététique, n'était alors qu'une qualité naturelle, et pas forcément enviée, de ceux que leur génétique disposait à une telle apparence. L'homme fort ou le colosse se devaient d'être gros, et cette fascination perdue dans certains sports comme le Sumo, le rugby, l'haltérophilie, où l'on peut être impressionné par la masse des muscles sans leur reconnaître pour autant une valeur esthétique. Or un culturiste massif mais gras est moins bon (beau ?) qu'un culturiste moins gros mais sec, qui n'a que la peau sur les muscles. Le premier est une statue mal dégrossie, mais le second met le corps à nu en révélant, par la découpe et les stries, chaque faisceau, chaque fibre. La surface du corps sculpté n'est pas superficielle : c'est l'intériorité même du corps musculaire qu'elle fait voir, et l'écorché donne une leçon d'anatomie au vulgaire, qui voit paraître des choses cachées dont il ignorait même l'existence. L'esthétique culturiste a donc pour moyens une connaissance très approfondie de l'anatomie, de la physiologie, de la diététique. L'entraînement seul est vain pour cette étape cruciale de la culture de soi. La bonne volonté de la fonte ne suffit pas pour la fonte du gras. C'est en ce sens que la culture du corps devient ici technique.

Le bodybuilding, donné comme synonyme du culturisme, trahit dans son vocable même la transformation de l'imaginaire et l'orientation technique donnée à l'art de sculpter le corps vers le milieu du vingtième siècle, par les inventeurs du culturisme moderne. Les frères Joe et Ben Weider notamment, créateurs de l'IFBB, des concours de Mr Olympia, et fondateurs également de la première compagnie de nutrition sportive en 1940, ont transformé en *business* lucratif le marché de la forme physique. Faut-il y voir le triomphe idéologique du nouvel empire américain à la fin de la Seconde Guerre mondiale, et de ses valeurs ? Cet impérialisme s'exprimera dans les arts populaires. La vogue du péplum, au cours des années cinquante, sera aussi l'âge d'or du culturisme cinématographique. Il nous a laissé quelques figures fameuses, Steve Reeves étant la plus révérée de toutes. Mais tandis qu'à l'écran l'idéal grec revit dans la parodie, nul doute que le spectateur ne soit invité à reconnaître dans les gladiateurs ou les Hercule de l'écran la race des nouveaux seigneurs qui imposèrent la *Pax Americana* et les valeurs techniques de leur mode de vie.

A cet égard, le corps du culturiste est bien une création américaine. Il s'agit de le construire, comme on construit une maison, un pont, une autoroute. À la sculpture qui fait songer à la patience de l'art, on peut opposer l'impatience de l'ingénierie moderne, qui fait des plans, utilise des techniques précises, dispose de matériaux *high-tech*, et vise le monumental comme symbole de sa puissance. Dans ce chantier, le maçon est rarement le maître d'œuvre, mais bien plutôt la petite main prolétaire d'une industrie, d'un business qui tourne avec ses concours, ses écuries de champions, ses hauts lieux, ses gourous, ses médecins, ses substances plus ou moins licites. Il faut des résultats, et vite. On s'éloigne de plus en plus de la sobriété d'un corps volontiers asocial, travaillé « à l'ancienne », aux pompes à une main, aux haltères et au blanc d'œuf. Le corps massif et sec des culturistes modernes en

devient suspect. Symbole d'une société qui serait, comme lui, suractive, puissante et « dégraissée » de ses éléments inutiles, il perd beaucoup de son côté subversif. Il rejoint la norme puritaine, ascétique, qui impose au monde sa « valeur travail » et nous soumet à ses injonctions contradictoires : surconsommer, mais sans jamais devenir gras, ce qui ne manque pas de produire un lot non négligeable de névrosés anorexiques ou obèses. Le culturiste se retrouve, bon gré mal gré, porte-drapeau des valeurs démoralisantes du paternalisme hygiéniste et bourgeois de notre triste siècle : travaillez, soyez productifs, dépassez-vous, traquez le bourrelet et le capiton, signe de laisser-aller, et n'oubliez pas de manger cinq fruits et légumes par jour. Et ne vous droquez pas, évidemment.

Loin du combat solitaire contre soi, symbolisé au cinéma par la figure du premier Rocky, *looser* magnifique cherchant sa rédemption, le culturisme est toujours menacé d'être récupéré comme un pur *look*. Quelques figures mythiques, comme Arnold Schwarzenegger, l'ont popularisé grâce à leur éclatante réussite sociale. Ils l'ont fait sortir du ghetto en donnant au mythe américain du *selfmade man* la figure concrète du *bodybuilder*, qui s'y prête éminemment. De modèle moral humiliant la faiblesse des formes incultes du corps vulgaire, l'esthétique « cultos » a fini par devenir elle-même une mode, vendue comme telle par les « professionnels de la forme » qui promettent un nouveau corps prêt-à-porter rapidement et sans effort, par la magie de telle machine ou de telle boisson protéinée. Elle s'est répandue jusque dans l'industrie du porno, où elle a influencé une norme des corps travaillés à l'excès par un souci de l'apparence qui n'en finit pas de trahir l'idéal grec. Car cet idéal n'a jamais été celui d'une image sans profondeur, mais d'une image porteuse d'une valeur abstraite, une sorte d'épiphanie de la volonté, de l'effort, de la beauté comme promesse. L'idée, ou le fantasme, du « corps grec », paraît alors renvoyée à sa vacuité par le plein même de l'apparence. Ces corps épilés, parfois artificiellement bronzés, huilés, idéalement placés sous des projecteurs, évoluant en musique devant une salle vociférante, beaux comme l'antique, ne sont-ils pas le triomphe final de l'apparence, d'une autre cosmétique ? Qu'est-ce donc finalement qui se cache sous le *show* donné par ces corps un peu trop grecs pour être honnêtes ?

La société se venge à leur insu de ces superbes misanthropes. Des valeurs sociales ambiguës prennent corps en chassant les valeurs idéales et naïves du culturiste. Et pourtant rien ne saurait le dissuader de s'exercer durement et de demander à son miroir comme la reine du conte « qui est le plus beau ? ». Peut-être le culturisme n'est-il rien d'autre qu'une manière de raconter sans parler un impossible amour de soi. Le narcissisme, voire l'autoérotisme, d'un corps qui ne s'aime qu'au miroir, a pour envers la déception de soi que nous évoquons en parlant de l'insatisfaction perpétuelle du culturiste. Peut-être cette insatisfaction signale-t-elle autre chose qu'un perfectionnisme d'esthète. Le corps du culturiste est le récit d'un rendez-vous manqué avec sa propre identité, d'un impossible amour de soi reporté sur une image. Un corps proposé comme valeur en soi s'offre en réalité comme objet de désir. La suraffirmation de l'identité d'un genre – le masculin – à travers ses signes les plus visibles – les muscles proéminents – contredit moins l'orientation implicitement homosexuelle du désir qu'elle ne la souligne. C'est bien un masculin que l'on voudrait éternel qui fait ici l'objet du regard amoureux. Même si tout avoué reste interdit, et même contredit par ce masculin hyperbolique, la confession des corps et des regards est aussi ambiguë que cette exhibition de « l'homme ». Les *coming out* de *bodybuilders* – on se souvient du cas de Bob Paris – sont toujours suivis de réactions violentes du milieu. Malheur à celui par qui le scandale arrive : « l'idéal grec » a ses limites.

Le culturiste serait-il, finalement, prisonnier d'une image ? C'est de l'intérieur qu'il élargit sans cesse les murs de sa prison de chair, comme si l'hypertrophie était une façon de ne plus habiter un corps, mais de le repousser sans cesse. Signe paradoxalement éclatant d'un ego qui voudrait disparaître derrière, le corps du culturiste est suspect de n'être qu'une maison vide. Ici la *mens sana* rappelle au *corpore sano* un devoir élémentaire d'équilibre : l'activité physique doit aller de pair avec l'exercice spirituel sous peine que la belle image du corps ne soit l'image de personne.

Pascal TARANTO, « Le culturisme ou l'impossible image de Soi », in *Hercules de toujours. Construction et culte du corps dans les sociétés antiques et modernes*, Nantes, Editions Nouvelles Cécile Defaut, 2013.

CORRIGÉ

Par Françoise Détharré, professeur agrégé de lettres modernes.

Il y a quelque chose de singulier à vouloir cultiver son corps, à vouloir l'affranchir de sa matérialité première, tout comme on amène son esprit à s'épanouir pour construire son indépendance. La traditionnelle réification du corps demeure en effet prégnante, le développement physique, qu'on n'imagine que/(50) coercitif, est considéré, au pire, incompatible avec le développement intellectuel, au mieux, devant lui être inféodé. Même si on préconise hygiène et vigueur corporelle, c'est pour qu'elles participent à la réussite d'un système socio-économique.

Eugène Sandow a forgé, à la fin du dix-neuvième siècle, le terme/(100) significatif de « body-building ». Posant la statuaria grecque en étalon, il a assigné comme objectif au culturiste non la santé mais la perfection esthétique. Méprisé, le corps naturel doit être remodelé selon une extrême exigence, d'autant plus vouée à l'inassouvissement qu'aucun auxiliaire de beauté n'est toléré/(150), la nudité étant jugée seule probante. Au demeurant, le culturiste ne séduit pas, il diffère trop des icônes de la mode, sacralisant la jeunesse.

Lorsqu'il se mesure à ses pairs, il exécute, dans une constante surenchère, des figures imposées dont chacune tient de l'arrêt sur image et cherche/(200) à capter lumière et focalisation des regards. Pour ce faire, la musculature est travaillée et le kilo inutile traqué : l'obésité du sumotori représente une hérésie puisqu'elle dissimule son anatomie. Cette conception éminemment techniciste du culturisme a pris son essor au milieu du vingtième siècle. Reconnue source de profits/(250), elle a répandu, aidée par Hollywood, le standard américain de l'homme fort, incarnation des valeurs et des injonctions comportementales du capitalisme triomphant. Austerité, contrôle de soi, efficacité technique et managériale, telles sont les clés de la réussite, pathogènes pour qui échoue à les mettre en œuvre.

Le succès d'/(300)un Arnold Schwarzenegger a tiré le culturisme du côté du phénomène de mode. Otant au paraître esthétisant sa fonction de dévoilement de l'être ; croyant pouvoir substituer produits et méthodes miracles à l'entraînement ingrat, ce nouveau culte du corps réduit la statuaria grecque à une pseudo-référence gratifiante. L'authentique/(350) culturiste persiste, lui, dans son exigence, s'efforce d'enfin accepter son reflet, dans la quête d'un idéal viril touchant au désir homosexuel. S'avouer gay relève pourtant du tabou et, à force de chercher à dépasser ses limites en dépassant celles de son corps, le culturiste s'expose/(400) à sembler sonner creux, tant, subséquemment, son esprit semble atrophié.

(410 mots)

ESC

CORRIGÉ

SCIENT. ECO. TECHNO. KHÂGNE

RÉSUMÉ DE TEXTE

RÉSUMÉ DE TEXTE

DURÉE : 3 HEURES.

Résumez en QUATRE CENTS MOTS plus ou moins 5 % (soit 380 - 420 mots), le texte suivant, en vous attachant à mettre en valeur les idées essentielles et les articulations de la pensée de l'auteur.

Mentionnez le décompte par 50 mots et, en fin de copie, reportez le nombre de mots utilisés.

Cet exercice doit rester impersonnel dans le fond comme dans la forme, et respecter STRICTEMENT les limites imposées.

La copie doit être entièrement rédigée : la correction et la clarté de la langue entrent pour une part dans l'appréciation du correcteur.

Il n'est fait usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

SUJET

Sans doute l'art, depuis longtemps, a cessé d'être le lieu d'un savoir comme il l'était à la Renaissance, champ privilégié, par exemple à travers l'exercice de la perspective ou des proportions du corps humain, d'une *mathesis universalis*. Il n'est plus non plus le lieu où s'unissaient le *doctus* et le *dilectus*, connaissance intellectuelle et plaisir des sens. La science, comme questionnement du faux et du vrai, épreuve de l'erreur et de la vérité, l'a déserté pour constituer et pour inquiéter d'autres champs de l'activité humaine.

La critique que fait Karl Popper de l'art au nom de la science ne serait donc pas pertinente, qui refuse de voir dans l'art contemporain une spécificité expressive, construite à l'écart des questions de vrai ou de faux dans le langage. Ce qui amènerait cette critique, ce serait la nostalgie du temps où l'exercice de l'art était encore soumis à une conception instrumentale qui permettait de choisir les moyens en fonction de la fin poursuivie et supposait donc la maîtrise et le respect de règles explicites, incluant le problème de l'erreur et de la vérité.

C'est la même nostalgie de cette conception rationnelle de l'art qui habite Ernst Gombrich lorsque, au détour d'un entretien, il se laisse aller à confier son malaise : « Les progrès de la science moderne sont si étonnants que je me sens un peu gêné lorsque je vois mes collègues à l'université discuter des codes génétiques, alors que les historiens d'art discutent le fait que Duchamp a envoyé un urinoir à une exposition. Réfléchissez à la différence de niveau intellectuel, ce n'est vraiment pas possible ». Le *territorium artis*¹ ; qui se nourrissait jadis de la confluence de tous les savoirs, s'est réduit, en effet, à n'être plus qu'une peau de chagrin. Les enjeux intellectuels et épistémologiques mais aussi les grandes questions métaphysiques de notre époque, c'est dans la physique, dans la biologie qu'on les rencontre, non plus dans la pratique erratique des ateliers. Ce n'est plus dans les musées d'art contemporain ni dans les galeries qu'on peut mesurer les grandes révolutions formelles de notre temps, mais dans des laboratoires et des ateliers où des techniques nouvelles de fabrication d'images se développent, qui ont pris la relève des

1. *territorium artis* : territoire de l'art

grands problèmes que l'art de peindre savait encore se poser et résoudre au siècle dernier, et dans une fièvre créatrice qui rappelle ce que fut l'activité des *botteghe*². Pour ne prendre qu'un seul exemple, celui du développement de l'image virtuelle, on peut penser qu'il s'agit là, dans l'ordre de la vision, conçue comme réflexion et maîtrise dans l'art de représenter le monde sensible, d'une révolution comparable à ce que fut l'invention de la perspective scientifique au temps de Dürer et de Pélerin Viator. Elle la poursuit et la parachève. [...]

On ne peut oublier que Gombrich, comme Popper, tous deux des néo-kantiens, dans leur commune méfiance de certains aspects de l'art contemporain, de la doctrine expressionniste en particulier, reflètent les idées philosophiques du cercle de Vienne dont ils sont tous les deux issus, qui soumettait le langage au tribunal de la science. Le dépassement de la métaphysique que le positivisme viennois prétendait opérer par l'analyse logique du langage, selon les mots de Carnap, c'était d'abord la mise en question des « conceptions du monde » à l'allemande, d'ascendance romantique, et dont ils avaient mesuré, en effet, le péril lorsque celles-ci avaient été utilisées en politique, détournées, et perverties, aux fins que l'on sait, par exemple en invoquant le *Volksgeist*, l'« âme du peuple » sur un mode quasi matériel. C'est contre ces énoncés, qui sont des « pseudo-propositions » portant sur des « pseudo-objets », qu'ils rappelaient la nécessité de fonder une langue respectant la légalité logique qui préside à la formation de propositions « douées de sens », c'est-à-dire vérifiables et observables, comme il en est des propositions scientifiques.

Peut-on pour autant se contenter d'une langue dont la seule qualité serait une *efficiency* à l'américaine, où la science tiendrait place d'autorité absolue là où jadis se tenaient Dieu ou la Nature ? C'est dans le monde anglo-saxon, en effet, à partir de 1930, que l'empirisme logique trouvera son terrain d'application et, après 1940, son triomphe. S'y constitua, par l'entremise des sciences sociales et humaines, une sorte de programme de planification des actions et de rationalisation des décisions qui répondait, sur le plan pratique, au rêve théorique de fonder une langue universelle dont les énoncés fussent aussi rigoureux et logiques que ceux des mathématiques. Carnap, dans sa jeunesse, ne s'était-il pas passionné pour l'espéranto ? Une grande part de l'abstraction géométrique à la fin des années vingt naîtra et se développera à partir de ces spéculations sur une langue universelle accessible au plus grand nombre. Les formes humaines simplifiées de Peter Alma et de Gerd Arntz, qu'ils utiliseront dans l'imagerie statistique imaginée par Carnap pour représenter des processus politiques et économiques, annoncent le vocabulaire pictographique de figurines et d'homoncules pris dans diverses situations qu'on utilise de nos jours dans les lieux publics à travers le monde, aéroports, écoles, etc., pour signaler internationalement une interdiction, un danger ou un usage. Utilisées aussi par les peintres du « Progressive Kunst » comme Hoerle et Seiwert, elles ouvriront la voie à l'abstraction sérielle ou géométrique d'un Richard Paul Lohse, d'un Morellet, d'un Gottfried Honegger.

C'est du langage cependant, ne vouloir considérer que la seule fonction cognitive. Dans ce procès fait au romantisme allemand et à son rejeton ultime, l'expressionnisme, Carnap lui-même devait finalement reconnaître que les énoncés « comme ceux de la poésie, peuvent avoir une fonction « émotive », ou « expressive », qu'ils expriment aussi le « sentiment de la vie », le sens du cosmique, de l'infini, de l'éternité, de l'au-delà... ».

C'est à un double écueil, finalement, que l'art en cette fin de siècle se heurterait. D'un côté, celui d'un expressionnisme abâtardi et devenu, d'est en ouest, une sorte d'argot universel, révélant cependant à l'occasion, et particulièrement dans

2. *botteghe* : ateliers d'artistes

son pays d'origine, comme on l'a vu, des réminiscences nationalistes inquiétantes. D'un autre côté, celui de la domination d'une langue universelle et abstraite, garantie par la logique d'une « science unifiée » correspondant à l'emprise planétaire du monde technique et visant une rationalisation intégrale de l'existence.

Expressionnisme, idiotisme exaltant le sol originel, le *Volksgeist* dont Renan avait dit qu'il était à ses yeux « l'explosif le plus puissant des Temps modernes », langue puisant au fonds obscur de l'être et ouvrant sur l'infini, comme il en est du néo-expressionnisme allemand, mais au péril d'un irrationalisme toujours renaissant et dont on a vu les fruits désastreux ? Ou bien *Weltsprache*, langue universelle, susceptible dans l'esprit de ses promoteurs, on l'a vu, d'abolir les frontières nationales et d'assurer la concorde entre les peuples par une communication sans parasite, mais alors langue abstraite formalisée, uniformisée, expurgée, comme il en fut de l'art américain des années soixante-quatre-vingt, de toute dimension subjective et affective ?

Comment concilier l'attachement au vernaculaire, sans lequel l'œuvre perd sa chair et son poids de témoignage unique, et le projet de l'universel, par lequel l'œuvre s'adresse à l'ensemble de l'humanité ? Comment inventer un art qui ne soit ni l'expression du local et l'exaltation sournoise du nationalisme, ni la menace d'une unification, d'une « globalisation », comme on dit aujourd'hui, de l'ensemble des cultures de la planète ?

Pourtant, on parle toujours de la justesse d'un ton comme on parle de la justesse d'un mot, de la finesse d'un trait comme de la finesse d'une analyse, de l'élégance d'une composition comme de l'élégance d'une solution mathématique. Cette justesse de la sensibilité rejoint ici ce que plus haut j'appelais la justice du style. Beauté et morale s'y confondent. L'œil exerce aujourd'hui comme hier son pouvoir de discrimination comme l'oreille distingue en musique un son faux d'un son vrai : sa capacité diacritique est même étonnante, mise en alerte par la plus infime variation de couleur, de forme ou d'éclairage. Le goût, le *gustus*, s'éprouve à partir de la plus petite quantité possible de l'objet goûté, de la prise la plus légère, de l'échantillon minimum, comme un prélèvement de laboratoire soumis par le chercheur aux analyses les plus fines. Il est épreuve, essai, expertise, une distinction autant qu'il est une dégustation. Le goût réunit ainsi la saveur du sensible et la vérité de l'intelligible, qui démêle le juste et le faux. La raison vient ensuite, pour articuler entre eux ces différents affects, les subordonner, en édifier enfin, par la syntaxe, l'admirable et juste architecture. N'est-ce pas Proust, s'agissant de la sensation la plus intime et la plus fugitive, la plus impalpable, la plus immatérielle aussi, le goût du parfum et des odeurs, qui évoquait quelque chose de solide comme le palais de Kublāi Khan, « l'édifice immense du souvenir » ? Il y a une logique des propositions du goût comme il y a une logique des énoncés dans la langue. C'est cela que Broch avait nommé le style.

L'art serait donc toujours *logos*, comme au temps de son plus haut accomplissement, fidèle à son étymologie, ce *leg* – commun au grec et au latin –, dont le sens originel est « rassembler, cueillir, choisir », qui évoque donc à la fois l'idée de lier, d'unir, comme, inséparable d'elle, l'idée de prélever, de distinguer. Le goût comme *logos* « lie », rallie, accorde, comme on le dit pour un instrument, savoir et sensation, prélève et soupèse en même temps qu'il effleure et goûte la substance des choses. Le vocabulaire logique de l'erreur et de la vérité rejoint là celui de l'esthétique : *eligere* et *intelligere*, choisir et comprendre, prendre, réunir, mettre ensemble, confondre donc et, en même temps, distinguer, choisir, élire. La diction du savoir en tant qu'il est prédiction du vrai et la dilection du voir, en tant qu'elle est prédilection du sens, se fondent ici dans un phénomène étrangement semblable à

celui qui nous permet, dans l'infinie et vertigineuse diversité des visages humains, de distinguer immédiatement celui-ci de celui-là.

Or, ce phénomène de connaissance, qui est du même coup reconnaissance d'un *principium individuationis*³ et qui est la source de toute morale et la parade à toute terreur, il est non seulement le processus logique d'une représentation mentale, d'une compréhension qui s'opère à travers une multiplicité de signes distinctifs, il est d'abord un mouvement éthique. C'est le geste de gratitude envers celui à qui on fait preuve de sa « reconnaissance », dans ce double élan que contient le fait d'identifier, c'est-à-dire de distinguer un être de la multitude, de le soustraire à l'anonymat, mais aussi de se réjouir de sa présence et de saluer sa singularité d'autrui, de le distinguer là encore. La justesse du *logos* rejoint ici – « comprendre » – le problème de la justice. « Si le face-à-face fonde le langage, dit Lévinas, si le visage apporte la première signification, instaure la signification même dans l'être –, le langage ne sert pas seulement la raison, mais est la raison. »

Les critiques contre l'expressionnisme que nous avons analysées, au nom du marxisme ou du positivisme logique, n'ont toujours été prononcées que sous l'exigence du politique. Elles laissent cependant dans l'ombre non seulement la question de l'éthique, mais celle encore de la morale. L'empirisme qui assoit la véracité de ses énoncés sur l'autorité de la science laisse ainsi de côté, en dépit de ses efforts pour fonder une déontologie logique, la question que la vie des êtres humains suppose des règles, des valeurs, des normes qui ne ressortissent pas à une simple « science des comportements », si sophistiquée soit-elle. Le problème logique de l'erreur et de la vérité ne recoupe pas le partage moral du juste et de l'injuste. C'est ici que l'art, sans doute, dans son irréductibilité, mais aussi dans son enjeu humain, « émotif », rejoint la morale, et trouve peut-être son salut. [...]

Le langage de l'artiste n'est pas, comme l'ont voulu trop souvent les doctrines de la modernité, l'expression violente, immédiate et idiote d'un moi « profond ». Mais il n'est pas non plus l'exercice régulé de la raison scientifique selon l'enchaînement d'énoncés logiques et vérifiables. Nous ne gouvernons pas le langage, nous ne le plions pas à notre loi, à la façon dont le dictateur dicte ses mots, c'est le langage qui nous mène et nous oblige, c'est nous qui nous plions à sa loi. Faut-il rappeler que l'année 1929, quand paraît le manifeste du cercle de Vienne, sous le titre de *La Conception scientifique du monde*, est celle où Freud publie *Malaise dans la civilisation* ? À l'utopie scientifique, à la chimère optimiste du premier texte répondait le scepticisme inquiet du second, qui savait plutôt du langage, la meilleure et la pire des choses, les chausse-trapes et les pouvoirs à la fois merveilleux et inquiétants. Ni ni, par conséquent. Ni expressionnisme ni formalisme. Ni abandon aux pulsions d'un déraisonnement ni soumission à une rationalité. Si l'art contemporain suscite aujourd'hui tant de polémiques, n'est-ce pas que le public, si peu informé soit-il de son développement, devine en lui la forme exemplaire de la dérive dont la langue commune est la proie ? Au professeur qui fait remarquer à l'étudiant que sa copie d'examen est incompréhensible, tant son expression est désarticulée, ce dernier rétorque, étonné, et presque indigné : « Mais moi, je me suis compris ! » Remarquable dans la protestation, c'est moins ce qui s'y révèle de la montée d'un idiomatisme qui va jusqu'à l'idiotie et de la réduction de la langue à la parataxie, c'est désormais que cette singularité morbide est revendiquée comme expression de la liberté individuelle. Le « Je veux dire ... », cette ritournelle qui truffe aujourd'hui le moindre énoncé oral de nos contemporains, sonne comme la revendication coléreuse de l'enfant qui, ne sachant encore parler, se refuse néanmoins à apprendre.

3. *principium individuationis* : principe d'individuation

Beaucoup d'artistes, au xx^e siècle, ont récusé la terreur du modernisme, ne se réclamant d'aucun des mouvements qui ont scandé son cours. Revenus de la fausse *koinè* de l'abstraction et de sa prétention à dire l'universel. Mais revenus aussi de l'idiotisme expressionniste, méfiants de sa négligence et de sa désinvolture, à entendre par ces deux mots leur sens exact. Le premier comme ce qui délie le *logos* de son *leg* originel pour l'abandonner à l'indifférence du *negligere*. Le second, comme le mouvement de mépris, le geste de désinvolture, au sens latin du terme, qui se détourne du face à face, du *vultus*, du « voutl » sacré par lequel l'homme affirme sa relation à la transcendance. Fidèles au visage, reliés, ralliés au vis-à-vis humain, sans y porter atteinte, sans le meurtrir, l'avilir ni le récuser, de Picasso, obstinément attaché à dire le réel et refusant le saut dans l'abstraction, à Beckmann qui, jusque dans l'exil américain, portait témoignage du destin allemand, de Bonnard à Balthus, de Spencer à Freud, de Hopper à Giacometti, de Music à Arikha, ils auront obéi à la parole que Martin Buber, l'héritier d'une anthropologie éthique, a un jour résumée comme antidote à la terreur de notre temps : « Celui-là seul qui connaît la relation et la présence du Tu est apte à prendre une décision. Celui qui prend une décision est libre parce qu'il s'est présenté devant la Face. »

Peut-on se présenter devant la Face ? Le face à face de la créature dont parle Lévinas en quoi se fonde l'origine du langage est-il jamais possible ?

Vico avait vu dans la foudre le premier étonnement des hommes. Elle aurait fait naître l'interjection, adressée à Jupiter, de ce son « pa » primordial qui aurait été, redoublé, le titre même attribué à Jupiter, « père des hommes et des dieux ». C'est là fonder l'origine de la langue dans le mystère des théophanies. Éclair et tonnerre et, dans l'espace qui sépare la foudre qui aveugle du tonnerre qui assourdit, dans le passage de l'œil à l'oreille et du regard au mot, la question et la réponse, le premier hiéroglyphe du divin et la manifestation du *logos* : nous sommes au moment premier de la rencontre entre l'homme et la divinité.

Le tonnerre et la foudre nous avertissent de la présence des dieux. Car, dans la tradition d'Athènes comme dans la tradition de Jérusalem, dans le monothéisme comme dans le polythéisme, ils ne peuvent être ni regardés ni nommés. Mais le nom de la divinité est imprononçable. « Zeus, quel que soit son nom, si celui-ci l'agrée, c'est celui dont je l'appelle », dit le chœur dans l'*Agamemnon* d'Eschyle. Dans la tradition juive, Dieu est le Tétragramme, YHWH, qui ne saurait être proféré sauf une fois par an quand le grand prêtre est admis à pénétrer dans le saint des saints, au moment du kippour. Dans la tradition de l'islam, si le fidèle récite sur son chapelet les quatre-vingt-dix-neuf noms d'Allah, qui sont les attributs de sa puissance, il se garde bien de proférer le centième, qui est indicible.

De même le vis-à-vis du Dieu et de sa créature n'est pas autorisé car le visage de Dieu rayonne d'un éclat insoutenable à l'œil humain. « On soutient mal la vue des dieux qui se montrent en pleine lumière », dit Héra à propos d'Achille quand il se risque à apercevoir les dieux au moment du combat. L'éclat insoutenable des dieux rappelle la blanche brillance de l'éclair et frappe de terreur qui s'y trouve exposé. « Il y eut sur la montagne des tonnerres, des éclairs, une épaisse nuée, accompagnés d'un puissant son de trompe, et, dans le camp, tout le monde trembla [...]. Yahvé y était descendu sous forme de feu. » [...]

Mais les dieux peuvent aussi, pour se manifester aux humains, prendre une apparence humaine et nous offrir un visage. Quand Poséidon, surgi de la mer, s'approche des deux Ajax, il revêt la stature et la voix du devin Chalcas. Entre l'homme et son dieu, il y a l'intercession bienheureuse d'une image – figure qui, tout en portant témoignage de la ressemblance humaine, retient en elle quelque chose du pouvoir absolu de la divinité.

Dieu, dit la Genèse, a créé l'homme « à son image ». Les humains sont les « enfants de Dieu ». Pour que le Dieu archaïque de l'Ancien Testament acquière figure humaine, il y faudra cependant, dans la religion chrétienne, ce sacrifice qui fait de lui le Père d'un homme singulier, Fils monogète, une *personne* par laquelle affirmer sa puissance et sa miséricorde, mais encore un nom par lequel l'appeler. Dans ce dogme nouveau de l'incarnation, les théophanies de l'Ancien Testament continueront cependant d'être évoquées pour prouver la volonté de Dieu de faire appréhender sa présence dans un corps d'homme. Le privilège du « face à face », cette expérience première qui fonde le langage, se situe aussi dans cette longue querelle de la représentation et des images dont notre culture semble aujourd'hui avoir oublié l'enjeu, qui a fondé l'individuation humaine, et qui impose les règles de son respect.

Nous avons un corps et, parce que ce corps est individuel, c'est-à-dire qu'il ne peut être, en effet, divisé, il possède un nom et il possède un visage, il a son identité. Comme Alkinoos le rappelle à Ulysse en l'invitant à dire qui il est : « Jamais on ne vit qu'un homme fût sans nom ; qu'on fût noble ou vilain, chacun en reçoit un, le jour de sa naissance ; aux enfants sitôt nés, c'est le don des parents. » De même le visage est ce qui distingue un sujet de tout autre de ses semblables.

Dans les premiers moments de son arrivée à Auschwitz, Primo Levi, sous le choc de ce qu'il voit, se prend tout d'un coup à songer au vers de Dante, que hurlent les démons à l'endroit du damné : « *Qui non ha luogo il Santo Volto.* » Ici, ce n'est pas la place de la Face, du Visage, du face à face de soi avec autrui. [...]

« *Qui non ha luogo il Santo Volto* » : la personne, ici, n'a pas sa place. Autrui s'est aboli. Et, avec le sentiment d'autrui, le sentiment de sa propre existence. Fantôme parmi les fantômes, larve parmi les larves, ce que Primo Levi découvre dans le camp, c'est, en effet, non seulement un monde à l'envers, mais une théologie inverse où, retirés de la communauté des hommes au nom de la Race, les « sous-hommes » réduits à un numéro matricule ont été privés de leur nom mais aussi, sous le masque uniforme de la faim et de la souffrance, devenus des « musulmans »⁴, des « hommes sans visage », ont été privés de face.

« Alors, pour la première fois, nous nous apercevons que notre langue manque de mots ... » Quelle a été une fois encore la responsabilité de la modernité, fruit pervers du romantisme et perverti par le nazisme, dans cette théodicée du Mal qui, de l'homme, fait perdre la face, anéantit le nom et rend la parole impuissante ? La double épigraphe et les deux noms d'Hermann Broch et d'Emmanuel Lévinas sous lesquels nous avons placé cet essai nous rappellent à la double origine et à la double exigence de sens auxquelles l'art est soumis. De l'éclair aveuglant qui signale à nos yeux la présence d'un Dieu, il a tiré forme et style, au sens de Broch, cette justesse de la parole qui est justice des formes et qui s'appelle, dans la tradition d'Athènes, le *logos*. Du tonnerre divin, il a tiré le chant et la mémoire du son, le souffle et le rythme. Mais le *logos*, c'est aussi l'exigence de l'éthique individuelle, comme la Loi de l'Ancien Testament, dans la tradition de Jérusalem, c'est l'exigence de la morale que fonde le vis-à-vis premier de l'homme et de son semblable, « le face à face originel du langage », C'est dans cette double source de l'écriture, là selon l'épopée et la tragédie antiques, ici selon la généalogie et le prophétisme du Sinaï, que prend racine notre culture, langage et écriture, raison et style, face à face et respect d'autrui.

Ce que j'ai appelé plus haut la désinvolture, on pourrait aussi l'appeler le dévisagement, cet arrachement du sens. Meurtrier, il est, au sens propre du terme,

4. « musulmans » : le terme désigne, dans le langage des camps de concentration et d'extermination, ceux qui ont cessé de lutter, les « hommes en voie de désintégration » (Primo Levi) s'en remettant au fatalisme que l'on associait à l'islam.

diabolique, qui divise l'individu, qui lui retire le nom et le visage là où le sens et l'exigence du sens rassemblaient.

Le rôle le plus haut de l'art a toujours été d'appeler les êtres et les choses, de les appeler par leur nom, de les appeler précisément mot à mot comme on dit face à face. Justesse de la parole et de l'image qui est de les rappeler à nous, de les nommer et de les tourner vers nous, toutes les choses, « jusqu'aux animaux mêmes », selon le mot admirable de Rimbaud.

Jean Clair,

La Responsabilité de l'artiste, les avant-gardes entre terreur et raison,
Gallimard, 1997, pp. 124-141

CORRIGÉ

Par Jean-François Bréchet, professeur de lettres classiques.

La société ne reconnaît l'art, ni comme espace de savoir, ni comme relation entre intellectualisme et sensualité. Popper regrette le temps où respecter les règles séparait erreur et vérité ; Gombrich, dénonçant la vacuité intellectuelle des spécialistes débattant de l'art, le rejoint. Les révolutions artistiques sont là où s'/(50) élaborent les images nouvelles.

Ils appartiennent à l'école de Vienne utilisant le positivisme pour dénoncer la vision romantique allemande du monde. Mais, l'efficacité des langues anglo-saxonnes, visant à supplanter Dieu et Nature par la science, est-elle satisfaisante ? L'abstraction, tant graphique que musicale, critiquant le romantisme/(100) allemand, nie la charge émotive du langage. Apparaissent deux écueils : un jargon expressionniste universel, à relent nationaliste, et la mainmise d'une langue abstraite, scientifique, visant l'universel du fait de l'absence d'affects. Comment rapprocher deux notions inconciliables : le local et l'universel ?

La raison structure un discours /(150) sur la qualité ou la médiocrité de ce que perçoivent les sens. L'art permet de réunir, de distinguer savoir et sensation dans un discours discriminant vérité et erreur, proche de l'esthétique. Reconnaître un visage, signifier la joie procurée, relèvent de l'éthique, donc de la justice. La critique, /(200) nécessairement politique, de l'expressionnisme néglige la soumission de la vie à des normes, au-delà du béhaviorisme ; là est le lien probable entre art et morale.

Le langage soumet à sa loi et les querelles, liées à l'art contemporain, relèvent de la perception, par le public, de la dérive/(250) de la langue qui prône une originalité mortifère comme expression de la liberté. Les artistes du xx^e siècle sont revenus de toutes les formes d'abstraction qui nient l'apport du logos et de l'expressionnisme qui oublie le rôle du visage affirmant la transcendance.

Pour Vico, foudre et tonnerre/(300) affirment la présence de la divinité : ni on prononce son nom, ni on soutient son regard ; mais, une représentation humaine est possible. De plus, l'homme créé à l'image de Dieu génère une querelle sur la place de cette dernière, à l'origine du respect d'autrui qui existe/(350) par la singularité de son visage ; réalité, niée à Auschwitz, selon Lévi, réduit à un matricule.

A l'origine de l'art, la présence de Dieu génère forme et style, devenus logos à Athènes ; le tonnerre, son et rythme. Le logos engendre l'éthique individuelle qui fonde notre culture et /(400) expression, respectueuses d'autrui. L'art nomme, nécessairement, objets et êtres en les orientant vers nous.

416 mots

HEC

CORRIGÉ

SCIENT. ECO. TECHNO. KHÂGNE

RÉSUMÉ DE TEXTE

LV1 - ANGLAIS

DURÉE : 4 HEURES.

(La note sur 80 sera divisée par 4 pour obtenir la note sur 20, les deux chiffres après la virgule arrondis au dixième supérieur.)

Les candidats ne sont pas autorisés à modifier le choix de la première langue dans laquelle ils doivent composer. Tout manquement à la règle sera assimilé à une tentative de fraude.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document, dictionnaire ou lexique ; sauf en latin pour lequel un dictionnaire Latin-Français est autorisé ; l'utilisation de toute calculatrice ou de tout matériel électronique est interdite.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

SUJET

DON'T LOOT DETROIT'S ART MUSEUM TO PAY THE CITY'S CREDITORS

- 1 On Tuesday a federal judge ruled that Detroit was eligible to enter Chapter 9 bankruptcy – the largest municipal bankruptcy in American history. That same day, we got a price tag for how much the collection of the threatened Detroit Institute of Arts (DIA), one of the country's oldest and best museums, is likely worth. DIA has been
- 5 under threat for months since Kevyn Orr, the emergency manager appointed by Michigan governor Rick Snyder, insisted that everything in Detroit is “on the table”. For months, salivating creditors have circled the museum while the institution has tried to keep them at bay. Now, for better and for worse, we have a price tag.

In a five-page letter to Orr, the auction house Christie's appraised the works of the

10 DIA collection that the city bought at \$452m to \$886m. It's significantly lower than the \$2bn figure batted around this summer. More than that, it disguises the fact that a few masterpieces now on public view, among them Pieter Bruegel the Elder's Wedding Dance and Matisse's The Window, account for as much as 75% of that estimate; selling forgotten pictures in the basement is not going to have an impact.

- 15 The pitifully simplistic justification for looting the DIA goes like this: Detroit owes money. Detroit owns pricey paintings. [...]Therefore, Detroit should sell up to pay its creditors.

Contained within that malign logic, though, is a morass of assumptions, mistakes, and flat-out lies. Most of the paintings in the collection are tied up in legal agree-

20 ments that make deaccessioning impossible. A fire sale of dozens of major art works would also likely cause a depressed market; even in these go-go times for the art market, there are limits. Then there are the costs. Even a small sale, in fact, would have immense ramifications. Putting just a handful of artworks on the block

would lead to a mass exodus of philanthropic donors, who would be justifiably unwilling to throw money towards an institution that can't guarantee the preservation of art in perpetuity. It would also wipe out around \$22m in tax revenue DIA has enjoyed since three Michigan counties voted last year to support the museum through a property levy.

This is not to mention the regulations governing American museums, which expressly forbid the sale of artworks for any reason other than to acquire other artworks. Or the UNESCO treaties such a sale would violate. Or the opinion issued this summer by the Michigan attorney general, which explicitly stated that such a sale would contravene the law. This is not even to mention the insanity of treating artworks in the public trust as mere assets.

35 Even putting ail that aside: on the barest economic level, raiding the museum will have no meaningful impact on the city's bottom line. Detroit has \$18bn in debt. More than 100,000 creditors have swamped the city. The Chapter 9 process begun this week means that the city can renegotiate all of its contracts – a process that need not lead to pension cuts for public workers if done right – and it's those renegotiations, rather than a frantic search for the most appealing baubles in city limits, that will get Detroit back on its feet. [...]

I am not such a romantic that I ascribe to art the mystical status of some of the DIA's defenders. If there really were a one-to-one correspondence between selling off paintings and feeding families, I could become a museum looter myself. But the whole point of a bankruptcy is to solve deep and structural problems in the economic organization of a major city – not to strip-mine everything from the Bellinis at the museum to the baboons at the Detroit Zoo for however much one-time cash you can squeeze out of them. [...]

Detroit has serious problems, but the Detroit Institute of Arts is not one of them. It's running very well, actually; the museum is run at no cost to the city, and to disembowel one of its few great institutions for the sake of dysfunctional ones defies not only decency but logic. [...]

And just as Detroit is not a corporation, the Detroit Institute of Arts is not a family or a small business fallen on hard times – it's a public trust. Now is the time to remake Detroit, not to strip-mine it.

By Jason Farago, *theguardian.com*, Sunday, 8 December 2013.

I. VERSION*(sur 20 points)*

Traduire le titre, et à partir de « I am not such a romantic... » (ligne 42), jusqu'à « ... not only decency but logic » (ligne 52)

II. QUESTIONS*(sur 40 points)***1. Question de compréhension du texte**

Explain what the following sentences means:

“The pitifully simplistic justification for looting the DIA goes like this: Detroit owes money, Detroit owns pricey paintings. Therefore Detroit should sell up to pay its creditors.” (lignes 15-17)

*(100 mots + ou – 10 % * ; sur 10 points)*

2. Question de compréhension du texte

Explain what the following sentence mean:

“Even putting all that aside: on the barest economic level, raiding the museum will have no meaningful impact on the city's bottom line.” (lignes 35-36)

*(100 mots + ou -10 % * ; sur 10 points)*

3. Question d'expression personnelle

Is culture a luxury in periods of economic difficulty?

*(300 mots + ou – 10 % * ; sur 20 points)*

* *Le non-respect de ces normes sera sanctionné. Indiquer le nombre de mots utilisés.*

III. THÈME*(sur 20 points)*

Encaissé entre l'océan et l'Irlande du Nord, souffrant d'un manque criant d'infrastructures – pas d'autoroute, ni même de ligne de chemin de fer pour le relier au reste de l'Irlande –, le comté rural de Donegal a souffert, plus que les autres, de l'éclatement de la bulle immobilière, en 2008. Lui aussi s'était laissé contaminer par la frénésie de construction pendant les années de boom économique. Quand le rêve s'est écroulé, des milliers d'éleveurs, qui s'étaient reconvertis dans le secteur du bâtiment, se sont retrouvés au chômage. Aujourd'hui, une personne sur quatre est sans emploi dans le Donegal, et un jeune de moins de 30 ans sur deux.

Alors que des villes comme Dublin, Cork et Galway renouent avec la croissance parce qu'elles constituent des pôles de développement attractifs pour les multinationales Letterkenny et ses environs n'intéressent pas grand monde. Bien sûr, il y a un hôpital réputé et un Institut de technologie de qualité, mais pas de quoi séduire les investisseurs étrangers.

D'après Florence Beaugé, *Le Monde*, 13 octobre 2013.

CORRIGÉ

Par Alain Goudot, professeur de Chaire supérieure d'anglais en CPGE économique et commerciale au lycée de Bellepierre à Saint-Denis de la Réunion.

IENA

CORRIGÉ

I. VERSION

Ne pillez pas le musée des Beaux-Arts de Détroit pour rembourser les créanciers de la ville

Je ne suis pas romantique au point d'attribuer à l'art le statut mystique de certains des défenseurs du Musée des Beaux-Arts de Détroit (DIA). S'il y avait vraiment une correspondance terme à terme entre revendre des tableaux et nourrir des familles, je pourrais moi-même devenir un pilleur de musées. Mais tout l'enjeu d'une faillite est de résoudre les problèmes structurels profonds dans la gestion économique d'une ville majeure – et non pas d'exploiter tous les filons, que ce soit les œuvres de Bellini exposées au musée ou les babouins pensionnaires du zoo de Détroit, si important que soit le pactole que vous pourriez en retirer en un seul coup. Détroit connaît des problèmes graves, mais le Musée des Beaux-Arts de Détroit n'en est pas un. Il fonctionne très bien en vérité ; le musée est géré à coût zéro pour la ville, et éviscérer l'une de ses rares grandes institutions pour venir en aide à d'autres institutions à problèmes défie non seulement l'honnêteté/la décence mais aussi la logique.

III. THÈME

The rural county of Donegal has suffered, more than the others, from the bursting of the housing bubble in 2008 deeply embanked/stuck as it is between the ocean and the rest of Ireland, and suffering from an obvious lack of basic infrastructures – no motorway, not even a railway to link it to the rest of Ireland. It too had let itself get infected by the construction frenzy of the economic boom years. When the dream collapsed, thousands of cattle breeders who had retrained in/turned to the building sector, found themselves unemployed. Today one in four people is jobless in Donegal, as is one under-thirty youngster out of two. Whereas cities such as Dublin, Cork and Galway are enjoying growth again because they form attractive clusters for development in the eyes of multinational corporations, Letterkenny and its surroundings attract few people. Of course, there is a renowned hospital and a top Technology Institute, but not enough to seduce foreign investors.

SCIENT. ECO. TECHNO. KHÂGNE

LV1 - ANGLAIS

LV1 - ANGLAIS

DURÉE : 4 HEURES.

Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document, dictionnaire ou lexique ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

1. TRADUCTIONS

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 2 HEURES.

I. TRADUCTION DE FRANÇAIS EN ANGLAIS

Annie avait quitté N. le jour où s'était tenue la messe en mémoire de sa mère. Je savais qu'elle n'avait pas fait que fuir cette messe mais qu'elle était partie, et j'étais bien décidé à aller la chercher.

Je n'avais eu aucun mal à trouver leur adresse à Paris. À la poste, un type de mon âge m'avait renseigné en me souriant bizarrement. Sur le coup, je n'avais pas compris. Il semblait très bien connaître l'endroit, du moins les alentours. Dans la rue perpendiculaire, il y avait une galerie de tableaux, il fallait que je passe devant et, après, c'était la première à droite. Au numéro 65.

J'ai sonné.

C'était Madame M. qui m'avait ouvert. Elle tenait le bébé dans ses bras. L'enfant d'Annie, je n'arrivais pas à le croire. Je ne pouvais pas le quitter des yeux. Elle l'avait serré plus fort contre elle.

Non, Annie n'était pas là, malheureusement elle n'avait plus aucune nouvelle d'elle [...].

Je m'étais arrêté devant la galerie de tableaux, celle dont m'avait parlé le guichetier de la poste, les toiles dans la vitrine m'avaient fait penser à celles d'Annie. Mais en levant la tête pour voir le nom de ce magasin, je compris soudain ce qui s'y cachait réellement.

Hélène Grémillon, *Le confident*, Gallimard. 2010.

II. TRADUCTION D'ANGLAIS EN FRANÇAIS

All the years that I taught in a high school I didn't teach literature, as you might expect, but mathematics. Then staying home I grew restless and undertook something else – writing tidy and I hope entertaining biographies of Canadian nove-

lists who have been undeservedly forgotten or have never received proper attention. [...]

I liked the work, I thought it worthwhile, and after years in classrooms I was glad of the control and the quiet. But there might come a time, say around four in the afternoon, when I just wanted to relax and have some company.

And it was around that time on a dreary closed-in day when a woman came to my door with a load of cosmetics. At any other time I wouldn't have been glad to see her, but I was then. Her name was Gwen, and she said she hadn't called on me before because they had told her I wasn't the type.

"Whatever that is," she said. "But anyway I had the idea, just let her speak for herself, all she has to do is say no."

I asked her if she would like a cup of the coffee I had just made and she said sure. She said she was just getting ready anyway to pack it in. She set her burdens down with a groan.

"You don't wear makeup. I wouldn't wear none neither if I wasn't in the business." Maybe it had made her uneasy, to be asked in. She kept talking jumpy little looks around.

Alice Munro, *Dolly*, in *Deal Life, Stories*, Alfred A. Knopf, New York. 2012.

2. EXPRESSION ÉCRITE

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 2 HEURES.

Why is the US sending some of its best young minds to jail? On Friday Jeremy Hammond, a 28-year-old digital activist from Chicago, will learn how many years he is to serve for participating in the 2011 hack of the private security firm Stratfor. "I believe in the power of the truth," said Hammond, pleading guilty to helping liberate millions of emails from the company, which is paid by large corporations to spy on activists around the world. "I did this because I believe people have a right to know what governments and corporations are doing behind closed doors. I did what I believe is right."

Like the others who took part in the Statfor hack, Hammond wasn't out for money, and he didn't get any. Nonetheless, he has spent the past 18 months in prison, including extended periods in solitary confinement, and now faces a 10-year prison sentence. Hammond is the latest target of a global witchhunt against hackers, whistleblowers and anyone who seeks to release private information in the public interest.

The witchhunt is being led by the US government, but its targets are international: Lauri Love, an activist from Suffolk, was arrested in Britain last month and may face extradition on charges of hacking into US intelligence networks and a possible decade in a US jail. The legislation used to single out and lock up these people is the Computer Fraud and Abuse Act, a flexible law that allows US courts to impose almost indefinite sentences against any crime committed with a computer, down to simple violation of terms of service.

In practice, by some staggering coincidence, the digital crimes that get prosecuted are those that happen to make governments and large corporations look foolish.

Financial damage is the main thrust of the prosecutors' claim against Hammond and his fellow LulzSec members, but it isn't really the money that matters. Hammond is being asked to pay back just \$250,000; by comparison, you would have to embezzle tens of millions of dollars to get an equivalent sentence for corporation fraud in the same Manhattan courtroom.

No, what matters is that people are using their computer skills to expose uncomfortable truths – including Statfor's alleged involvement in spying on the Occupy Wall Street protests. "Punishment has to be proportionate to the harm caused," said Hanni Fakhoury, staff lawyer at the Electronic Frontier Foundation, "These punishments are excessive."

With the right skills, you no longer have to hide out in a lonely Washington car-park to leak classified information. You don't have to break into a building to steal documents that might be in the public interest. You don't even have to put your trousers on. All you need to do is sit at your computer and type. The practical risks of hanging out the mucky bedsheets of power are decreasing just as a generation that has grown up with a weary distaste for government lies hits adulthood. Clearly, something has to be done to make them fearful again – and fast.

The witchhunt against hackers and leakers is designed as a deterrent. That, after all, is the logic behind sending people to prison: threaten potential scallywags with the loss of their freedom and livelihood and they might just fall in line. The wildly disproportionate sentencing of young digital activists suggests that there's something the US government and associate nation states are anxious to deter. The trouble is that the deterrent looks rather likely to backfire.

If one thing unites the hackers and whistleblowers hunted by the US government over the past three years, from Chelsea Manning and Edward Snowden to notorious prankster Andrew "weev" Auernheimer, it is that they have little respect for the moral authority of the US government and its mechanisms. They are in their teens and 20s; they grew up in the Bush, Blair and Brown years and came of age just as the financial crash of 2008 swept away the socioeconomic justification for Anglo-American imperialism. The online culture that they helped create believes deeply in transparency and, to that culture, digital activists who risk everything for the public's "right to know" are heroes.

Jeremy Hammond is not the first information activist to be made a martyr by the US state, and he is unlikely to be the last. There are a lot of things you can do, if you are the most powerful nation on Earth, to make individuals afraid. You can destroy their chance of a safe and happy future. You can lock them up for years. But the one thing you can't do, ever, is force them to respect you – and if you can't do that, on a basic level, you have already lost.

The Guardian, November 14, 2013.

Répondre en ANGLAIS aux questions suivantes :
(environ 250 mots pour chaque réponse)

1. According to the author of this text, why is the US government unlikely to crush the spirit of hackers like Jeremy Hammond?
2. To what extent can disseminating information obtained illegally be justifiable?

CORRIGÉ

Par Philippe Rayet, agrégé d'anglais, professeur en classes préparatoires au lycée Notre-Dame-du-Grandchamp à Versailles.

I. TRADUCTION DU FRANÇAIS A L'ANGLAIS

Annie had left N. (on) the day when there had been [there was] that mass celebrated in memory [to the memory] of her mother. I knew she had not simply fled from that service but actually left, and I was determined to go and look for her.

I had no trouble finding their address in Paris [I found their address in Paris without any trouble]. At the post office, a guy (of) my age gave me the information with an odd [a strange] smile. At first, I did not understand why. He seemed to know the place perfectly (well) – the neighbourhood [the surroundings] at least. In the street perpendicular to the one where we were, (there) was an art [a picture] gallery. I had to go past it and then it was the first street on the right. Number 65.

I rang the bell.

It was Madame M. who opened the door. She was holding [She had] the baby in her arms. It was Annie's child. I could not believe my eyes. I could not take my eyes off it. She clasped it tighter to her.

No, Annie was not there; unfortunately, she no longer had any news of her [she had no news of her any more] [...].

I stopped in front of [outside] the picture gallery, the one the man behind the counter at the post office had mentioned. The paintings in the window reminded me of Annie's. But when I looked up to see what the name of the shop was, I suddenly realized what it actually concealed.

Hélène Grémillon, *Le confident*, 2010.

II. TRADUCTION DE L'ANGLAIS AU FRANÇAIS

Pendant toutes les années où j'ai exercé dans un lycée, ce n'est pas la littérature que j'enseignais, comme on pourrait s'y attendre, mais les mathématiques. Puis, à force de rester chez moi à tourner en rond, je me suis lancée dans une tout autre activité : la rédaction de biographies bien structurées [bien construites] et, je l'espère, distrayantes, de romanciers canadiens injustement tombés dans l'oubli ou qui n'avaient jamais reçu (toute) l'attention qu'ils méritaient. [...]

Ce travail me plaisait. Je trouvais qu'il en valait la peine, et, après des années passées dans des salles de classe, j'étais contente de maîtriser la situation et d'être au calme. Mais il pouvait arriver dans la journée, disons vers les quatre heures de l'après-midi, que j'aie tout simplement envie de me détendre et de voir du monde.

Et c'est à peu près vers cette heure-là que, par une journée maussade où j'étais restée cloîtrée chez moi, une femme s'est présentée à ma porte avec toute une cargaison de cosmétiques [de produits de beauté]. A tout autre moment de la journée, elle serait mal tombée, mais là, elle arrivait à pic. Elle s'appelait Gwen, et m'a expliqué qu'elle ne m'avait pas rendu visite avant parce qu'on lui avait dit que les produits de beauté, ce n'était pas mon genre.

« Qu'est-ce que j'en sais, moi ? » a-t-elle ajouté. « Mais de toute façon, que j'me suis dit, j'veux l'entendre me le dire elle-même : elle n'a qu'à dire "non" et j'suis fixée ! »

Je venais de préparer du café, et je lui ai demandé si elle en voulait une tasse. Elle a répondu que c'était pas de refus.

Elle m'a dit que de toute façon, elle était sur le point d'arrêter (son porte-à-porte), et elle a posé tout son attirail en poussant un grognement (de soulagement).

« Vous mettez pas d' maquillage. Moi aussi j'en mettrais pas si j'faisais pas ce boulot. »

Le fait que je l'invite à entrer l'avait peut-être mise mal-à-l'aise car elle ne cessait de jeter autour d'elle de petits regards furtifs qui trahissaient une certaine nervosité.

Alice Munro, "Dolly" in *Dear Life*, 2012.

LV1 - ALLEMAND

DURÉE : 4 HEURES.

(La note sur 80 sera divisée par 4 pour obtenir la note sur 20, les deux chiffres après la virgule arrondis au dixième supérieur.)

Les candidats ne sont pas autorisés à modifier le choix de la première langue dans laquelle ils doivent composer. Tout manquement à la règle sera assimilé à une tentative de fraude.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document, dictionnaire ou lexique ; sauf en latin pour lequel un dictionnaire Latin-Français est autorisé ; l'utilisation de toute calculatrice ou de tout matériel électronique est interdite.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

SUJET

„HILFE, DIE POLEN RETTEN UNS !“

- 1 *Löcknitz'* Zukunft steht auf dem Schulhof: 20 kleine Mädchen und Jungen; gerade sind die polnische und die deutsche Nationalhymne verklungen. Diese Kinder gehören zum deutsch-polnischen Kindergarten, den es in *Löcknitz* seit zwei Jahren gibt. Die kleine Gemeinde liegt im äußersten Nordosten Deutschlands, zehn Kilometer von der polnischen Grenze entfernt, kaum ein Haus ist unbewohnt, *Löcknitz* ist ein saniertes Dorf. Und es wächst. Seit 2005 ziehen wieder mehr Menschen zu als weg, rund 3200 Einwohner sind es inzwischen. Es gibt eine Krippe, eine Kita, eine Grundschule, eine Realschule und ein deutsch-polnisches Gymnasium. Alles ausgebaut. „Wir sind ein Dorf mit städtischem Charakter“, sagt Bürgermeister
- 10 **Lothar Meistring.**

- Das wäre ohne die Polen nicht möglich gewesen. Denn sie sind es, die hier Land kaufen und Unternehmen gründen. „2004 ging es los“, sagt der Bürgermeister. Damals wurde Polen EU-Mitglied. Natürlich gab es auf beiden Seiten Bedenken: Die Deutschen fürchteten einen Ansturm polnischer Niedriglöhner; die Polen hatten
- 15 Angst, dass die Deutschen ihr Land aufkaufen. Aber es ist ganz anders gekommen.

- Lokalpolitiker haben früh erkannt, dass ein Zuzug von Polen eine Chance für ihre schrumpfenden Orte war. In Polen machten sie auf die Vorteile ihrer Gemeinden aufmerksam, sowohl in Zeitungen als auch in Fernsehspots. Sie warben mit günstigem Bauland, dem deutschen Steuer- und Sozialstaat und auch einem
- 20 Begrüßungsgeld für jedes Neugeborene. Die neuen Einwohner aus Polen kamen, dazu EU-Fördermittel für die Grenzregion. „Anfangs kamen viele Abenteurer, die vor allem an Sozialleistungen und Kindergeld interessiert waren“, sagt **Meistring.**

- Seit fünf oder sechs Jahren aber seien es junge Familien, Ärzte, Handwerker und Rentner. Der Zuzug sei stabil. Viele sprächen Deutsch. Mittlerweile sind fast 8%
- 25 der Menschen in *Löcknitz* Polen. Was zieht sie in die vorpommersche Provinz?

Es gibt viele finanzielle Vorteile: Familien sparen die hohen polnischen Grundsteuern, bekommen deutsches Kindergeld, mehr als in Polen. Außerdem, so **Meistring**, würden die Polen deutsche Sauberkeit und Ordnung, die Verlässlichkeit der deutschen Behörden, die soziale Sicherheit, die deutsche Gründlichkeit schätzen.

30 Deutschland gelte als „gelobtes Land“. Wenn dann in Kindergarten und Gymnasium auch Polnisch gesprochen wird wie in *Löcknitz*, sei ein Umzug für Polen aus dem Grenzgebiet attraktiv.

Doch im „gelobten Land“ werden böse Kritiken laut, z. B. wird gegen die „Polen-Invasion“ und „Kriminelle Ausländer“ gehetzt. In vielen Orten hängen Wahlplakate von der NPD. Der Gemeinderat von *Löcknitz* hat 14 Mitglieder, 2 sind in der NPD. Diese Partei veranstaltet regelmäßig Demonstrationen vor Asylbewerberheimen in der Umgebung, gegen die „Polonisierung“. Das Gift trifft auf fruchtbaren Boden: Manche Deutsche kultivieren die alten Vorurteile gegenüber den Nachbarn. Sie betrachten Polen als laut, unordentlich und kriminell.

40 **Alfons Heimer** hingegen schwärmt von polnischer Gastfreundschaft, Kreativität und Bürgerlichkeit. Er ist Bürgermeister von *Blankensee*, einer kleinen Gemeinde nordöstlich von *Löcknitz*, die vor ein paar Jahren noch vom Aussterben bedroht war. **Heimer** spricht fließend Polnisch. Dass heute 10% der Einwohner von *Blankensee* Polen sind, bezeichnet er als Glück: „Nur tolle Leute“. Die Bedenken auf deutscher Seite, sagt er, nähmen allmählich ab. „Wenn die von den Polen gekauften Häuser renoviert werden, während die von den Deutschen verfallen, ändern viele ihre Meinung.“

Von **Heimers** Begeisterung sind die meisten allerdings weit entfernt. Das liegt an der Mentalität, aber auch an der schlechten Wirtschaftslage auf beiden Seiten der

50 Grenze. Die Arbeitslosigkeit in *Löcknitz* ist hoch, mehr als 15%. Und während die Polen ihre Chance in Deutschland suchen, bleiben die Deutschen in der Heimat. Polnisch können nur wenige, das Nachbarland bleibt ihnen fremd. Durch diese fehlende Offenheit würden Kleinunternehmer, wie selbstständige Handwerker, viele potenzielle Kunden verlieren, sagt **Heimer**.

55 Die Bürgermeister setzen auf Zeit. Der polnische EU-Beitritt ist eben nur neun Jahre her. Eine offene Grenzregion entsteht gerade erst. **Heimer** glaubt, dass *Löcknitz* mit seinen vielen Bildungseinrichtungen die Veränderung fördern kann. Wenn erst einmal eine Generation 20-Jähriger zweisprachig aufgewachsen sei, sagt er, gebe es in den Köpfen keine Grenze mehr.

Nach einem Artikel von Till SCHWARZE
« ZEIT online », 19. September 2013.

I. VERSION*(sur 20 points)*

Traduire le titre et les paragraphes 2 et 3, depuis : „Das wäre ohne die Polen nicht möglich gewesen...“ jusqu'à : „... die vor allem an Sozialleistungen und Kindergeld interessiert waren“, sagt Meistring.“

II. QUESTIONS*(sur 40 points)***1. Question de compréhension du texte**

Was zieht die Polen nach Deutschland und was bringen sie den deutschen Gemeinden?

(100 mots + ou – 10 % ; sur 10 points)***2. Question de compréhension du texte**

Sind die Polen bei allen Deutschen willkommen?

(100 mots + ou – 10 % ; sur 10 points)***3. Question d'expression personnelle**

Wie wichtig sind heute die Landesgrenzen zwischen den Staaten?

(300 mots + ou – 10 % ; sur 20 points)*

** Le non-respect de ces normes sera sanctionné.*

(Indiquer le nombre de mots sur la copie après chaque question.)

III. THÈME*(sur 20 points)*

Ursula von der Leyen intéresse beaucoup de monde en Allemagne. Il y a ceux qui l'admirent, la trouvent très belle et brillante, et il y a ceux qu'elle dérange. Les critiques les plus acerbes émanent souvent de l'Union chrétienne-démocrate dont elle est la vice-présidente.

Son père fut ministre-président de Basse-Saxe. De son enfance passée à Bruxelles elle a gardé un accent français parfait. Elle commença des études d'économie à Londres, ensuite elle enchaîna sur des études de médecine avant de suivre son mari en Californie. Le couple a sept enfants, **Ursula von der Leyen** a dit un jour qu'elle n'aurait jamais eu autant d'enfants s'ils n'avaient pas vécu aux Etats-Unis...

De retour en Allemagne, elle fait ses premiers pas en politique, se battant pour les femmes qui veulent concilier carrière et famille. Quand **Angela Merkel** devient chancelière en 2005, c'est à elle qu'elle confie le ministère des Affaires familiales.

D'après un article d'Yves CORNU
« Le Point », 05.09.2013*

**(Ces références ne sont pas à traduire.)*

CORRIGÉ

Par Jean-Gilbert Delarbre, professeur de Chaire supérieure au lycée Michelet à Vanves.

I. VERSION

« A l'aide, les Polonais nous sauvent ! »

Cela n'aurait pas été possible sans les Polonais, car ce sont eux qui achètent ici les terrains et fondent les entreprises. « Tout a commencé en 2004 », dit le maire. A l'époque, la Pologne devint membre de l'UE. Naturellement, des réticences se firent jour de part et d'autre. Les Allemands redoutaient un assaut de travailleurs polonais sous-payés ; les Polonais avaient peur que les Allemands rachètent leur terre. Mais les choses ont pris un tout autre tour.

Les politiciens du cru ont vite reconnu qu'un afflux de Polonais était une chance pour leurs localités à la population déclinante. En Pologne, ils utilisèrent tant les journaux que les spots télévisés pour attirer l'attention sur les opportunités de leurs communes. Ils firent miroiter des terrains de construction bon marché, l'attractivité de l'Etat providence et de la fiscalité allemande, sans oublier une prime de bienvenue pour chaque nouveau-né. Les nouveaux habitants venus de Pologne arrivèrent, des subventions de l'UE pour cette région frontalière s'ajoutèrent aux avantages. « Au début vinrent beaucoup d'aventuriers, appâtés avant tout par les prestations sociales et les allocations familiales », dit Meistring.

D'après un article de Till SCHWARZE, « ZEIT online », 19 septembre 2013.

III. THÈME

Ursula von der Leyen interessiert so manchen in Deutschland. Die einen bewundern sie, finden sie reizend und glänzend, die anderen wiederum stören sich an ihr. Die schärfsten Kritiken stammen oft aus den Reihen der CDU, in der sie das Amt der stellvertretenden Vorsitzenden bekleidet.

Ihr Vater war niedersächsischer Ministerpräsident. Ihrer in Brüssel verbrachten Kindheit verdankt sie einen perfekten französischen Akzent. Sie fing in London ein Wirtschaftsstudium an, um dann auf Medizin umzuschwenken, bevor sie ihrem Mann nach Kalifornien folgte. Das Ehepaar hat sieben Kinder. Ursula von der Leyen hat einmal gesagt, sie hätte nie so viele Kinder geboren, wenn sie nicht in den Vereinigten Staaten gelebt hätten.

Einmal nach Deutschland zurück, macht sie ihre ersten Schritte in der Politik, indem sie sich für Frauen einsetzt, die Familie und Karriere vereinbaren wollen. Ausgerechnet sie beauftragt Angela Merkel mit dem Familienministerium, als sie 2005 Bundeskanzlerin wird.

Nach einem Artikel von Yves CORNU, « Le Point », 5.9.2013.

LV1 - ALLEMAND

DURÉE : 4 HEURES.

Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document, dictionnaire ou lexique ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

En matière d'orthographe, les graphies antérieure et postérieure à la réforme sont acceptées.

CCIR

1. TRADUCTIONS

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 2 HEURES.

I. TRADUCTION DU FRANÇAIS EN ALLEMAND

J'avais alors à peu près vingt-trois ans. Dans un bar proche du port, un homme engagea la conversation sur quelques banalités, puis me demanda si je voulais gagner un peu d'argent.

Surpris, sinon méfiant, je lui demandai ce qu'il faudrait faire pour cela. S'il m'avait tout dit d'emblée, je pense que je ne l'aurais pas cru, ou l'aurais pris pour un fou. Mais il était habile, ne dévoilant son offre que par petites touches. Par mes questions, je l'aidai malgré moi à présenter sa proposition comme un honnête contrat. Il m'offrit une bière, que je bus lentement, pendant qu'il continuait remerciements et explications tout cela confus et embarrassé, ou alors emmêlé à dessein, pour me permettre de bien comprendre ce qu'il attendait de moi.

Au bout d'un moment, il ajouta un « Nous y allons ? », qui résonna comme une invitation et comme un ordre. « Oui monsieur. » Je le suivis pendant une dizaine de minutes vers la ville haute...

Je craignais pas de mauvais coups, je n'avais rien à perdre, et restais partagé entre la curiosité, l'excitation, un fou rire intérieur, un peu d'humiliation et en même temps une sorte d'inexplicable gravité.

François Garde, *Pour trois couronnes*, Éditions Gallimard, 2013, page 15.

II. TRADUCTION DE L'ALLEMAND AU FRANÇAIS

Tatsächlich findet in der EU gegenwärtig eine größere Machtumverteilung statt. Das relative Gewicht Deutschlands nimmt zu. Frankreich und die Staaten des Südens sind stärker von der Schuldenkrise betroffen und verlieren dadurch an Einfluss. Durch die Ausdifferenzierung der EU in einen Eurozonenkern und eine Unionsperipherie nimmt gleichzeitig die Bedeutung Großbritanniens ab, das sich letzterer zurechnet. Schließlich geben die USA ihre Stabilisierungs- und Ausgleichsrolle auf dem Kontinent auf, um sich Asien zuzuwenden.

Machtzugewinn erzeugt im Regelfall Gegenmachtbildung. Daher wäre zu erwarten, dass das Erstarken historischer Ressentiments gegenüber Deutschland politisch noch größeren Widerhall findet. Bislang verfängt die Skandalisierung der neuen deutschen Dominanz dagegen kaum.

Der Widerstand gegen die wachsende deutsche Macht dürfte allerdings zunehmen, wenn sich der Eindruck verfestigt, Berlin treffe immer mehr „einsame“ Entscheidungen für den Rest der EU. Um der Bildung von Gegenmacht vorzubeugen, sollten daher Möglichkeiten erkundet werden, wie dem Eindruck größerer Fremdbestimmung in den Partnerländern entgegengewirkt werden kann. Dafür kommen zwei Wege in Betracht.

Die Selbstbindung Deutschlands könnte über mehr Integration in der EU verstärkt werden. Berlin würde weitere Kompetenzen an Brüssel abtreten, um den Verdacht zu zerstreuen, andere Staaten bevormunden zu wollen. Diese „Zentralisierungsstrategie“ setzt jedoch Reformen der EU-Institutionen voraus, die am Ende den deutschen Einfluss noch verstärken könnten.

Das Bundesverfassungsgericht wertet den gegenwärtigen Integrationsstand als gerade noch mit dem Grundgesetz vereinbar. Zusätzliche Kompetenzabtretungen an Brüssel ließen sich nicht mehr rechtfertigen, weil es den EU-Institutionen an der dafür notwendigen demokratischen Legitimation mangelt. Dabei wird etwa auf die ungleiche Vertretung der EU Bürger im Europäischen Parlament abgehoben.

Lars Brozus , Wie Deutschland sein Negativ-Image loswerden kann, Handelsblatt vom 02.11.2013.

2. EXPRESSION ÉCRITE

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 2 HEURES.

BETREUUNGSGELD: EINE EINFACHE RECHNUNG

100 Euro Betreuungsgeld sind 100 Euro mehr in der Haushaltskasse, so sehen das viele Eltern. Manche möchten länger bei den Kindern bleiben, andere wollen nicht arbeiten oder sind auf Privatbetreuung angewiesen. Bei Hartz-IV-Bezieherinnen drohen allerdings Jobchancen und Altersabsicherung auf der Strecke zu bleiben.

Diese 100 Euro Betreuungsgeld im Monat stehen für ein Lebensmodell, das in Berlin in diesen Wochen, wenn über Koalitionen verhandelt wird, mal wieder gründlich auseinander genommen werden wird. Und was sagen die betroffenen Familien selbst dazu? Sie verfolgen das erneute Hick-Hack um die „Herdprämie“ ratlos bis resigniert – und investieren solange in Au Pairs, in die Haushaltskasse oder eben in die Regale mit Kleinkindbedarf im Drogeriemarkt.

Seit dem 1. August, parallel zum Rechtsanspruch auf einen Kita-Platz für unter Dreijährige, ist der Anspruch auf Betreuungsgeld in Kraft getreten. Eltern, die ihre Kinder, die nach dem 1. August 2012 geboren sind, nicht in einer öffentlich geförderten Tagesstätte betreuen lassen, sondern sie entweder zu Hause erziehen oder sie in die Obhut von Verwandten, privaten Tagesmüttern und Au-Pairs geben, erhalten 100 Euro. Vom kommenden Sommer an werden 150 Euro ausgezahlt.

Nach einem schleppenden Start scheint nun, gut zwei Monate nach der Einführung der staatlichen Prämie, das Interesse der Eltern am Betreuungsgeld gestiegen zu

sein. Nach Berechnungen der SPD gibt es 160.000 anspruchsberechtigte Kinder. Anfang September waren nach SZ-Recherchen erst 27.000 Anträge für Einjährige eingegangen. Eine Umfrage der *Passauer Neuen Presse* in 16 Bundesländern kam Anfang Oktober auf mehr als 50.000 Anträge. Mit gut 14.000 wurden die meisten Formulare in Nordrhein-Westfalen auf den Weg gebracht, in Bayern waren es knapp 12.000, in Baden-Württemberg 11.000.

In Hessen, wo etwa 5000 Anträge auf Betreuungsgeld registriert wurden, lebt Claudia M., 32 Jahre alt, Mutter von 13 Monate alten Zwillingen sowie einer vierjährigen Tochter. Bis vor fünf Jahren arbeitete sie als Verkäuferin. Als ihre Filiale schloss, wurde sie arbeitslos, kurz darauf zum ersten Mal schwanger, Claudia M. will ihren Namen nicht in der Zeitung lesen und sagt fast schon trotzig: „Ich muss mich ständig dafür rechtfertigen, dass ich eigentlich so bald nicht mehr arbeiten will“. Denn sie hat für sich eine einfache Rechnung aufgemacht: Sie bekommt insgesamt 558 Euro Kindergeld. Dazu ein knappes Jahr lang zweimal 100 Euro Betreuungsgeld für die Zwillinge, von August nächsten Jahres an werden es ein Jahr lang zweimal 150 Euro sein. „So viel kann ich netto gar nicht selbst verdienen – und mein Mann zahlt schließlich die Miete,“ sagt die 32-Jährige.

Jobchancen und Altersabsicherung bleiben auf der Strecke

Mit Sorge hat die Bundesarbeitsgemeinschaft kommunaler Frauenbüros beobachtet, dass Hartz-IV-Bezieherinnen vom Jobcenter zum Beantragen von Betreuungsgeld gedrängt wurden. Flächendeckend würden Mütter durch Telefonakquise oder Rundbriefe aufgefordert, die staatliche Leistung zu beziehen, warnte der Verband, in dem sich Frauenbeauftragte aus ganz Deutschland zusammengeschlossen haben, auch die Bundesministerinnen Kristina Schröder und Ursula von der Leyen.

„Ein völlig falsches Signal für gerade jene Frauen, die besonders darauf angewiesen wären, mit Kursen wieder in den Arbeitsmarkt eingegliedert zu werden“, sagt Beate Ebeling von der Arbeitsgemeinschaft, Eltern, die Hartz IV beziehen, wird das Betreuungsgeld von den sonstigen monatlichen Bezügen als sogenannte vorrangige Leistung abgezogen. Es macht für sie also keinen Unterschied, ob sie es beantragen. „Es ist lediglich ein unsinniges Umverteilen in staatliche Töpfe, um Statistiken zu schönen“, sagt Ebeling. Die Jobchancen und die Altersabsicherung für Frauen aber blieben auf der Strecke.

Oft sprechen praktische Gründe gegen die Krippe

Eine Frau, die gar nicht erst versucht hat, die staatliche Prämie anzufordern, sie aber gerne hätte, ist Regine Meiss aus Augsburg. Sie ist 41 Jahre alt und Mutter von sechs Kindern. Es sind vier Jungs und zwei Mädchen zwischen einem und 15 Jahren, der Jüngste ist im Juli 2012 geboren. „Das ist ganz knapp am Stichtag vorbei und schon recht ärgerlich für uns. Das Geld hatten wir sehr gut gebrauchen können“, sagt Regine Meiss. Die Augsburgerin ist eine Verfechterin des Betreuungsgeldes und entspricht so gar nicht dem Klischee, das in den vielen harten Debatten immer wieder von jenen Frauen verbreitet wurde, die sich für eine „Herdprämie“ erwärmen können. Regine Meiss arbeitet als Anästhesistin in Teilzeit im Schichtdienst, ihr Mann ist Urologe. Sie bat ihren Job nie länger als ein Jahr unterbrochen, die Familien würde das Betreuungsgeld zur Mitfinanzierung ihres Au Pairs verwenden. Die Kinder- und Haushaltshilfe aus dem Ausland kostet um die

400 Euro pro Monat, „Mein Mann und ich verdienen zwar beide, aber das wäre ein kleiner Zuschuss gewesen“, sagt Meiss.

Für sie sind es ganz praktische Gründe, warum sie den Kleinsten nicht in die Krippe geben möchte: „Die Kita öffnet erst um 7. 30 Uhr. Um diese Uhrzeit stehe ich oft schon im Operationssaal.“ Die Anästhesistin betont, dass sie mit sechs Kindern immer einen „doppelten Boden“ haben müsse und sich nie allein auf Krippe, Kindergarten oder Schule verlassen könne. Sie beklagt das „starre System“, wünscht sich mehr Phantasie und „alternative Modelle“ bei der Kinderbetreuung. Die sechsfache Mutter ist überzeugt: „Die Politik kann nicht steuern, wer ZLI Hause bleiben soll. So ist das gerade nichts Halbes und nichts Ganzes.“

Rede des Bundespräsidenten vom 15. November 2012

<http://www.bundespraesident.de/SharedDocs/Reden/DE/Joachim-Gauck/Reden/2012/11/1121115-Edgar-Reitz.html>,

Répondre en ALLEMAND aux questions suivantes :
(environ 250 mots pour chaque réponse)

1. Erklären Sie, inwiefern es viele Probleme und Fragen rund um das Thema Betreuungsgeld gibt.
2. Warum wird Ihrer Meinung nach das Thema Kinderbetreuung in Deutschland so kontrovers diskutiert?

I. TRADUCTION DE L'ALLEMAND EN FRANÇAIS

Effectivement a lieu en ce moment une assez large redistribution des cartes au sein de l'UE. Le poids relatif de l'Allemagne augmente. La France et les pays du Sud sont plus fortement touchés par la crise de la dette et perdent par là-même en influence. Dans le même temps, la différenciation de l'UE entre un centre constitué par la zone euro et une périphérie dont fait partie la Grande Bretagne entame l'importance de celle-ci. Enfin, les Etats-Unis abandonnent leur rôle de stabilisation et de rééquilibrage sur le continent pour se tourner vers l'Asie.

Tout gain de pouvoir entraîne en règle générale la formation de contre-pouvoirs. C'est pourquoi on pourrait escompter que le renforcement des ressentiments historiques à l'encontre de l'Allemagne trouve au plan politique un écho encore plus fort. A rebours de ces attentes, la tactique de stigmatisation de la nouvelle domination allemande ne prend guère jusqu'à présent.

Toutefois, la résistance à la montée en puissance de l'Allemagne devrait croître si l'impression se renforce que Berlin prend toujours davantage de décisions « solitaires » affectant le reste de l'UE. Pour prévenir la formation de contre-pouvoirs, il faudrait en conséquence explorer les possibilités et les moyens de contrecarrer l'impression grandissante de colonisation qui prévaut dans les pays partenaires. Pour ce faire, on peut envisager d'emprunter deux voies.

L'auto-limitation de l'Allemagne pourrait être renforcée par une intégration plus poussée de l' Union européenne. Berlin transférerait des compétences supplémentaires à Bruxelles pour dissiper le soupçon de vouloir mettre sous tutelle d'autres Etats. Cette « stratégie de centralisation » présuppose cependant des réformes institutionnelles en Europe qui pourraient *in fine* renforcer encore l'influence allemande.

La cour constitutionnelle allemande évalue le niveau actuel d'intégration comme étant encore tout juste compatible avec la Loi Fondamentale. Selon lui, un surcroît de transferts de compétences vers Bruxelles ne serait plus justifiable parce que les institutions de l'UE manquent pour cela de l'indispensable légitimation démocratique. On signale par exemple dans ce contexte la représentation inégalitaire des citoyens au parlement européen.

D'après Lars Brozus, *Wie Deutschland sein Negativ-Image loswerden kann*, Handelsblatt du 2.11.2013.

II. TRADUCTION DE FRANÇAIS EN ALLEMAND

Ich war damals etwa dreiundzwanzig. In einer Kneipe in der Nähe des Hafens tauschte ein Mann ein paar nichtssagende Worte mit mir, dann fragte er mich, ob ich etwas Geld verdienen wolle.

Überrascht bis misstrauisch fragte ich ihn, was ich dazu tun müsse. Hätte er mir alles von vorne herein gesagt, so hätte ich ihm vermutlich keinen Glauben geschenkt, oder ihn gar für einen Verrückten gehalten. Er war aber geschickt und unterbreitete mir sein Angebot nur Stück für Stück. Durch meine Fragen half ich ihm ungewollt, seinen Vorschlag als ehrlichen Vertrag darzustellen.

Er spendierte mir ein Bier, das ich langsam trank, während er sich weiterhin in Dankesbezeigungen und Erklärungen erging, das Ganze wirr und verlegen oder aber absichtlich konfus, um mir zu verstehen zu geben, was er von mir erwartete. Nach einer Weile fügte er hinzu : „Gehen wir ?“, was wie eine Aufforderung und ein Befehl klang.

„Jawohl !“. Ich folgte ihm etwa zehn Minuten lang in Richtung Oberstadt...

Ich fürchtete mich nicht vor Schlägereien, ich hatte ja nichts zu verlieren. In mir stritten sich Neugier und Aufregung, ein innerer Lachkrampf, etwas Demütigung und gleichzeitig eine Art unerklärlicher Ernst.

Nach François Gardé, *Pour trois couronnes*, Editions Gallimard, 2013.

LV1 - ESPAGNOL

DURÉE : 4 HEURES.

(La note sur 80 sera divisée par 4 pour obtenir la note sur 20, les deux chiffres après la virgule arrondis au dixième supérieur.)

Les candidats ne sont pas autorisés à modifier le choix de la première langue dans laquelle ils doivent composer. Tout manquement à la règle sera assimilé à une tentative de fraude.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document, dictionnaire ou lexique ; sauf en latin pour lequel un dictionnaire Latin-Français est autorisé ; l'utilisation de toute calculatrice ou de tout matériel électronique est interdite.

S U J E T

EL TIGRE QUE NUNCA DEBIÓ SALIR DE SU JAULA

- 1 En Cataluña hay un sustrato de mal encaje con el resto de España, en parte en virtud de unos episodios históricos, muy lejanos y yertos, pero que siempre pueden recalentarse con mucha guindilla para excitar al personal. En parte también, por el indudable *fet diferencial** del idioma catalán. Este tema no tiene por qué plantear
- 5 graves problemas, pero también puede especiarse y agitarse para enardecer a las masas. Hay también en Cataluña una vaga frustración, y unos celos violentos por no ser *el centro de España* y porque el idioma catalán tenga un relieve insignificante comparado con el castellano. Pero estos hechos están ahí y nunca van a desaparecer; son motivo de fricciones, pero, desde luego, no justifican el sepa-
- 10 ratismo: la incomodidad no es opresión; el que los ricos paguen más impuestos que los pobres no es expolio; *fets diferencials* los hay por todas partes: entre la Alemania danubiana y la báltica, entre la Francia mediterránea y Alsacia, hay tanta diferencia como puede haber entre las diferentes regiones españolas. Y no hablemos de Italia. El conllevarnos los unos a los otros ha sido la norma en la historia
- 15 de España y debemos reconocer que nunca nos había ido tan bien como estas últimas décadas. ¿Entonces por qué este *crescendo* del paroxismo separatista? Es muy sencillo: desde la asunción del poder por Jordi Pujol y su partido*, el gobierno catalán ha llevado a cabo una labor de adoctrinamiento de la población que no podía sino surtir sus efectos. Los instrumentos utilizados han sido todos los
- 20 resortes de Estado, pero sobre todo la educación y los medios de difusión. Se ha difundido entre la población catalana, desde la escuela primaria hasta la prensa y la televisión, una versión deformada y victimista de la historia, repleta de falsedades, como que en 1714 se hubiera aplastado a una nación catalana que luchaba por su independencia, que un ejército de ocupación hubiera impuesto una explo-
- 25 tación inicua, que se hubiera sometido a Cataluña a un expolio sistemático y de larga duración. La razón de este adoctrinamiento sistemático también es simple: el nacionalismo lo necesita para mantenerse en el poder. Todos los nacionalismos necesitan mitos, es decir, historias más o menos falseadas, para justificarse. Ahora bien, la ineficacia política y la corrupción de los gobiernos nacionalistas
- 30 resultaban demasiado evidentes. Según una reciente investigación de la Unión Europea, Cataluña es la región peor gobernada de España. No tiene que sorpren-

35 dernos: Jordi Pujol ya nos dio una muestra de incompetencia en la gestión de Banca Catalana, y también de la utilidad de envolverse en la *senyera* para evitar las consecuencias. De igual modo, la pésima gestión de los gobiernos naciona-
40 listas se oculta hoy tras un telón de retórica antiespañola. Los nacionalistas han endeudado a Cataluña hasta bordear la bancarrota; la corrupción es flagrante y omnipresente; pero la culpa de todo la tienen España y, especialmente, Madrid. La crisis lo ha precipitado todo: se va a Madrid a pedir ayuda con amenazas.
45 Se pide la independencia sin ambages. La población ya está acondicionada y así se olvida de las realidades económicas, que además se atribuyen, cómo no, a Madrid y a España. Cataluña será independiente y un nuevo estado en la Unión Europea. Pero como toda esta política independentista está basada en la improvisación y los arrebatos, ahora descubre la *Generalitat* que lo que se le había advertido era verdad; los tratados son muy claros: salir de España es salir de la UE, siendo el
50 reingreso problemático y, que, en el mejor de los casos, tardaría muchos años. La huida hacia adelante ha conducido al nacionalismo a un callejón sin salida. Tiene que volver al odiado Madrid a pedir que le saque del atolladero. Esto es muy difícil, porque hace falta mucho dinero y entre tanto a la población, enfervorizada por las promesas a plazo, no se la puede acallar. El año 2014 está a la vuelta de la esquina
55 y todo el movimiento independentista no va a comprender un frenazo en la recta final. El gobierno catalán está cabalgando el tigre que él mismo sacó de la jaula.

Gabriel Tortella, *El País*, 19/10/13

* fet diferencial: (en catalán) hecho diferencial

* Jordi Pujol: presidente de la Generalitat (CiU) de 1980 a 2003

I. VERSION*(sur 20 points)*

Traduire depuis : « Este tema ... » jusqu'à « ... estas últimas décadas. » (lignes 4 à 16)

II. QUESTIONS*(sur 40 points)***1. Question de compréhension du texte**

¿En qué consiste el « paroxismo separatista » evocado por Gabriel Tortella? (ligne 16)

*(100 mots ± 10 % ; sur 10 points)***2. Question de compréhension du texte**

Explicite la última frase en su contexto: « El gobierno catalán ... la jaula. » (ligne 51)

*(100 mots ± 10 % ; sur 10 points)***3. Question d'expression personnelle**

¿Qué comentario le sugieren las crecientes reivindicaciones nacionalistas en Cataluña?

(300 mots ± 10 % ; sur 20 points)

Le non-respect de ces normes sera sanctionné.

(Indiquer le nombre de mots sur la copie après chaque question).

III. THÈME*(sur 20 points)*

LE MYTHE BIEN COMMUNE DE LA « GÉNÉRATION Y »

« Nos jeunes ont de mauvaises manières, se moquent de l'autorité, et n'ont aucun respect pour l'âge », disait Socrate il y a près de deux mille cinq cents ans. Le regard porté par les plus anciens sur la génération montante a toujours été critique. Mais au-delà de la sagesse populaire que démontrent les études scientifiques ? Des jeunes plus infidèles aux entreprises que les générations précédentes ? Pas si évident. Plus sensibles à l'intérêt immédiat de leur travail qu'aux perspectives de carrière ? On ne parvient pas à le prouver. Plus altruistes, comme on le dit souvent ? Ce n'est pas flagrant non plus.

En fait le concept de « génération Y », quoique médiatique, file entre les doigts. Une génération se caractérise par une identité collective forgée par une expérience historique commune. La généralisation de l'usage des technologies numériques mobiles, le désenchantement politique, la récession économique de longue durée suffisent-ils à construire une telle identité ?

Laurent Giraud, *Le Monde*, 11/10/13.

CORRIGÉ

Par Nicolas Léger, professeur d'espagnol à l'Institution des Chartreux, à Lyon.

I. VERSION

Il n'y a pas de raison que cette question/ce sujet pose de graves problèmes, mais on peut aussi l' « assaisonner » et l'agiter pour enflammer la foule. Il y a aussi en Catalogne une frustration diffuse et une violente jalousie, parce qu'elle n'est pas *le centre de l'Espagne*, et parce que la langue catalane occupe une place insignifiante par rapport à l'espagnol. Mais les faits sont là, et il ne vont jamais disparaître ; ils sont à l'origine des frictions/accrochages mais, évidemment, ils ne justifient pas le séparatisme. L'inconfort n'est pas l'oppression ; le fait que les riches paient plus d'impôts que les pauvres n'est pas de la spoliation ; il y a des *faits différentiels* partout : entre l'Allemagne du Danube et de la Baltique, entre la France méditerranéenne et l'Alsace, il y a autant de différences que celles qu'il peut y avoir entre les différentes régions espagnoles. Sans parler de l'Italie. Dans l'histoire de l'Espagne, la norme a été de nous supporter mutuellement, et nous devons bien reconnaître que les choses ne s'étaient jamais aussi bien passées que ces dernières décennies.

III. THÈME

¿QUÉ HA HECHO EL CINE ESPAÑOL PARA MERECEER ESTO?

El mito muy cómodo de la «generación Y»

«Nuestros jóvenes tienen malos modales, se mofan/se burlan de la autoridad, y no tienen ningún respeto a los mayores», decía Sócrates hace casi dos mil quinientos años. La mirada de los más viejos sobre la generación ascendente siempre ha sido crítica. Pero más allá de la sabiduría popular, ¿qué demuestran estos estudios científicos? ¿Que los jóvenes son más infieles a las empresas que las generaciones anteriores? No es tan evidente/obvio. ¿Son más sensibles al interés inmediato de su trabajo que a las perspectivas laborales/profesionales? No se consigue/logra probarlo. ¿Son más altruistas, como se dice a menudo? Tampoco es flagrante/manifiesto.

De hecho/en realidad, el concepto de «generación Y», por muy mediático que sea, se nos va de las manos. Una generación se caracteriza por una identidad colectiva forjada/fraguada por una experiencia histórica común. La generalización del uso de las tecnologías digitales móviles, el desencanto/el desengaño político, la recesión económica de larga duración (= duradera), bastan para construir tal/ semejante identidad?

Especiar = «Añadir especias a un alimento para darle más sabor o hacerlo más gustoso» (Diccionario Manual de la Lengua Española Vox). On pouvait donc penser à « épicer » ou « pimenter ».

«como se suele decir» est possible.

On peut aussi employer des expressions comme «no lo tenemos tan claro», «no nos consta»...

Une traduction plus proche reste possible : «el concepto [...] es difícil de asir» ou «cuesta entender el concepto».

LV1 - ESPAGNOL

DURÉE : 4 HEURES.

Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document, dictionnaire ou lexique ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

1. TRADUCTIONS

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 2 HEURES.

I. TRADUCTION DU FRANÇAIS EN ESPAGNOL

- Oui, je suis convaincu que vous avez autant de chance que tout le monde, mais peut être ne prêtez-vous pas attention aux opportunités qui s'offrent à vous.
- C'est possible.
Je me demandais quelles opportunités j'avais pu laisser passer dans ma vie, et quel aurait été son cours si je les avais vues et saisies.
- Bon, maintenant, reprenons les différents éléments de votre rêve.
- L'élément central est de m'installer à mon compte en créant mon propre studio de photographies de mariage.
- Très bien, alors dites-moi : qu'est-ce qui vous en empêche ?
- En fait, j'ai bien peur de ne pas en être capable, même si ce projet m'attire énormément.
- Comment savez-vous que vous n'en seriez pas capable ?
- Je le sens : c'est tellement différent de mon métier actuel, de ce que j'ai l'habitude de faire. Peut-être est-ce trop important comme changement, et que je n'y arriverai pas.
- Si vous vous basez seulement sur un ressenti, alors vous n'avez pas le moyen de savoir si c'est la réalité ou juste une croyance limitante.
- Peut-être.
- Savez-vous comment on peut se mettre à croire que l'on n'est pas capable de faire une chose ?
- Non.
- Quand il existe quelque part une question, souvent non formulée consciemment, à laquelle on n'a pas la réponse.

Laurent Gounelle, *L'homme qui voulait être heureux*, Éditions Anne Carrière, 2008.

NB : On ne traduira pas le titre de l'œuvre.

II. TRADUCTION DE L'ESPAGNOL EN FRANÇAIS

En todas las casas sucedía lo mismo, en las de los falangistas y en las de los comunistas, siempre igual, los niños encerrados sin salir, por lo que pudiera pasar, porque aquello era una guerra que no se iba a acabar nunca. Madre nunca nos había dado explicaciones, y sin embargo, aquella vez su marido habló, y lo hizo en serio.

- No os pueden encontrar aquí. Por vuestro propio bien. ¿Está claro?

Le miré a los ojos y encontré en ellos una pesadumbre desconocida no sólo por su intensidad, sino también por su naturaleza confusa, híbrida de tristeza, de rabia, de vergüenza. Mi padre nunca me había parecido tan pequeño, y nunca tan grande, nunca tan humillado, ni tan orgulloso, y jamás había ejercido una autoridad semejante a la que aquella tarde me arrancó al mismo tiempo, ni un segundo, la curiosidad de los labios y el cuerpo de la silla.

- Por la puerta no podéis salir, mejor por la ventana. Voy a ver si hay alguien fuera. Cuando le vi entrar en su dormitorio, cogí a Pepa de la mano y me acerqué a madre, le tiré de la manga, me puse de puntillas para hablarle al oído, e improvisé con cautela un acento cómplice para avanzar una hipótesis descabellada, que sin embargo era la única que me ayudaba a comprender lo que estaba pasando.

- ¿Es que padre es rojo, madre?

Ella, distraída hasta entonces de puro asustada, se volvió de prisa, abrió mucho los ojos, levantó la mano en el aire, como si fuera a darme un cachete, y me habló en un susurro brusco y frenético, sin levantar la voz.

Almudena Grandes, *El lector de Julio Verne*, Episodios de una Guerra Interminable, Tusquets Editores, 2012.

NB : *On ne traduira pas le titre de l'œuvre*

2. EXPRESSION ÉCRITE

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 2 HEURES.

IBEROAMÉRICA A LA CARTA

En el istmo panameño, es la hora de la verdad para Iberoamérica. Entre dos océanos y dos siglos, Atlántico y Pacífico; entre Norte y Sur; entre el pasado y el futuro. Esta vez se quieren resultados: a la cumbre acuden las empresas a hablar de infraestructuras y logística, en un país que crece por encima del 7% anual. Pero la búsqueda de resultados cuantificables tiene que acompañarse de una reforma profunda para que la institución pueda sobrevivir. Desde Cádiz (2012) se viene hablando de renovación. Pero la cuestión de fondo sigue sin respuesta: ¿qué pretende ser Iberoamérica?, ¿un club de democracias avanzadas?, ¿un referente mundial en educación, tecnología punta, o cooperación?, ¿una voz de ámbito global en las finanzas, la lucha contra el narcotráfico, o el cambio climático? Reconozcámoslo: Iberoamérica aún no es nada de esto.

Desde la primera cita de 1991, el Mercosur, el ALBA, Unasur, la Alianza del Pacífico o la Comunidad de Estados Latinoamericanos (Celac) fueron creciendo en peso político y económico. Otros han surgido en la región para quedarse, como China. De este lado, en Maastricht (1993), España y Portugal sellaron su destino con Europa, hoy en graves dificultades. El nexo ibérico ha ido perdiendo protagonismo y utilidad para los latinoamericanos, hasta arrinconar el concepto mismo de lo iberoamericano, y a las propias cumbres.

El informe elaborado por el equipo del expresidente Ricardo Lagos para Panamá puede servir de guía en algunos aspectos. Sin embargo, de poco servirá si el día después de la cumbre los 22 mandatarios –empezando por España– no le dan un sentido de urgencia mucho mayor que evite la decadencia. Por ejemplo, se está presentando como un logro el fijar la bienalidad de las cumbres, para evitar la ausencia de altos mandatarios y dar más tiempo a configurar las agendas. Pero esto solo logrará aplazar el problema, no resolverlo. Siempre ha habido y habrá problemas de asistencia, principalmente porque las cumbres no son lo suficiente-

mente relevantes en relación con otros grandes encuentros, sean los de Unasur, el G-20 o la Asamblea anual de Naciones Unidas.

Y aquí reside la cuestión. Quizá lo mejor para evitar frustraciones por no ser un actor global, sería tener claros los límites de lo que Iberoamérica *puede ser*. Y para ello hay que reconocer lo que Iberoamérica es: una vasta familia cultural luso-española, con sociedades entrelazadas a uno y otro lado en múltiples vías de cooperación; pero muy diversa y totalmente abierta a influencias de su entorno: económicas, sociales, culturales. Ni más ni menos.

Por consiguiente, Iberoamérica debería concentrar los esfuerzos en su valor añadido natural respecto a otros foros: en educación, cooperación técnica o cultura. Especialmente, en lo que podríamos llamar el *producto cultural bruto* iberoamericano, de inmenso potencial en influencia y negocio por la vía de las industrias culturales e Internet. A este respecto, resulta prometedor el interés del Brasil de Rousseff –ya Lula afianzó el español en las escuelas– en impulsar un gran programa de cultura digital iberoamericana.

Pero Iberoamérica es también heterogeneidad: panameños, brasileños, bolivianos colombianos o mexicanos no pueden tener las mismas expectativas. Lo más importante es que todos sus miembros encuentren una utilidad concreta en su marco. Por eso, en la larga negociación que debe abrirse a partir de Panamá, sería importante que Madrid y Lisboa ofrezcan un marco muy flexible de acción para nuestros socios latinoamericanos, donde todos se sientan cómodos. En suma, una Iberoamérica a la carta que sirva de refuerzo y de facilitador de los otros foros –de mayor perfil político– y programas que hoy son prioritarios para la región, y con los que se pueden crear múltiples sinergias. Dicha flexibilidad es extensible a aspectos como una posible doble sede de la Secretaría General Iberoamericana (Segib), su estructura interna, o la persona sustituta del secretario general, Enrique Iglesias. Desde tal planteamiento, se podría abrir el melón de una nueva financiación, para distribuir las cargas –y poner fin a inercias absurdas como la de que España y Portugal aportan el 70% del presupuesto– y también aumentar la dotación total de la Segib. Un coliderazgo con Brasil y México sería clave para lograrlo. De manera análoga a las cooperaciones reforzadas en Europa, las iniciativas de países individuales, o grupos de países, incrementarían exponencialmente los fondos voluntarios para programas concretos donde la presencia ibérica otorgue un valor añadido: intercambios universitarios, investigación industrias audiovisuales, cooperación tributaria o de justicia. La Iberoamérica a la carta podría facilitar las transacciones con Europa, como uno de los menús principales para nuestros socios latinoamericanos, y ahí España siempre tiene mucho que ganar. En el ámbito eurolatinoamericano el volumen de empresas y de capital político en juego es incomparablemente mayor que lo aportado por España y Portugal, y desde ahí sí se puede jugar mejor la carta global en inversión, infraestructuras, finanzas o seguridad. Podemos poner mucho más en valor la Segib en Europa, conectándola con el Consejo, la Comisión y el Parlamento, y también aportando su experiencia en la creación de una Secretaría Permanente Eurolatinoamericana, a1go muy deseable para promover el seguimiento y las sinergias de los planes de acción de iberos y europeos con los latinoamericanos.

Vicente Palacio, *El País*, 18 de octubre de 2013.

Répondez en espagnol aux questions suivantes :
(250 mots environ pour chaque réponse)

1. ¿Cuáles son, según el periodista, los motivos de la decadencia de este foro internacional y cómo podría reformarse?
2. ¿Qué *puede ser* Iberoamérica en el futuro? Justifique su respuesta.

I. TRADUCTION DU FRANÇAIS EN ESPAGNOL

- Sí, estoy convencido de que usted tiene tanta suerte como toda la gente, pero quizás no preste atención a las oportunidades que se le ofrecen.
- Es posible.

Yo me preguntaba cuáles eran las oportunidades que había podido dejar pasar en mi vida, y cuál habría sido su curso si las hubiera visto y las hubiera aprovechado.

- Bueno, ahora, sigamos considerando los diferentes elementos de su sueño.
- El elemento central es establecerme por cuenta propia creando mi propio estudio de fotografías de bodas.
- Muy bien, entonces dígame: ¿qué se lo impide?
- Es que me temo no ser capaz de ello, aunque este proyecto me atraiga muchísimo.
- ¿Cómo sabe que no sería capaz?
- Lo siento en mí: es tan diferente de mi oficio actual, de lo que suelo hacer. Quizás sea un cambio demasiado importante y no lo consiga.
- Si solo se basa sobre una impresión, entonces no tiene la posibilidad de saber si es la realidad o solo una creencia limitante.
- Quizás.
- ¿Sabe usted cómo podemos ponernos a creer que no somos capaces de hacer algo?
- No
- Cuando en alguna parte existe una pregunta, a menudo no formulada conscientemente, para la que no tenemos respuesta.

Laurent Gounelle, *L'homme qui voulait être heureux*, Editions Anne Carrière 2008.

II. TRADUCTION DE L'ESPAGNOL EN FRANÇAIS

Dans toutes les maisons il se passait la même chose, dans celle des phalangistes et dans celle des communistes, c'était toujours pareil, les enfants étaient enfermés sans pouvoir sortir, à cause de ce qui pourrait se passer, parce que tout cela était une guerre qui n'allait jamais se terminer. Mère ne nous avait jamais donné d'explications, et cependant, cette fois-là son mari parla, et il le fit sérieusement.

- Ils ne peuvent pas vous trouver ici. C'est pour votre propre bien. C'est clair ?

Je le regardai dans les yeux et je trouvai en eux un chagrin inconnu, non seulement par son intensité, mais également par sa nature confuse, mélange de tristesse, de rage et de honte. Mon père jamais ne m'avait paru aussi petit, ni jamais aussi grand, jamais aussi humilié, ni aussi fier, et jamais il n'avait exercé une autorité semblable à celle qui, cet après-midi-là, en moins d'une seconde m'ôta les questions de la bouche et en même temps, me fit me lever de ma chaise précipitamment.

- Vous ne pouvez pas sortir par la porte, c'est mieux par la fenêtre. Je vais voir s'il y a quelqu'un dehors.

Quand je le vis entrer dans sa chambre, je pris Pepa par la main et je m'approchai de mère, tirai sur sa manche, me hissai sur la pointe des pieds pour lui parler

à l'oreille, et improvisai prudemment un ton de voix complice pour avancer une hypothèse tirée par les cheveux, qui cependant était la seule qui m'aidait à comprendre ce qui était en train de se passer ;

- Père est un rouge, c'est ça, mère ?

Jusqu'alors perdue, tellement elle était effrayée, elle se retourna vivement, écarquilla les yeux, leva la main en l'air, comme si elle allait me donner une gifle, et me parla dans un chuchotement, à la fois brusque et frénétique, sans élever la voix.

LV1 - ITALIEN

DURÉE : 4 HEURES.

(La note sur 80 sera divisée par 4 pour obtenir la note sur 20, les deux chiffres après la virgule arrondis au dixième supérieur.)

Les candidats ne sont pas autorisés à modifier le choix de la première langue dans laquelle ils doivent composer. Tout manquement à la règle sera assimilé à une tentative de fraude.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document, dictionnaire ou lexique ; sauf en latin pour lequel un dictionnaire Latin-Français est autorisé ; l'utilisation de toute calculatrice ou de tout matériel électronique est interdite.

SUJET

TALK SHOW, INTERNET E BLA BLA GLOBALE. COSÌ COMINCIA L'ECLISSI DELLA POLITICA.

- 1 In un articolo di alcuni anni fa Umberto Eco calcolava, con paradossale ma oggettiva e inconfutabile precisione, il tempo da dedicare alla propria ricerca e alla propria specifica attività che rimane a uno studioso, in una giornata, detratte le ore destinate al sonno, ai pasti, alla toilette, alle urgenze burocratiche, alla corrispondenza, ecc.... Non ricordo la cifra che risultava da quel computo accurato, ma si trattava di una minima frazione di tempo, certo insufficiente a qualsiasi approfondimento di qualsiasi ricerca o argomento. Ovviamente la porzione di tempo residuo è tanto più esigua quanto più vasta è la notorietà del bersagliato....
- 5 Quel calcolo di Eco darebbe risultati sempre comici ma ancor più allarmanti – e più gravi, per le conseguenze che implicano per la realtà del Paese – se fosse applicato all'attività dei politici, dalla quale dipende la vita del Paese. Quante ore un politico può dedicare realmente allo studio dei problemi che incalzano il Paese e ai modi in cui risolverli ?
- 10 Vi sono ad esempio innumerevoli, gravose ancorché ineliminabili e significative attività rappresentative, che assorbono sempre di più specialmente chi occupa una posizione autorevole e ufficiale: le ricorrenze, le cerimonie, gli incontri con tutte le forze e le categorie possibili e immaginabili, le inaugurazioni. Tutto ciò è necessario e riveste pure un valore simbolico reale, ma la crescente inflazione di tali obblighi rituali esige e divora sempre più tempo, lasciandone sempre meno al reale lavoro politico, al quale rimane, di lavoro effettivo, qualche manciata di minuti frantumata da continue interruzioni.
- 15 Un ulteriore colpo di spugna, che cancella non il reale, bensì la possibilità di studiarlo e cambiarlo, è costituito dalla proliferazione dei talk show politici, dalle trasmissioni televisive consacrate alla politica. Non è in questione la loro qualità, ma la loro espansione cancerosa, che sembra occupare sempre più totalmente e dunque divorare, consumare, distruggere la politica concreta. Partecipare a un talk show politico richiede tempo: il viaggio o anche solo la traversata del traffico della grande città; le inevitabili ritualità e attese prima dell'inizio; nelle ore precedenti, la messa a punto delle cose da dire; in certi casi l'ansante informazione su
- 20 dati riguardanti il tema della serata, che non sempre, comprensibilmente, il leader
- 30

o mini leader o esponente di una o dell'altra parte politica conosce, perché non si può conoscere tutto.

In quelle circostanze, non si è più sé stessi quanto piuttosto segretari di sé stessi. Nessuno prende parte a una trasmissione politica televisiva per portare un reale
35 contributo, ancorché minimo, alla soluzione di un problema, ma soltanto perché bisogna esserci. Non per vincere, ma per non fare brutta figura, per non perdere.

Una macchina divoratrice parassitaria di tempo e dunque intralcio allo studio dei problemi da risolvere sembra diventare pure il web, peraltro nato per comunicare e capace di permettere una straordinaria comunicazione, come è tante volte acca-
40 duto e ancora accade. Ma pure il web sta diventando una fissazione maniacale, fonte di rapporti spesso astratti e irreali, che – anziché far conoscere il mondo grazie al computer – fa conoscere il computer invece del mondo, come nella famosa storia di quel tale che, quando gli mostrano la luna, non guarda la luna ma il dito che la indica. Strumento di democrazia, il web può diventare un'assemblea pulsio-
45 nale indistinta, che nega la democrazia ed è forse un sintomo rilevante di quella crisi della democrazia rappresentativa che sempre più ci sgomenta e che Tocqueville ha previsto con centocinquant'anni di anticipo, vedendo nell'America, culla e baluardo della democrazia, il laboratorio della sua degenerazione e dei rimedi a quest'ultima.

50 Le trasmissioni politiche televisive sono, in genere, condotte egregiamente e costituiscono un accattivante spettacolo per chi le guarda, probabilmente fra i più accattivanti fra quelli offerti dalla televisione. Ma bisogna sapere che, così come un affascinante film o telefilm giallo non contribuisce a combattere la criminalità, un talk show politico non contribuisce, neanche indirettamente e alla lontana, ad
55 aumentare la produttività, a migliorare l'assistenza sociale o a facilitare un accordo di governo. È una cosa simpatica per chi la guarda e sostanzialmente sterile per chi vi prende parte, come è sterile il crescente predominio, ormai necessario ma non perciò meno soffocante, del dire sul fare.

D'après Claudio Magris, *Il Corriere della sera*, 8 maggio 2013.

I. VERSION*(sur 20 points)*

Traduire depuis le début du texte, « In un articolo di alcuni anni fa ... », jusqu'à « ... modi in cui risolverli ? ». De la ligne 1 à la ligne 13.

II. QUESTIONS*(sur 40 points)***1. Question de compréhension du texte**

Spiegare: « il crescente predominio del dire sul fare ». (Ligne 57)

(100 mots + ou – 10 % ; sur 10 points)*

2. Question de compréhension du texte

Spiegare: « la macchina divoratrice parassitaria di tempo ». (Ligne 37)

(100 mots + ou – 10 % ; sur 10 points)*

3. Question d'expression personnelle

Il Web, strumento di conoscenza universale e di democrazia ? Cosa ne pensate ?

(300 mots + ou – 10 % ; sur 20 points)*

** Le non-respect de ces règles sera sanctionné.*

(Indiquer le nombre de mots sur la copie après chaque question)

III. THÈME*(sur 20 points)***DES MONSTRES SUR LA LAGUNE**

Devant le Palais des Doges, un paquebot dressé comme un immeuble de huit étages surmonté d'une cheminée crachant un panache noir, glisse sur les eaux, démesuré, absurde, dominant de toute sa hauteur les toits de tuile rouge de Venise. « C'est une vision de cauchemar », lâche Maria Grazia, une guide touristique à Venise. Les remous qu'il provoque sur la lagune font trembler les fenêtres de son appartement donnant sur le quai. Vingt fois par jour, un de ces monstres flottants traverse la ville-musée. A les voir défiler, on se demande si Venise et la lagune, classées au patrimoine mondial par l'Unesco en 1987, sont encore réellement protégées. Censées préserver ce joyau pour les générations futures, les autorités italiennes ont apparemment du mal à s'organiser. En attendant, le trafic continue.

Le Nouvel Observateur, 02/08/12.

I. VERSION

**TALK SHOW, INTERNET ET BLA BLA GLOBAL.
VOICI LE DÉBUT DE LA FIN DE LA POLITIQUE.**

Il y a quelques années Umberto Eco, dans un de ses articles, calculait avec une précision paradoxale mais à la fois objective et irréfutable, le temps restant à un chercheur pour se consacrer à sa recherche et à son activité spécifique, une fois déduites les heures destinées au sommeil, aux repas, à la toilette, aux urgences bureaucratiques, à la correspondance etc. J'ai oublié le chiffre qui résultait de ce méticuleux calcul mais il s'agissait d'une toute petite fraction de temps, bien entendu insuffisante à n'importe quel approfondissement de quelque recherche ou sujet que ce soit. Evidemment la portion de temps restante est d'autant plus minime que la notoriété du sujet est grande ...

Ce calcul d'Eco donnerait des résultats tout aussi comiques mais encore plus alarmants – et plus graves par les conséquences qu'ils impliquent pour la réalité du Pays – s'ils étaient appliqués à l'activité des hommes politiques dont dépend la vie du Pays. Combien d'heures un homme politique peut-il consacrer à l'étude des problèmes prioritaires du Pays et aux moyens de les résoudre ?

III. THÈME

DEI MOSTRI SULLA LAGUNA

Davanti al palazzo ducale un piroscampo innalzato come un palazzo da otto piani con sopra una ciminiera che sputa un pennacchio nero, scivola sulla acque, smisurato, assurdo, dominando da tutta la sua altezza i tetti di tegola rossa di Venezia. « È una visione da incubo » lascia Maria Grazia, una guida turistica a Venezia. I mulinelli provocati sulla laguna fanno tremare le finestre del suo appartamento che si affaccia sulla banchina. Venti volte al giorno uno di questi mostri galleggianti attraversa la città museo. Nel vederli sfilare ci si domanda se Venezia e la laguna, iscritte al patrimonio mondiale dall'Unesco dal 1987, siano ancora davvero protette. Tenute a preservare questo gioiello per le future generazioni, le autorità italiane fanno apparenemente fatica ad organizzarsi. Intanto il traffico prosegue.

Le Nouvel Observateur, 02/08/12.

LV2 - ANGLAIS

DURÉE : 3 HEURES.

(La note sur 80 sera divisée par 4 pour obtenir la note sur 20, les deux chiffres après la virgule arrondis au dixième supérieur.)

Les candidats ne sont pas autorisés à modifier le choix de la deuxième langue dans laquelle ils doivent composer. Tout manquement à la règle sera assimilé à une tentative de fraude.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document, dictionnaire ou lexique ; sauf en latin pour lequel un dictionnaire Latin-Français est autorisé ; l'utilisation de toute calculatrice ou de tout matériel électronique est interdite.

S U J E T

AMERICANS SHARPLY SPLIT ON PRIVACY ISSUES

- 1 The Edward Snowden leak case, which exposed some of the practical elements of NSA surveillance operations unknown to many Americans, has also revealed just how divided the nation remains over whether the government should be permitted to intrude on privacy to safeguard national security.
- 5 According to the Pew Research Center, 56% of Americans think the «NSA getting secret court orders to track calls of millions of Americans» is acceptable. For many, such intrusions are legitimate sacrifices if intelligence-gathering programs can help fend off terrorist threats. That surprises privacy experts. “The same people who are unwilling to trust the government in any other walk of life,” says Elizabeth Goitein, 10 co-director of the Liberty and National Security Center at NYU’s Brennan Center for Progress, “are oddly willing to give absolute trust and control to the government on issues of national security.”

There is also considerable dispute over the limits of our privacy rights. Many law-makers believe the NSA’s monitoring programs are completely legal. Groups like 15 the Electronic Information Privacy Center, a public interest research group that recently petitioned the Supreme Court to stop NSA collection of domestic telephone call data, hope to see the programs examined and struck down by the High Court, which could consider the challenge as soon as the fall.

Experts say the NSA’s collection of telephone metadata is the most worrisome of 20 the revelations Snowden helped bring to light. While the PRISM program targets suspicious foreigners using sites like Google and Facebook, it is only supposed to pull Americans into the surveillance web if they are linked to those targets. The telephone metadata program requires Verizon, and likely many other cell phone carriers, to provide the NSA with all of its customer call detail records. Mark Roten- 25 berg, the Executive Director of the Electronic Information Privacy Center (EPIIC), a public interest research center that recently petitioned the Supreme Court to stop NSA collection of domestic telephone call data, wrote recently that this collection is the most significant of the programs revealed in the leaks.

The secrecy surrounding these surveillance programs means we don't know exactly how much-or how little-privacy we have. A secret court, which "operates without anyone representing the other side." sanctions the NSA programs, says Goitein. "There's really no appeal."

Goitein predicts that as abuses come to light, conservatives who back the programs as mechanisms to stave off terrorism may "become less afraid of the original national security threat," she says, "and more protective of their own civil liberties and their own privacy."

By Miles Graham, *TIME*, Aug. 01, 2013.

I. VERSION

(sur 20 points)

Traduire à partir de « The Edward Snowden leak case ... » jusqu'à « ... on issues of national security. » (De la ligne 1 jusqu'à la ligne 12)

II. QUESTIONS

(sur 40 points)

1. Question de compréhension du texte

What contrasting reactions have been provoked by the American government's surveillance program?

(150 mots + ou - 10 %* ; sur 20 points)

2. Question d'expression personnelle

At a time when most people expose their private lives online through social media, is it fair to complain about government surveillance?

(250 mots + ou - 10 %* ; sur 20 points)

* Le non-respect de ces normes sera sanctionné. Indiquer le nombre de mots utilisés.

III. THÈME

(sur 20 points)

- D'importants progrès ont été accomplis dernièrement dans la lutte contre la corruption.
- Les grévistes étaient prêts à continuer leur mouvement, lorsqu'un accord fut trouvé.
- Quelle nouvelle incroyable que la démission du premier ministre !
- Cela fait plus de quarante ans que le Royaume-Uni est membre de l'Union européenne.
- Ne devrait-on pas donner à tout citoyen la possibilité de reprendre ses études ?
- Les ventes en ligne permettront-elles à cette marque d'améliorer son image ?
- Il est à craindre que nous manquions de pétrole plus tôt que prévu.
- Grâce à la détermination de leurs avocats, la plupart des clients ont été remboursés.
- Il est évident qu'on écrit beaucoup moins de lettres depuis l'arrivée d'Internet.
- Les loyers londoniens ont toujours été parmi les plus élevés au monde.

CORRIGÉ

Par Alain Goudot, professeur de Chaire supérieure d'anglais en CPGE économique et commerciale au lycée de Bellepierre à Saint-Denis de la Réunion.

IENA

CORRIGÉ

I. VERSION

L'affaire des fuites d'Edward Snowden qui a dévoilé quelques éléments concrets des opérations de surveillance, inconnues de beaucoup d'Américains, menées par l'Agence Nationale de Sécurité (NSA), a aussi mis au jour le degré latent de polarisation de la nation sur la question du droit du gouvernement à s'immiscer dans la vie privée pour sauvegarder la sécurité nationale.

Selon le Centre de Recherche Pew, 56 % des Américains pensent « qu'autoriser la NSA à exploiter des décisions de justice secrètes pour espionner des appels téléphoniques de millions d'Américains » est acceptable. Pour beaucoup d'entre eux, de telles intrusions sont des sacrifices légitimes si les programmes de collecte de renseignements secrets peuvent aider à repousser/parer les menaces terroristes. Voilà qui surprend les experts de la vie privée. « Ceux-là même qui répugnent à accorder leur confiance au gouvernement dans n'importe quel autre domaine de la vie politique/courante », déclare Elizabeth Goitein, co-directrice du Centre de Liberté et Sécurité Nationale au Centre Brennan pour le Progrès de New-York, « sont étrangement disposés à accorder au gouvernement une confiance et une autorité absolues en matière de problèmes de sécurité nationale ».

III. THÈME

1. Great progress has recently been made in the fight against corruption.
2. The strikers were ready to continue their strike action when an agreement was reached.
3. What incredible news the resignation of the Prime Minister was!
4. The United Kingdom has been an EU member for over forty years.
5. Should we not give every citizen the opportunity to resume their studies/take up their studies again?
6. Will online sales enable this brand to improve its image?
7. It is to be feared that we might run out of oil sooner than expected.
8. Thanks to their lawyers' resolve, most customers were paid back/reimbursed.
9. It is obvious far fewer letters have been written since the advent of the Internet.
10. The cost of renting in London has always been among the highest in the world.

SCIENT. ECO. TECHNO. KHÂGNE

LV2 - ANGLAIS

LV2 - ANGLAIS

DURÉE : 3 HEURES.

Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document, dictionnaire ou lexique ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

1. TRADUCTIONS

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 1 HEURE 30.

I. TRADUCTION DE FRANÇAIS EN ANGLAIS

La conversation était lancée. Elle était très naturelle, sans inhibition, capable de parler de tout avec tout le monde, avec beaucoup de bonne humeur. Pourtant, je sentis que quelque chose la préoccupait. Elle continuait, tout en bavardant, à fouiller dans son sac, à tripoter son agenda, à regarder sa montre. Quand mon téléphone signala l'arrivée d'un Texto, je compris qu'elle l'attendait impatientement.

- Pardon, dit-elle, j'ai demandé qu'on m'envoie une réponse ...

Je lui repassai le téléphone de bonne grâce.

- C'est ta maman qui s'inquiète ?

- Pas ma mère, non, fit-elle distraitemment, en ouvrant le message.

Elle lut le texte en silence, sans changer d'expression.

- Mon fiancé.

Elle pianota sur le clavier pour effacer le message et me rendit l'appareil.

- C'est un Allemand, annonça-t-elle gravement. ... /...

Je ne savais pas si son ton était destiné à donner de l'importance à cette information ou si cette annonce revêtait un caractère tragique, comme la révélation d'une maladie grave.

Train de vie, (Sept histoires qui reviennent de loin) Jean-Christophe Rutin, Editions Gallimard, 2011.

II. TRADUCTION DE L'ANGLAIS EN FRANÇAIS

Madeleine shrugged this off. "I got a lot better idea of what deconstruction is from reading Culler than from reading Derrida."

Thurston took pains to give her point of view consideration. "It's the nature of a simplification to be simple," he said.

Class ended shortly after that, leaving Madeleine fuming. As she was coming out of Sayles Hall, she saw Leonard standing on the steps, holding a Coke can. She went right up to him and said, "Thanks for the help."

"Excuse me?"

"I thought you were on my side. Why didn't you say anything in class?"

"First Law of Thermodynamics," Leonard said. «Conservation of energy.»

"Didn't you agree with me?"

"I did and I didn't," Leonard said.

"You didn't like the Culler?"

"The Culler's good. But Derrida's a heavyweight. You can't just write him off."

Madeleine looked dubious, but Derrida wasn't who she was mad at. «Considering how Thurston's always going on about how much he *worships* language, you'd think he wouldn't parrot so much jargon .../...

“He drives me crazy.”

“You want to get some coffee?”

“And *fascist*. That's another of his favorites. You know the dry cleaners on Thayer Street?

He called *them* fascist.”

“Must have gone extra heavy on the starch.”

The Marriage Plot, Jeffrey Eugenides, Farrar, Straus and Giroux, 2011.

2. EXPRESSION ÉCRITE

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 1 HEURE 30

WHEN it comes to the economic malaise facing America, the biggest problem is not the widening gap between rich and poor, but the stagnation of social mobility. When the income gap of one generation becomes an opportunity gap for the next, inequality hardens into social stratification. Eliminating the income gap is relatively straightforward (if politically fraught): raise taxes and expand government assistance for lower-income workers. Kick-starting social mobility, once it has slowed, is much more difficult.

It is important to be clear what we are talking about. There are two distinct kinds of intergenerational mobility. Absolute mobility is a measure of whether a person is financially better off than his or her parents were at the same age. Relative mobility, in contrast, is a measure of which rung of the income ladder a person lands on, compared with his or her parents' position. If everyone made twice what their parents did, everyone is upwardly mobile, in absolute terms – but since their rank position on the income ladder is the same as their parents', relative mobility would be zero. We can improve rates of upward absolute mobility by simply expanding the economy. But improving rates of upward relative mobility from the bottom comes with a sting in the tail: it requires more downward mobility from the top.

It is well known that in the United States, income distribution has a “sticky floor.” Twofifths of children born into the poorest fifth of households remain there as adults. But it is sticky at the top, too: the same odds apply to those born into the richest fifth. It is a stubborn mathematical fact that the top fifth of the income distribution can accommodate only 20 percent of the population. If we want more poor kids climbing the ladder of relative mobility, we need more rich kids sliding down the chutes.

Even the most liberal parents are unlikely to be comfortable with the idea that their own children should fall down the scale in the name of making room for a smarter kid from a poorer home. They invest large amounts of economic, social and cultural capital to keep their own children high up the social scale. As they should: there is nothing wrong with parents doing the best by their children.

The problem comes if institutional frameworks in, say, the higher education system or the labor market are distorted in favor of the powerful – a process the sociologist Charles Tilly labeled “opportunity hoarding.” The less talented children of the affluent are able to defy social gravity and remain at the top of the ladder, reducing the number of places open to those from less fortunate backgrounds.

One potential danger zone for opportunity hoarding is access to higher education. College matters a lot for social mobility. For someone from a poor background, getting a four-year degree virtually guarantees upward mobility. Elite colleges act as gateways to the best career paths. Getting more poor kids into colleges, and getting the brightest into the best colleges, ought to be a national mission. [...]

Opportunity hoarding can also occur in the allocation of workplace positions. Half of all jobs are found through family or friends, and these informal networks are likely to perpetuate existing inequalities. [...]

While politicians discuss social mobility as a pain-free goal, the unspoken, uncomfortable truth is that relative mobility is a zero-sum game. Opening more doors to applicants from low-income backgrounds often means closing more doors to affluent applicants.

This is delicate territory. Nobody wants parents to stop trying hard for their children. But nor do we want a society in which the social market is rigged in favor of those born into affluence. If we want a competitive economy and an open society, we need the best and brightest to succeed. This means some of the children of the affluent must fail.

The New York Times Online, September 29, 2013.

Répondre en ANGLAIS aux questions suivantes :
(environ 200 mots pour chaque réponse)

1. According to the text, what factors prevent greater social mobility in the USA?
Answer the question in your own words.
2. In addition to education, what other factors could contribute to greater social mobility?

CORRIGÉ

Par Philippe Rayet, agrégé d'anglais, professeur en classes préparatoires au lycée Notre-Dame-du-Grandchamp à Versailles.

CCIR

CORRIGÉ

I. TRADUCTION DU FRANÇAIS A L'ANGLAIS

The conversation had got off to a good start. She sounded very natural, had no inhibitions and was capable of speaking about anything with anybody, bubbling with good humour. Yet [However], I felt that something was troubling her. As she was talking, she kept rummaging around in her bag, fiddling with her diary and casting (worried) glances at her watch. When my mobile phone text alert beeped to say that I had a message, I understood that she had been expecting it impatiently. "I'm sorry," she said, "I('ve) asked for a reply." I handed my mobile to her again with good grace [willingly].

"Is it your mother who's getting worried?"

"Not my mum, no," she answered distractedly [absent-mindedly] as she opened the message. She read it without saying a word or changing her facial expression. "My fiancé," she added. Then, she tapped away at the keyboard (in order) to erase the message and handed me back the mobile.

"He's German," she announced gravely [solemnly]. [...] I did not know [I wondered] if that tone (of voice) was meant to lay emphasis [stress] on this specific (piece of) information or if there was something tragic about the announcement, like the revelation of a serious illness.

Jean-Christophe Rufin, "Train de Vie" in *Sept histoires qui reviennent de loin*, 2011 .

II. TRADUCTION DE L'ANGLAIS AU FRANCAIS

Madeleine ne releva pas.

- Je me suis fait une idée bien plus précise de ce qu'est la déconstruction en lisant Culler qu'en lisant Derrida, dit-elle.

Thurston s'employa à prendre son point de vue en considération.

- C'est le propre d'une simplification que d'être simple, répondit-il.

Il termina son cours peu (de temps) après, laissant Madeleine furibarde. Comme elle sortait de Sayles Hall, elle aperçut Leonard qui était sur les marches, une canette de coca à la main. Elle alla droit vers lui et (lui) dit :

- Je te remercie pour ton aide !

- Je te demande pardon ?

- Je pensais que t'étais de mon côté. Pourquoi t'as rien dit pendant le cours ?

- Le premier principe de la thermodynamique, dit Leonard, c'est la conservation de l'énergie.

- Mais t'étais pas d'accord avec moi ?

- Je l'étais et je l'étais pas, répondit Leonard.

- T'as pas aimé le bouquin de Culler ?

- Culler, c'est bien, mais Derrida, (à côté), c'est (vraiment) une pointure ! Tu peux pas te contenter de faire une croix dessus.

Madeleine semblait dubitative, mais ce n'était pas contre Derrida qu'elle était fâchée.

SCIENT. ECO. TECHNO. KHÂGNE

LV2 - ANGLAIS

- Si on considère que Thurston n'arrête pas d'insister sur l'immense vénération qu'il a pour le langage, on a du mal à imaginer qu'il puisse se plaisir à utiliser tout ce charabia. [...] Moi, il me rend dingue.
- Tu veux prendre un café ?
- Y'a aussi le mot « fasciste » qui revient tout le temps. Tu connais ceux qui tiennent la teinturerie dans Thayer Street ? Même eux, il les a traités de fascistes !
- Ils avaient dû trop forcer sur l'amidon...

Jeffrey Eugenides, *The Marriage Plot : A Novel*, 2011.

LV2 - ALLEMAND

DURÉE : 3 HEURES.

(La note sur 80 sera divisée par 4 pour obtenir la note sur 20, les deux chiffres après la virgule arrondis au dixième supérieur.)

Les candidats ne sont pas autorisés à modifier le choix de la deuxième langue dans laquelle ils doivent composer. Tout manquement à la règle sera assimilé à une tentative de fraude.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document, dictionnaire ou lexique ; sauf en latin pour lequel un dictionnaire Latin-Français est autorisé : l'utilisation de toute calculatrice ou de tout matériel électronique est interdite.

SUJET

ZU HAUSE IST ALLES SO ANGENEHM!

- 1 Seit ein paar Jahren teilt **Josef Kraus**, 64, Leiter eines Gymnasiums, seine Arbeitstage in zwei Hälften. Die erste, die Schülerhälfte, beginnt mit dem ersten Schulgong; in der Regel verläuft sie problemlos. Mal schlagen sich zwei Jungs im Korridor, mal nimmt ein Lehrer einem Schüler im Unterricht das Handy ab. Die zweite, die Elternhälfte, beginnt gegen 14.15 Uhr, mit den Telefonanrufen im Sekretariat. Dann sind Mama oder Papa am Apparat. Sie beurteilen das, was am Vormittag geschehen ist, meist anders als **Kraus**.

- Kraus** ist Präsident des Deutschen Lehrerverbands, er spricht für rund 160.000 Pädagogen in Deutschland. Seine Lehrer wissen genau, worüber die Eltern immer 10 klagen: über die Sitzordnung in der Klasse, die Zahl der Englischvokabeln, das Gewicht der Schultasche, und – natürlich – den Klassiker, unfaire Noten.

- Gibt es irgendetwas, worüber sich Eltern nicht beklagen? „Sicher“, sagt **Kraus**, „die eigenen Kinder“. Stimmt. Die sind ja heilig. **Kraus** hat ein Buch geschrieben, es heißt „Helikopter-Eltern“. Der Ausdruck kommt aus dem Amerikanischen und 15 bezeichnet Eltern, die wie Helikopter ständig um ihre Kinder kreisen. Aus Angst, die lieben Kleinen könnten im Leben scheitern, überwachen sie ihre Kinder, Aus nächster Nähe kontrollieren sie, natürlich voller Liebe, Schullaufbahn, Studium und Karriere.

- In Deutschland verstanden sich Eltern und Kinder wohl noch nie so gut wie heute. 20 In der „Shell-Jugendstudie“ von 2010 gaben drei Viertel der Jugendlichen an, ihren Nachwuchs einmal so erziehen zu wollen, wie sie es von ihren eigenen Eltern kennen. Einen größeren Dank für Mutter und Vater gibt es nicht. Doch sind die Eltern für diesen Dank womöglich ein bisschen zu weit gegangen? Schaden sie den Kindern?

- 25 Im Jahr 2010 lebte über die Hälfte der jungen Frauen von 18 bis 24 Jahren noch bei Mama und Papa. Bei den jungen Männern waren es mehr als 70 Prozent. Der „Nesthocker“ wird zum Massenphänomen. Das hat viele Gründe: Die Ausbildung

dauert länger, die Mieten sind gestiegen, der Weg in den Beruf beginnt später. Aber auch: Daheim ist alles so schön!

- 30 Ist das jetzt schlimm? Nein, nicht an sich. Die Frage ist: Werden die Kinder heute noch erwachsen? Was wird aus einer Generation von Jugendlichen, denen die eigenen Eltern so viel Förderung und Hilfe geben wie möglich? Und die dabei womöglich vergessen, sie fit fürs Leben zu machen...

Nach einem Artikel von Kerstin KULLMANN, „Der SPIEGEL“, 33/2013.

I. VERSION

(sur 20 points)

Traduire le titre et les paragraphes 1 et 2, depuis : „Seit ein paar Jahren teilt Josef Kraus, 64, Leiter eines Gymnasiums, seine Arbeitstage in zwei Hälften ...“ jusqu'à : „... die Zahl der Englischvokabeln, das Gewicht der Schultasche, und – natürlich – den Klassiker, unfaire Noten.“ (de la ligne 1 à la ligne 11)

II. QUESTIONS

(sur 40 points)

1. Question de compréhension du texte

Was charakterisiert so genannte „Helikopter-Eltern“? Was ist problematisch an ihrem Verhalten?

(150 mots + ou – 10 %* ; sur 20 points)

2. Question d'expression personnelle

Was sollte die Rolle von Eltern und Lehrern in Erziehung und Ausbildung der Kinder sein?

(250 mots + ou – 10 %* ; sur 20 points)

* Le non-respect de ces normes sera sanctionné.

(Indiquer le nombre de mots sur la copie après chaque question).

III. THÈME

(sur 20 points)

1. Ne dis pas que ce diplôme est inutile car tu en auras besoin un jour.
2. La situation économique actuelle rappelle-t-elle à ton avis les années trente ?
3. Il est relativement simple de faire quotidiennement quelque chose de concret pour l'environnement.
4. Qui a déjà vu ce film américain dont parlent tous les médias ?
5. Bien qu'elle ait écrit de nombreuses lettres, elle n'a pas encore trouvé de stage.
6. Si la Bavière était indépendante, elle pourrait être la sixième puissance européenne.
7. Pour la troisième fois, une Grande Coalition a été formée en 2013 en Allemagne.
8. Avant de lire cet article, je ne comprenais pas les raisons de la grève.
9. Comme il maîtrise bien notre langue, ce jeune Espagnol travaille désormais chez nous.
10. Lorsque le gouvernement a augmenté les impôts, il a beaucoup perdu en popularité.

CORRIGÉ

Par Jean-Gilbert Delarbre, professeur de Chaire supérieure au lycée Michelet à Vanves.

IENA

CORRIGÉ

I. VERSION

A la maison, tout est si agréable !

Depuis quelques années, Josef Kraus, proviseur de lycée âgé de 64 ans, divise ses journées de travail en deux moitiés. La première, consacrée aux élèves, commence avec la première sonnerie ; en règle générale, elle se déroule sans problème. Parfois, deux garçons se battent dans le couloir, parfois un professeur confisque son portable à un élève pendant le cours. La deuxième moitié, dévolue aux parents, débute vers 14 heures 15, avec les appels téléphoniques au secrétariat. Maman ou papa sont alors au bout du fil. Ils jugent ce qui s'est passé dans la matinée le plus souvent autrement que Kraus.

Kraus préside le Deutscher Lehrerverband, association des enseignants allemands. Il est le porte-parole d'environ 160 000 pédagogues en Allemagne. Ses professeurs savent bien sur quoi portent les sempiternelles plaintes des parents : sur le plan de classe, le nombre de mots de vocabulaire d'anglais, le poids du car-table et -naturellement- sur les notes jugées injustes, un classique.

D'après un article de Kerstin KULLMANN, « Der Spiegel », 33/2013.

III. THÈME

1. Sag nicht, dass dieses Diplom unnützlich ist, denn du wirst es eines Tages brauchen.
2. Erinnerung deiner Meinung nach die aktuelle wirtschaftliche Situation an die dreißiger Jahre?
3. Es ist relativ einfach, täglich etwas Konkretes für die Umwelt zu tun?
4. Wer hat schon diesen amerikanischen Film gesehen, von dem alle Medien sprechen?
5. Obwohl sie viele Briefe geschrieben hat, hat sie noch kein Praktikum gefunden.
6. Wäre Bayern unabhängig, so könnte es die sechstgrößte europäische Macht sein.
7. 2013 ist zum dritten Mal eine große Koalition in Deutschland gebildet worden.
8. Ehe ich diesen Artikel las, verstand ich die Gründe dieses Streiks nicht.
9. Da er unsere Sprache gut beherrscht, arbeitet dieser junge Spanier von nun an bei uns.
10. Als die Regierung die Steuern erhöht hat, hat sie sehr an Beliebtheit verloren.

SCIENT. ECO. TECHNO. KHÂGNE

LV2 - ALLEMAND

LV2 - ALLEMAND

DURÉE : 3 HEURES.

Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document, dictionnaire ou lexique ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

1. TRADUCTIONS

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 1 HEURE 30.

I. TRADUCTION DU FRANÇAIS EN ALLEMAND

- Dites-moi, monsieur Maillard, vous êtes comptable, avez-vous dit...

- Oui.

Voilà ce qu'il aurait dû mieux observer chez ce garçon : quand il disait la vérité, cela se voyait sur son visage ... Trop tard et tant pis.

- Et bien, reprit-il, il se trouve que nous avons besoin d'un comptable. Le crédit est en plein essor, vous le savez, le pays doit investir. A l'heure actuelle, il y a beaucoup d'opportunités.

Pour Albert, c'était dommage que ce langage n'eût pas été celui du directeur de la Banque de l'Union parisienne qui l'avait foutu à la porte quelques mois plus tôt.

- Je ne connais pas vos émoluments, poursuit M. Péricourt, et ce n'est pas important. Sachez que si vous acceptez un poste chez nous, les meilleures conditions vous seront proposées, je m'y engage personnellement. [...] Nous avons besoin de jeunes gens dynamiques et compétents.

Pierre Lemaître, *Au revoir là-haut*, Albin Michel 2013, p. 277-78.

II. TRADUCTION DE L'ALLEMAND EN FRANÇAIS

„Habt ihr eigentlich Kinder?“, fragte mein Sohn. [...]

Aurore nickte, „Sogar vier. Nur leider sind derzeit alle weg.“

Dann erfuhren wir: Valérie, mit 19 Jahren die Älteste, stand kurz vor ihrer Aufnahmeprüfung an die HEC – die Elite-Wirtschaftshochschule – und lernte Tag und Nacht. Wir bedauerten sie. Doch Éric meinte nur, das sei bei ihm nicht anders gewesen, als er sich als junger Bursche auf die X' – die Elite-Ingenieurshochschule École polytechnique – vorbereitet habe. Die Vorbereitungskurse nach dem Abitur dauerten zwei, drei Jahre und seien das Härteste, was man sich vorstellen könne. Ein gnadenloser Wettbewerb um die Plätze [...] in den Elite Hochschulen. Doch wer dann die Zugangsprüfung bestehe, habe es geschafft. Die Studienzeit selbst sei eher locker. „Was haben wir gefeiert! Und das Gute ist: Wenn du in Frankreich eine grande école besucht hast, brauchst du dir keine Sorgen mehr zu machen. Dann findest du immer einen guten Job! Valérie muss jetzt halt einfach durchhalten.“

Der 17 Jahre alte Quentin tummle sich gerade mit Freunden am Lago Maggiore.

„Wir hoffen, dass er nächstes Jahr endlich [...] sein Abitur macht“, sagte Aurore.

„Er ist nämlich ein bisschen Rock'n'Roll, ihr wisst schon.“

Stefan Ulrich, *Bonjour la France ! Ein Jahr in Paris*, Ullstein 2013, S.83.

2. EXPRESSION ÉCRITE

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 1 HEURE 30.

DEUTSCHLAND UND DIE WELT

CCIR

Es bleibt die Aufgabe der Politik – und als Bundespräsident nehme ich mich da überhaupt nicht aus – das Europa Verbindende zu stärken. Was ist nun die Aufgabe Deutschlands in Europa und in der Welt? Manche Nachbarländer fürchten ja eine starke Rolle Deutschlands, aber andere wünschen sie sich. Auch wir selbst schwanken: Weniger Verantwortung, das geht eigentlich nicht länger, aber an mehr Verantwortung müssen wir uns erst noch gewöhnen. [...]

Vor wenigen Wochen bei meinem Besuch in Frankreich, da wurde Ich allerdings mit der Frage konfrontiert: Erinnern wir Deutschen auch deshalb so intensiv an unsere Vergangenheit, weil wir eine Entschuldigung dafür suchen, den heutigen Problemen und Konflikten in der Welt auszuweichen? Lassen wir andere unsere Versicherungspolice zahlen?

Es gibt natürlich Gründe, diese Auffassung zu widerlegen oder ihr zu widersprechen. Die Bundeswehr hilft in Afghanistan und im Kosovo, den Frieden zu sichern. Deutschland stützt den Internationalen Strafgerichtshof, es fördert ein Weltklimaabkommen und engagiert sich stark in der Entwicklungszusammenarbeit. Deutschlands Beiträge und Bürgschaften helfen, die Eurozone zu stabilisieren.

Trotzdem, es mehren sich die Stimmen innerhalb und außerhalb unseres Landes, die von Deutschland mehr Engagement in der internationalen Politik fordern. In dieser Liste finden sich ein polnischer Außenminister ebenso wie Professoren aus Oxford oder Princeton. Ihnen gilt Deutschland als schlafwandelnder Riese oder als Zuschauer des Weltgeschehens. Einer meiner Vorgänger, Richard von Weizsäcker, ermuntert Deutschland, sich stärker einzu bringen für eine europäische Außen- und Sicherheitspolitik.

Es stellt sich tatsächlich die Frage: Entspricht unser Engagement der Bedeutung unseres Landes? Deutschland ist bevölkerungsreich, in der Mitte des Kontinents gelegen und die viertgrößte Wirtschaftsmacht der Welt. Zur Stärke unseres Landes gehört, dass wir alle Nachbarn als Freunde gewannen und in internationalen Allianzen zu einem verlässlichen Partner geworden sind. So eingebunden und akzeptiert, konnte Deutschland Freiheit, Frieden und Wohlstand sichern. Diese politische Ordnung und unser Sicherheitssystem gerade in unübersichtlichen Zeiten zu erhalten und zukunftsfähig zu machen – das ist unser wichtigstes Interesse.

Deshalb ist es richtig, wenn andere ebenso wie wir selbst fragen: Nimmt Deutschland seine Verantwortung ausreichend wahr, etwa gegenüber den Nachbarn im Osten, im Nahen Osten oder am südlichen Mittelmeer? Welchen Beitrag leistet Deutschland, um die aufstrebenden Schwellenländer als Partner der internationalen Ordnung zu gewinnen? Und wenn wir einen ständigen Sitz im Sicherheitsrat der Vereinten Nationen anstreben: Welche Rolle sind wir dann bereit, bei Krisen in fernen Weltregionen zu spielen?

Unser Land ist keine Insel. Wir sollten uns nicht der Illusion hingeben, wir könnten verschont bleiben von den politischen und ökonomischen, den ökologischen und militärischen Konflikten, wenn wir uns an deren Lösung nicht beteiligen.

Ich mag mir nicht vorstellen, dass Deutschland sich groß macht, um andere zu bevormunden. Aber ich mag mir genauso wenig vorstellen, dass Deutschland sich klein macht, um Risiken und Solidarität zu umgehen. Und liebe Mitbürgerinnen und Mitbürger, ein Land, das sich so als Teil eines Ganzen versteht, muss weder bei uns Deutschen auf Abwehr noch bei unseren Nachbarn auf Misstrauen stoßen.

Nun habe ich Ihnen an diesem Tag der Deutschen Einheit einiges vorgetragen zur Rolle Deutschlands in der Welt, zur digitalen Revolution und zum demographischen Wandel. Was aber ist die Grundmelodie? Ich sehe unser Land als Nation, die nach Jahrzehnten demokratischer Entwicklung „Ja“ sagt zu sich selbst. Als Nation, die das ihr Mögliche und ihr Zugewachsene tut, solidarisch im Inneren wie nach außen. Als Nation, die in die Zukunft schaut und dort nicht Bedrohung sieht, sondern Chancen und Gewinn.

Wir hatten eine Wahl – und wir haben sie weiterhin! Der 3. Oktober zeigt: Wir sind nicht ohnmächtig. Und handlungsfähig, das sind wir nicht erst dann, wenn wir das Ende einer Entwicklung kennen. Wir sind es bereits, wenn wir Verantwortung annehmen, mit dem, was wir jetzt wissen, jetzt können, gestaltend eingreifen.

Wir [...] schauen uns an diesem Festtag um. Wir sehen, was uns in schwierigen Zeiten gelungen ist. Und wir sind dankbar für all das, was gewachsen ist. Und eine Verheißung kann uns zur Gewissheit werden: Wir müssen glauben, was wir konnten. Dann werden wir können, woran wir glauben.

Aus der Rede Joachim Gaucks am Tag der Deutschen Einheit, 3.10.2013.
www.bundespraesident.de

Répondre en ALLEMAND aux questions ci-dessous :
(Environ 200 mots pour chaque réponse)

1. Welche Vorstellungen hat der Bundespräsident Joachim Gauck von einer zukünftigen Rolle Deutschlands im Bereich der Außenpolitik?
2. Welche Rolle sollte Deutschland Ihrer Meinung nach auf der internationalen Bühne spielen? Veranschaulichen Sie Ihren Standpunkt mit konkreten Beispielen.

CORRIGÉ

Par Jean-Gilbert Delarbre, professeur de Chaire supérieure au lycée Michelet à Vanves.

CCIR

CORRIGÉ

I. TRADUCTION D'ALLEMAND EN FRANCAIS

« Au fait, vous avez des enfants ? », demanda mon fils.

Aurore fit oui de la tête. « Nous en avons même quatre. Mais malheureusement, ils sont en ce moment tous partis. »

Ensuite, nous apprîmes : Valérie, l'aînée, âgée de 19 ans, allait bientôt passer son concours d'entrée à HEC – cette grande école de commerce – et travaillait jour et nuit. Nous la plaignîmes. Mais Eric se contenta de dire que les choses n'avaient pas été différentes pour lui lorsqu'il s'était préparé à l'X, prestigieuse école d'ingénieurs. Les classes préparatoires après le bac duraient de deux à trois ans et étaient l'épreuve la plus dure qu'on puisse s'imaginer. Une concurrence sans merci pour se disputer les places des grandes écoles. Mais celui qui réussissait ensuite les concours d'admission était au bout de ses peines. Les études en soi étaient plutôt relax. « Qu'est-ce qu'on a fait la fête ! Et ce qui est bien, c'est qu'en France, quand tu as fait une grande école, tu n'as plus de soucis à te faire. Tu trouveras toujours un bon boulot ! Valérie doit simplement tenir le coup, maintenant. »

Quentin, 17 ans, s'ébat en ce moment sur les rives du Lac Majeur avec des amis. Nous espérons qu'il va enfin décrocher son bac l'année prochaine. », dit Aurore. « C'est qu'il est un peu rock'n'roll, vous voyez le genre ? »

D'après Stefan Ulrich, *Bonjour la France ! Ein Jahr in Paris*, Ullstein 2013.

II. TRADUCTION DE FRANCAIS EN ALLEMAND

Sagen Sie, Herr Maillard, Sie sind Buchhalter, wie Sie mir erklärt haben...

- Ja, das hätte er bei diesem Jungen halt besser beobachten sollen: wenn er die Wahrheit sagte, sah man es ihm an...Zu spät und halb so schlimm.

- Nun, fuhr er fort, zufällig brauchen wir gerade einen Buchhalter. Das Kreditgeschäft ist in vollem Aufschwung, das wissen Sie ja, das Land soll investieren. Zur Zeit bieten sich viele günstige Gelegenheiten.

In Alberts Augen war es schade, dass diese Sprache nicht die des Leiters der Banque de l'Union parisienne gewesen war, der ihn vor einigen Monaten rausgeschmissen hatte.

- Ich habe keine Ahnung, wie viel Sie verdienen, fuhr Herr Péricourt fort und es spielt auch keine Rolle. Sie sollten wissen, dass Ihnen, wenn Sie eine Stelle bei uns annehmen, die besten Bedingungen angeboten werden, dafür büрге ich höchst persönlich.(...) Wir brauchen dynamische und kompetente junge Leute.

Nach Pierre Lemaître, *Au revoir là-haut*, Editions Albin Michel, 2013.

LV2 - ESPAGNOL

DURÉE : 3 HEURES.

(La note sur 80 sera divisée par 4 pour obtenir la note sur 20, les deux chiffres après la virgule arrondis au dixième supérieur.)

Les candidats ne sont pas autorisés à modifier le choix de la deuxième langue dans laquelle ils doivent composer. Tout manquement à la règle sera assimilé à une tentative de fraude.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document, dictionnaire ou lexique ; sauf en latin pour lequel un dictionnaire Latin-Français est autorisé : l'utilisation de toute calculatrice ou de tout matériel électronique est interdite.

SUJET

EL AVANCE DE LA CENSURA EN LA RED

- 1 Mirando un nuevo mapa mundial de la libertad en internet que acaba de ser publicado, no pude evitar sorprenderme al ver que los dos países más grandes de Latinoamérica – Brasil y México – están clasificados como apenas «parcialmente libres». Brasil, cuya presidenta Dilma Rousseff está exigiendo un nuevo sistema internacional para regular internet tras la revelación de que Estados Unidos espía a su país – y a ella misma – por medio de la Agencia de Seguridad Nacional, ha permitido crecientes restricciones del derecho de expresión online mediante una nueva ley electoral que prohíbe a los medios publicar contenidos «ofensivos» para los candidatos tres meses antes de una elección. Aunque el gobierno brasileño no censura información de internet como lo hacen China y Cuba, el gobierno brasileño frecuentemente le pide a Google, Twitter y otras empresas de internet que eliminen algunos contenidos.

En el caso de México, la catalogación de «parcialmente libre» se debe mayormente al hecho de que el país sigue siendo uno de los más peligrosos del mundo para periodistas y blogueros, que suelen ser blancos favoritos de los carteles de narcotráfico y el delito organizado. Además, hay buenas razones para sospechar que el gobierno mexicano espía a los usuarios de internet, porque el ejército mexicano ha realizado una compra secreta de equipo de espionaje online por valor de 355 millones de dólares, con ayuda económica de la oficina anti-drogas del Departamento de Estado de Estados Unidos. Esta tecnología de espionaje permite localizar a los usuarios y monitorear en tiempo real los mensajes de texto y el historial de navegación, según el informe.

En Venezuela, el gobierno directamente hostiga y con frecuencia cierra los sitios web de la oposición, y persigue a los blogueros de la oposición. Hubo interrupciones del servicio de internet en momentos críticos durante las elecciones presidenciales del 14 de abril y durante el recuento de votos subsiguientes, y los sitios web de la oposición han sido bloqueado varias veces, afirma el informe.

25 Mi opinión: Tal vez sea un poco injusto situar a Brasil y México en la misma categoría de «parcialmente libre» que Venezuela y otros países que directa o indirectamente cierran sitios web opositores, o acosan a blogueros críticos.

Pero el informe, en general, es revelador de las crecientes amenazas a la libertad en internet. Leerlo me dejó con una sensación de alarma: independientemente de que los países sean «libres» o «parcialmente libres», en casi todas partes – incluyendo Brasil, México y Estados Unidos – las libertades y la privacidad en internet se están deteriorando rápidamente.

Andrés Oppenheimer, *El Nuevo Herald* (Miami), 17/1 0/13.

I. VERSION

(sur 20 points)

Traduire depuis « En el caso de México ... » jusqu'à «... los sitios web de la oposición. » (de la ligne 13 à la ligne 24)

II. QUESTIONS

(sur 40 points)

1 Question de compréhension du texte

¿Por qué considera el autor « un poco injusto situar a Brasil y México en la misma categoría de «parcialmente libres» que Venezuela » ? (lignes 28 à 29)

(150 mots ± 10 % ; sur 20 points)

2. Question d'expression personnelle

¿Comparte usted el parecer del autor según el cual « las libertades y la privacidad en internet se están deteriorando rápidamente »? (lignes 34 à 35)

(250 mots ± 10 % ; sur 20 points)

* *Le non-respect de ces normes sera sanctionné.*

III. THÈME

(sur 20 points)

1. Puisqu'elle vient les voir demain comme prévu, je pourrai la rencontrer.
2. La ferme dont nous visiterons les installations est un modèle en Andalousie.
3. Dites-lui de me proposer une autre date : lundi, je serai absent.
4. Il aimait tant le cinéma qu'il voyait toujours deux films par semaine,
5. Le gisement était situé à environ 590* kilomètres de la capitale du Chili.
6. On considère désormais que le réchauffement climatique est scientifiquement établi.
7. Si tu pouvais me répondre dans l'après-midi ce serait très bien.
8. Je me souviens des dégâts causés par le troisième tremblement de terre.
9. La lenteur des changements avait fini par décourager la population.
10. Quand la croissance reviendra, je suis sûr que la courbe du chômage baissera.

* en toutes lettres

CORRIGÉ

Par Nicolas Léger, professeur d'espagnol à l'Institution des Chartreux, à Lyon.

I. VERSION

Dans le cas du Mexique, la catégorie « partiellement libre » s'explique principalement par le fait que ce pays reste l'un des plus dangereux du monde pour les journalistes et les blogueurs, qui sont en général les cibles favorites des cartels de narcotrafiquants et du crime organisé. De plus, on a de bonnes raisons de soupçonner le gouvernement mexicain d'espionner les internautes, car l'armée mexicaine a acheté secrètement un dispositif d'espionnage en ligne, d'une valeur de 335 millions de dollars, avec le soutien financier de la cellule anti-drogues du Département d'État des États-Unis. Cette technologie d'espionnage permet de localiser les utilisateurs et de contrôler en temps réel les messages écrits et l'historique de navigation, selon le dossier. Au Venezuela, le gouvernement harcèle directement et ferme fréquemment les sites web de l'opposition.

III. THÈME

1. Ya que/puesto que viene a verlos mañana como (tenía) previsto, podré encontrarla.
2. La granja cuyas instalaciones visitaremos es un modelo en Andalucía.
3. Dígame que me proponga otra fecha : el lunes, no estaré/estaré ausente.
4. Le gustaba tanto el cine que siempre veía dos películas a la (= por) semana.
5. El yacimiento estaba situado a unos quinientos noventa kilómetros de la capital de Chile.
6. En adelante/a partir de ahora se considera que el cambio climático/calentamiento global está establecido.
7. Si pudieras contestarme esta tarde, estaría muy bien.
8. Me acuerdo de los estragos/daños provocados por el tercer terremoto.
9. La lentitud de los cambios había acabado desanimando/desalentando a la población.
10. Cuando vuelva el crecimiento, estoy seguro de que bajará la curva del paro.

Le pronom « les » en français peut être interprété diversement : rien n'empêche ici d'opter pour le pronom « las » (COD féminin pluriel) ou « les » (qui est toléré lorsqu'il s'agit d'un COD de personne de genre masculin)

« Decidle » (vosotros) ou « díganle » (ustedes) conviennent aussi.

Attention au synonyme, dont la construction est transitive : « recuerdo los estragos... ».

« Acabar por + infinitif » est possible.

Le subjonctif est obligatoire dans cette subordonnée de temps. L'emploi du futur, calqué sur le français, serait l'erreur la plus lourde dans cette phrase.

LV2 - ESPAGNOL

DURÉE : 3 HEURES.

Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document, dictionnaire ou lexique ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

CCIR

1. TRADUCTIONS

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 1 HEURE 30.

I. TRADUCTION DU FRANÇAIS EN ESPAGNOL

« Je ne comprends pas très bien ce journal, poursuivit-elle sans s'interrompre. Ça ne parle que de la mode, des *nouvelles tendances* : ce qu'il faut aller voir, ce qu'il faut lire, les causes pour lesquelles on doit militer, les nouveaux sujets de conversation... Les lectrices ne peuvent pas porter les mêmes vêtements que ces mannequins, et pourquoi s'intéresseraient-elles aux nouvelles tendances ? Ce sont en général des femmes plutôt âgées.

- Vous croyez ?

- J'en suis sûre. Ma mère le lit.

- Peut-être que les journalistes parlent de ce qui les intéresse, pas de ce qui intéresse les lectrices.

- Économiquement, ça ne devrait pas être viable ; normalement, les choses sont faites pour satisfaire les goûts du client.

- Peut-être que ça satisfait les goûts du client. »

Elle réfléchit, répondit : « Peut-être ... » avec hésitation.

« Vous croyez, insistai-je, que quand vous aurez soixante ans vous ne vous intéresserez plus aux nouvelles tendances ?

- J'espère bien que non ... » fit-elle avec sincérité.

Michel Houellebecq, *Plateforme*, Flammarion, 2001.

N.B. : On ne traduira pas le titre de l'œuvre.

II. TRADUCTION DE L'ESPAGNOL EN FRANÇAIS

- Tremenda sorpresa verte por aquí, doctora Perea, Ya te daba por desaparecida. - Culpa tuya es.

Me lanzó un gesto interrogatorio.

- Por las ganas de saber más que me despertó tu libro sobre California. Tendría que haberte localizado antes para agradecértelo, por cierto, perdóname.

- Ya lo hiciste a medias el otro día a las cuatro menos diez de la mañana. ¿O es que estoy empezando a soñar contigo?

A medida que iba conociéndole, me iba acostumbrando también a su manera natural de andar por la vida, al afecto con el que trataba a todo el mundo y con el que todos los que le conocían parecían tratarle a él. Flirteaba con las camareras, cuanto más feas y más gordas, mejor. Abrazaba a sus amigos sin reservas, solía mirar las cosas a través del cristal de la ironía y hacía que todo resultara fácil a su

alrededor. Tan solo le había visto tenso con un par de personas, casualmente el mismo día. Con Zárata en aquella tarde ya remota del debate de la Hispanidad. Y con la madre de Fanny, un rato después. Nunca supe las razones de aquellas faltas de sintonía, en realidad me daba igual. Mucho más me importaba seguir contando con él para que me ayudara...

Maria Dueñas, *Misión Olvido*, Ediciones Planeta, 2012.

N.B. : On ne traduira pas le titre de l'œuvre.

2. EXPRESSION ÉCRITE

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 1 HEURE 30

REFORMAR LA CONSTITUCIÓN

La Constitución española (CE) cumplirá 35 años de vigencia el próximo mes de diciembre. Es la Constitución de más larga vida en la historia del constitucionalismo español. Representó todo un éxito de la transición política que dio lugar a un Estado democrático, descentralizado, moderno, una de cuyas piezas clave fue el sistema autonómico, instrumento de vertebración territorial y cohesión social que fue capaz de integrar en un proyecto común diferentes identidades territoriales. La democracia española no se entiende sin el proceso de descentralización política que constituye el Estado autonómico. Lo que, en síntesis, acabo de señalar sigue siendo válido en 2013.

Cuando asistimos al intento de cuestionar la Transición, achacándole todos los males, políticos y económicos, que padecemos actualmente, planteando además la necesidad de un nuevo proceso constituyente, defiende la validez de la CE para afrontar los retos del futuro de España. Pero defender la Constitución no es lo mismo que defender su inmutabilidad. La mejor defensa de la CE es la reforma de la misma. Ni el inmovilismo ni el enrocamiento son garantías de su eficacia futura. El PSOE, en la Declaración de Granada, presentó una propuesta de reforma constitucional de corte federal. Inmediatamente fue acusada de ser una respuesta puntual y oportunista a la apuesta del nacionalismo catalán por la independencia de Cataluña. Para otros la propuesta socialista buscaba establecer una cortina de humo sobre « el derecho a decidir » defendido por los socialistas catalanes. [...] La reforma no fue posible porque no hubo el consenso necesario. Si lo recuerdo es para señalar que la propuesta actual de reforma no es solo para dar una respuesta a la cuestión territorial provocada por la iniciativa independentista. Aunque no hubiera « problema » catalán habría que abordar la reforma de la CE.

La reforma es necesaria para abordar las realidades del siglo XXI. Es cierto que un porcentaje importante de la población española no pudo, por razones de edad, votar la CE, pero además hace 35 años no estábamos en la Unión Europea, ni había redes sociales a través de Internet, ni éramos una sociedad de inmigración, ni la economía estaba globalizada, ni soportábamos una crisis económica y financiera, ni la desafección política había afectado gravemente a la credibilidad de las instituciones democráticas. Por otra parte, existe un evidente desgaste en el funcionamiento del Estado autónomo que ha provocado una fuerte crítica en relación con la capacidad de aquel para resolver los problemas de los ciudadanos: confusión en el ejercicio de las competencias entre las Administraciones, sensación de desigualdad en la prestación de los servicios públicos según los territorios, la utilidad

del Senado, etcétera. Y un modelo de financiación autonómica que produce insatisfacción a la mayoría de las comunidades autónomas. La CE es prácticamente una «hoja en blanco» en la definición del sistema de financiación.

Son razones para abordar la reforma de la CE. Se trataría de lograr un Estado más democrático, más fuerte y más integrador con un sistema autonómico que responda a una más eficaz estructura federal. La reforma propuesta por el PSOE representa también una respuesta federal a la crisis territorial abierta con la iniciativa independentista del nacionalismo catalán. [...] La sociedad catalana debe sentir que sus aspiraciones de autogobierno, de financiación, de singularidad cultural y lingüística son compatibles con un proyecto común basado en la cohesión territorial y social y en la igualdad de todos.

La reforma de la CE exige un pacto político y territorial que tenga el consenso de la Constitución de 1978. Soy consciente que ese consenso, en estos momentos, no existe. El PP no está por la reforma de la CE y los partidos nacionalistas no encuentran satisfacción en una respuesta federal. Pero estoy convencido que esta respuesta se abrirá camino: entre el inmovilismo y el camino cegado a la independencia, creo que es la única posible y eficaz.

Hay una realidad que no se puede ignorar. Es evidente que actualmente el consenso territorial está roto. Con su propuesta de reforma el PSOE hace un ejercicio de responsabilidad ante los ciudadanos. Pero, en algún momento, debe abrir un cauce de diálogo con el PP y los nacionalistas vascos y catalanes. Camino difícil, pero necesario, para recuperar el consenso que haga posible un nuevo pacto territorial.

Manuel Chaves, *El País*, 17 de octubre de 2013

Répondez en espagnol aux questions suivantes :
(200 mots environ pour chaque réponse)

1. Según el artículo, ¿por qué habría que llevar a cabo una reforma de la Constitución?
2. ¿Qué podría cambiar la reforma constitucional en España? Justifique su respuesta.

CORRIGÉ

Par Frédérique Mabilais, professeure agrégée d'espagnol au lycée Jeanne-d'Arc à Caen.

I. TRADUCTION DU FRANÇAIS A L'ESPAGNOL

«No entiendo bien ese periódico, prosiguió ella sin interrumpirse. Solo habla de la moda de las nuevas tendencias: lo que hay que ir a ver, lo que hay que leer, las causas por las que se debe militar, los nuevos temas de conversación... Las lectoras no pueden llevar la misma ropa que esas modelos, pues ¿por qué se interesarían por las nuevas tendencias? En general son mujeres más bien mayores.

- ¿Cree usted?
- Segura. Mi madre lo lee.
- Quizás los periodistas hablen de lo que les interesa a ellos, no de lo que les interesa a las lectoras.
- Económicamente no debería de ser viable; las cosas suelen hacerse para satisfacer los gustos de los clientes.
- Quizás ello satisfaga los gustos del cliente.» Ella reflexionó y vacilando, contestó: «Quizás ...». «Cree usted, insistí, que cuando tenga sesenta años ya no se interesará por las nuevas tendencias?
- Espero que no ...» dijo ella con sinceridad.

Michel Houellebecq, *Plateforme*, Flammarion, 2001.

II. TRADUCTION DE L'ESPAGNOL AU FRANCAIS

- Quelle sacrée surprise de te voir par ici, doctoresse Perea. Je croyais que tu avais disparu.
- C'est de ta faute. Il me lanca un coup d'œil interrogateur.
- C'est parce que ton livre sur la Californie a éveillé en moi l'envie d'en savoir plus. D'ailleurs, j'aurais dû te trouver avant pour te remercier, pardonne-moi.
- Tu l'as déjà fait à moitié l'autre jour à quatre heures moins dix du matin. Ou bien serais-je en train de commencer à rêver de toi ? Au fur et à mesure que je le connaissais, peu à peu je m'habituais aussi à sa façon naturelle d'avancer dans la vie, à l'affection avec laquelle il traitait tout le monde et avec laquelle tous ceux qui le connaissaient semblaient le traiter lui. Il flirtait avec les serveuses, plus elles étaient laides et grosses, mieux c'était. Il donnait l'accolade sans réserve à ses amis, avait pour habitude de regarder la vie à travers le prisme de l'ironie et faisait en sorte que tout devint plus facile autour de lui. Je ne l'avais vu nerveux seulement qu'auprès de deux personnes, par hasard le même jour. Avec Zérate, lors de cet après-midi déjà lointain du débat sur l'Hispanité. Et avec la mère de Fanny, un moment après. Je n'ai jamais su les raisons de ce manque d'entente, en réalité, cela m'était égal. Il m'importait beaucoup plus de continuer à compter sur lui pour m'aider.

María Dueñas, *Misión Olvido*, Ediciones Planeta, 2012.

LV2 - ITALIEN

DURÉE : 3 HEURES.

(La note sur 80 sera divisée par 4 pour obtenir la note sur 20, les deux chiffres après la virgule arrondis au dixième supérieur.)

Les candidats ne sont pas autorisés à modifier le choix de la deuxième langue dans laquelle ils doivent composer. Tout manquement à la règle sera assimilé à une tentative de fraude.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document, dictionnaire ou lexique ; sauf en latin pour lequel un dictionnaire Latin-Français est autorisé : l'utilisation de toute calculatrice ou de tout matériel électronique est interdite.

SUJET

LA CRITICA D'ARTE CHE DIFENDE IL MADE IN ITALY,

- 1 «In questi anni abbiamo perso troppi treni; anche un certo modo di parlare del made in Italy come fossero solo artigiani bravi a fare bei vestiti o borse è suicida», sostiene Maria Luisa Frisa, critica d'arte veneziana, direttrice per Marsilio della «Collana Mode», curatrice di famose mostre. Direttrice del corso di laurea
- 5 in Design della moda all'università IUAV* di Venezia, visiting professor al London college of fashion, Maria Luisa ha un punto di vista non retorico sullo shopping di nostre celebri firme da parte dei giganti del lusso. «Nel mercato globale ognuno è libero di comprare ciò che vuole. Del resto, senza Arnault o Pinault, certi marchi non avrebbero potuto svilupparsi. Detto questo il fatto è che produciamo i più begli
- 10 oggetti, li vendiamo in tutto il mondo, ma all'estero ormai non siamo considerati come creatori.
- Non solo. A differenza dei francesi e inglesi non abbiamo creato una mitologia della nostra moda che non è nata – come a volte si legge – nel 1951 ma con il Risorgimento (nella Milano delle Cinque Giornate uomini e donne indossarono abiti di vel-
- 15 luto e cappello ana calabrese con il tricolore). «Tornando al made in Italy», continua Frisa, «quel successo nacque grazie alla capacità di alcuni imprenditori di coniugare artigianato con industria creando un prodotto fatto in serie di gran qualità.
- E' questa la nostra storia su cui puntare per non essere spazzati via!». Addio solitari, a volte geniali stilisti che presentavano in passerella solo 4 collezioni l'anno
- 20 (2 per la donna, 2 per l'uomo). «Oggi la moda ha bisogno di tante, diverse professionalità. E' il tempo dei «fashion designer», i direttori creativi di grandi gruppi che, rispettando il DNA di un marchio, devono renderlo contemporaneo. Un lavoro complesso per il quale occorre preparazione. Non a caso Tom Ford e Marc Jacobs sono usciti dalla Parsons School of Design di New York, John Galliano e Riccardo
- 25 Tisci dalla Saint Martins di Londra». Insomma, università, accademie, scuole come quella di Anversa che sfornano talenti capaci d'affrontare i cambiamenti avvenuti nel sistema moda. Basta pensare al progressivo spostamento sia dei mercati che delle produzioni e delle officine creative. «Purtroppo sulla formazione noi siamo molto indietro; c'è chi ancora pensa che il talento sia qualcosa d'innato mentre,
- 30 invece, va aiutato a crescere». Maria Luisa eletta presidente di Misa, la neonata

Associazione italiana degli studi di moda, ha organizzato i primi «Stati generali delle scuole di Design della Moda». «Basta lamentarsi! Dobbiamo valorizzare la moda come ricchezza culturale ed economica del nostro Paese».

30* IUAV=Istituto Universitario Architettura Venezia

d'après Chiara Berai Di Argentina, *La Stampa*, 17 novembre 2013.

I. VERSION

(sur 20 points)

Traduire depuis le début du texte jusqu'à « ... non siamo considerati come creatori ». De la ligne 1 à la ligne 11.

II. QUESTIONS

(sur 40 points)

1. Question de compréhension du texte :

Spiegate : «il progressivo spostamento sia dei mercati che delle produzioni e delle officine creative». (Lignes 27 à 28)

(150 mots + ou -10% *; sur 20 points)

2. Question d'expression personnelle :

Pensate che il *Made in Italy* abbia bisogno di essere difeso?

(250 mots + ou -10% *; sur 20 points)

* *Le non-respect de ces normes sera sanctionné.*

Indiquer le nombre de mots utilisés.

III. THÈME

(sur 20 points)

1. Rien ne peut résister au dynamisme des pays émergents.
2. Ne pensez-vous pas, Monsieur, que votre tenue n'est pas adaptée au lieu ?
3. Mon oncle m'en a parlé avant-hier.
4. Il y a tellement de monde dans le métro du lundi au vendredi !
5. Malheureusement, on voit de moins en moins de fresques à Pompéi.
6. Il me semble que ma pension est moins chère que ton hôtel.
7. Nous ne savions pas que les vols low-cost avaient autant de destinations en Italie.
8. Si la crise économique continue, le phénomène de la fuite des cerveaux s'accroîtra.
9. Il y a deux siècles, l'Etat italien n'existait pas encore.
10. Pour 80 % des touristes, Venise est la ville la plus romantique.

I. VERSION

LA CRITIQUE D'ART QUI DÉFEND LE MADE IN ITALY

« Ces dernières années nous avons laissé passer trop d'occasions ; Tout comme une certaine façon de parler du *made in Italy*, comme s'il n'y avait que de bons artisans capables de faire de beaux vêtements ou des sacs est suicidaire. » affirme Maria Luisa Frisa, critique d'art vénitienne ; directrice chez Marsilio de la « Collection Modes », organisatrice de célèbres expositions, Directrice du cours de licence de Design de mode à l'université IUAV* de Venise, professeur associé au London college of fashion, Maria Luisa a un point de vue très réaliste sur l'achat de nos grands noms par les géants du luxe. « Sur le marché global chacun est libre d'acheter ce qu'il veut. Du reste, sans Arnault ou Pinault certaines marques n'auraient jamais pu se développer. Ceci dit, le fait est que nous produisons les plus beaux objets, que nous les vendons dans le monde entier, mais à l'étranger désormais nous ne sommes pas considérés comme des créateurs.

* IUAV= Institut Universitaire d'Architecture de Venise

III. THÈME

1. Niente può resistere al dinamismo dei paesi emergenti.
2. Non pensa, signore, che il Suo abbigliamento non sia adatto al luogo ?
3. Me ne ha parlato mio zio l'altro ieri.
4. C'è tanta gente nella metro dal lunedì al venerdì.
5. Purtroppo si vedono sempre meno affreschi a Pompei.
6. Mi pare che la mia pensione sia meno cara del tuo albergo.
7. Non sapevamo che i voli low cost avessero tante destinazioni in Italia.
8. Se la crisi economica continuerà, il fenomeno della fuga dei cervelli si accentuerà.
9. Due secoli prima lo Stato italiano non esisteva ancora.
10. Per l'80% dei turisti Venezia è la città più romantica.

HISTOIRE, GÉOGRAPHIE ET GÉOPOLITIQUE DU MONDE CONTEMPORAIN

DURÉE : 4 HEURES.

Tout verbiage doit être évité et il est expressément recommandé de ne pas dépasser huit pages. Il sera tenu compte des qualités de plan et d'exposition, ainsi que de la correction de la langue. Il est rappelé que la carte réponse est à remplir (en collant l'étiquette code barre supplémentaire). Les documents d'accompagnement ci-joints sont essentiellement là pour aider le candidat dans sa réflexion sur le sujet posé et sa représentation cartographique. Il n'est fait usage d'aucun autre document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

SUJET

L'AFRIQUE SUBSAHARIENNE EST-ELLE À L'ÉCART DU MONDE ?

CARTE : *En utilisant vos connaissances et si nécessaire les documents ci-joints, construisez une carte appuyant et illustrant vos propos. La légende ne devra pas faire plus d'une page. Il est rappelé que la carte est obligatoire. Elle doit également comporter un titre.*

Sommaire

Doc. 1 - Repères chronologiques

(source : compilations diverses)

Doc. 2 - Extrait de la préface de 1966 du livre de René Dumont, *L'Afrique noire est mal partie*, paru pour la première fois en 1962

Doc. 3 - Trois exemples de l'hétérogénéité africaine

(source : Alain Dubresson et *alii*, *L'Afrique subsaharienne, une géographie du changement*, 2011, p. 36)

Doc. 4 - La population en Afrique

(source : Alain Dubresson et *alii*, *L'Afrique subsaharienne, une géographie du changement*, 2011, p. 95)

Doc. 5 - Carte, La Chine, un partenaire clé du développement de l'Angola

(Source : Revue CARTO)

D O C U M E N T S

DOCUMENT 1

Repères chronologiques

- 1884-1885 : Conférence de Berlin
- 1899 : début de la guerre des Boers en Afrique du Sud
- 1941: Brazzaville capitale de la France Libre
- 1950 : 150 millions de ruraux en Afrique subsaharienne (560 millions en 2012)
- 1955-1962 : baisse de 20 % des termes de l'échange des produits agricoles à l'exportation
- 1960 : indépendance de la quasi-totalité des colonies françaises
- 1962 : publication de l'ouvrage de l'agronome français René Dumont, *L'Afrique noire est mal partie*
- 1967-1970 : guerre du Biafra
- 1984-1985 : famine dans le Sahel
- 1980-1989 : 241 plans d'ajustement structurel concernant 24 pays d'Afrique subsaharienne ont été menés durant la période
- 1994 : génocide rwandais
- 23 juin 2000 : signature des Accords de Cotonou entre l'UE et les pays ACP
- 2009 : 375 millions d'abonnés au téléphone mobile (51,4 millions en 2003)
- 2010 : 250 000 ressortissants d'origine chinoise sont officiellement recensés en Afrique subsaharienne
- 11 juin / 11 juillet 2010 : l'Afrique du Sud accueille la coupe du monde de football

Source : compilations diverses

DOCUMENT 2

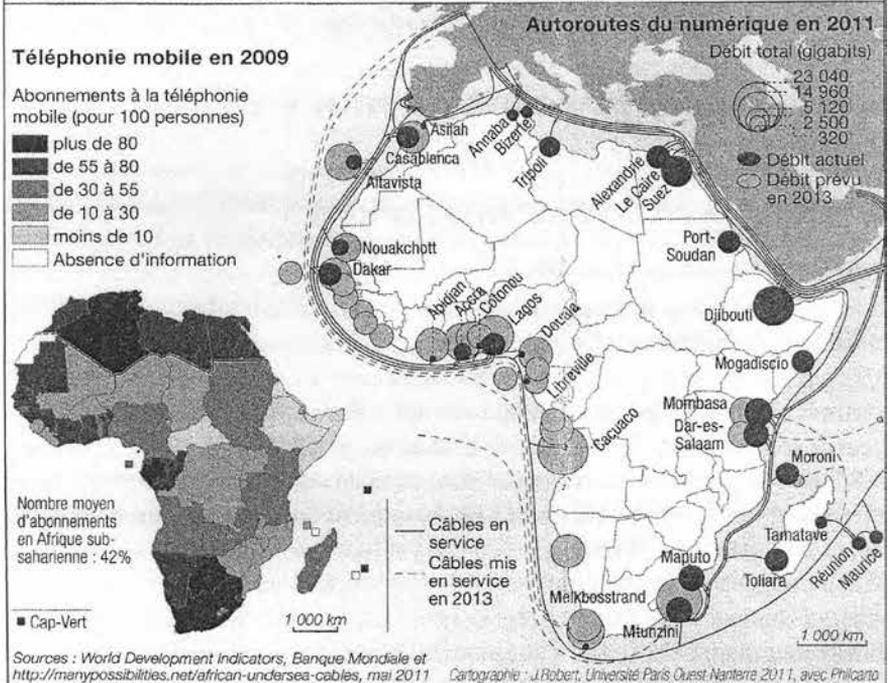
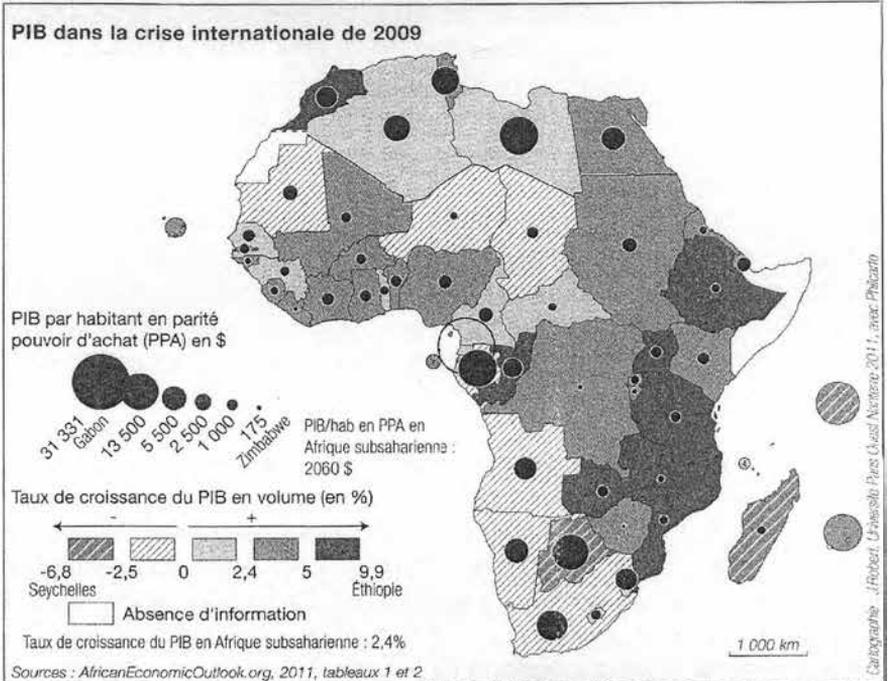
Extrait de la préface de 1966 du livre de René Dumont, *L'Afrique noire est mal partie*, paru pour la première fois en 1962

« Il fallait une certaine audace, dans l'euphorie générale du début de l'Indépendance, aussi répandue en France qu'en Afrique, pour dire que ce continent prenait un mauvais départ. Parce que celui-ci s'esquissait à peine ; et nous en étions, nous les colonisateurs, les plus grands responsables. [...]

J'ai donc préféré courir le risque de vexer certains de mes amis africains, plutôt que de les mépriser en les flattant, ou en cachant le fond de ma pensée : ce qui constituerait une forme hypocrite de ségrégation néocolonialiste. En présence des « maladies infantiles de l'Indépendance », il importait de les dénoncer vite, pour essayer de contribuer à leur guérison. Le ton adopté était parfois maladroît, mais je cherchais à défendre les paysans tropicaux, ces vrais prolétaires des temps modernes, même s'ils possèdent leurs (dérisoires) outils de production. »

DOCUMENT 3

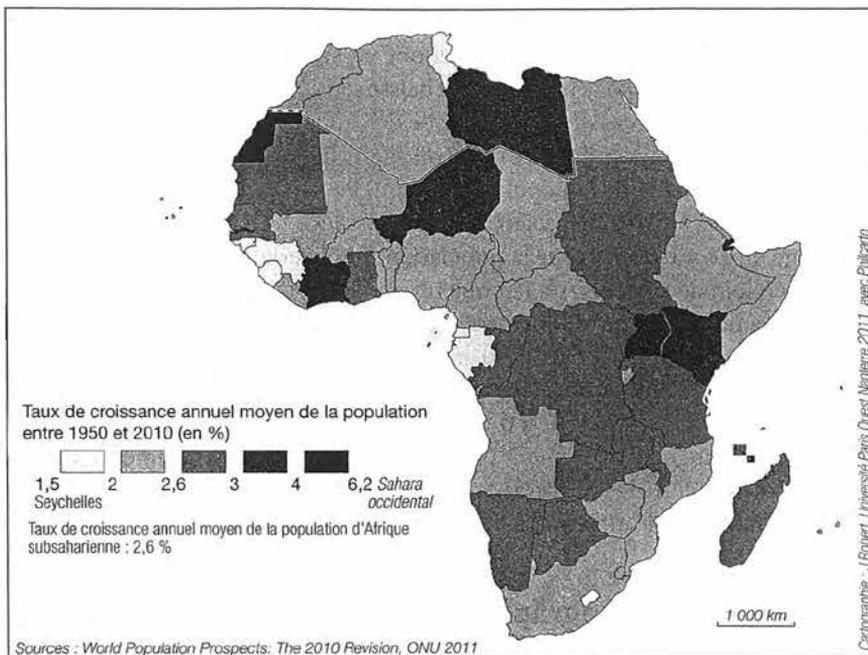
Trois exemples de l'hétérogénéité africaine



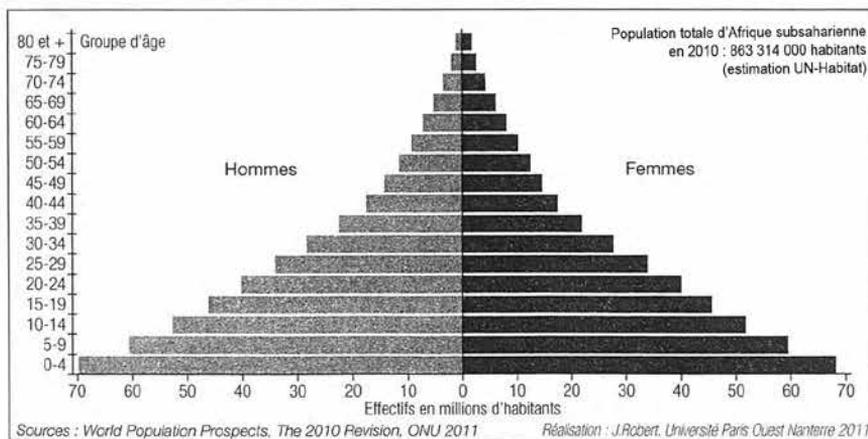
source : Alain Dubresson et alii, *L'Afrique subsaharienne, une géographie du changement*, 2011, p. 36

DOCUMENT 4

La population en Afrique



La croissance de la population africaine

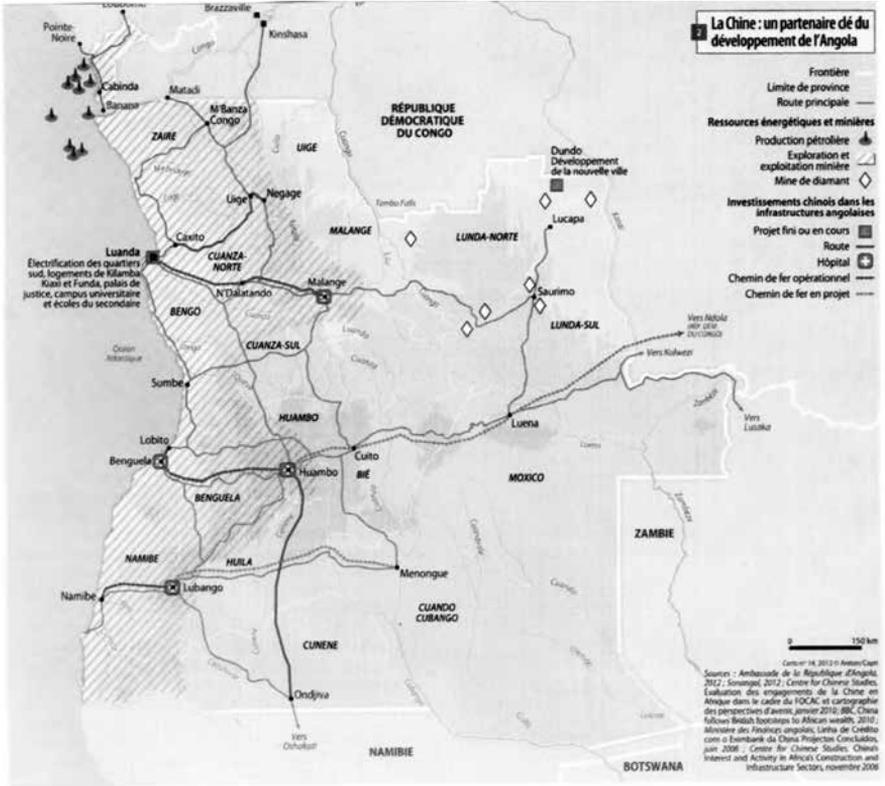


Pyramide des âges de l'Afrique subsaharienne

source : Alain Dubresson et *alii*, *L'Afrique subsaharienne, une géographie du changement*, 2011, p. 95

DOCUMENT 5

La Chine, un partenaire clé du développement de l'Angola



Source : Revue CARTO.

CORRIGÉ

Par Alain Nonjon, professeur au lycée Michelet à Vanves.

Un sujet sélectif *a priori*

Loin du libellé Essec 2007 « l'Afrique au bord du monde » ce sujet avait pour mérite :

- d'être borné par la dénomination Afrique subsaharienne, ce qui pour résumer les candidats se situe « au dessous du Sahara » ;
- d'être l'occasion d'une réflexion sur la notion de « l'écart du monde » ce qui ne se limitait pas pour les candidats à « hors de la mondialisation » alors que des références à la « mise à l'écart » par les grandes puissances, à « tenue à l'écart » par des politiques restrictives européennes, (frontex) et par des aspirations européennes à en faire une banlieue lointaine dont on se méfie plus qu'une nouvelle frontière faisaient partie du sujet ;
- d'être par les documents une invite à balayer ce processus sur le long terme (depuis Berlin 1885) même si le présent « est elle » actualisait quelque peu la réflexion autour de cette thématique surutilisée par les candidats de la « renaissance africaine » ;
- d'être par certains titres de documents (doc. 3 hétérogénéité africaine) une invitation à ne pas globaliser le sous continent qui ne se résume pas à l'Afrique du Sud ; et les autres ! comme trop souvent on l'a vu dans les copies ;
- bref ce thème d'un continent émergent après avoir été dominé, et marginalisé, cette problématique d'une Afrique qui doit se « rendre indispensable à elle-même » (C. Robert) ce devenir d'une « Afrique des convoitises », enjeu mondial désormais était à même de sélectionner les candidats.

Introduction

Mise à l'écart par le pessimisme entourant ses performances et les défis auxquels elle était confrontée (démographiques, sanitaires, économiques et politiques) l'Afrique subsaharienne convoitée d'aujourd'hui, est-elle encore à l'écart du monde avec le nouveau jeu de puissances avides de matières premières et de main-d'œuvre à moindre coût (Chine, États-Unis, Inde) ?

L'Afrique « sudsaharienne » véritable **patchwork de diversités de milieux et d'histoire** est-elle en passe **d'appréhender collectivement sa sortie d'une décennie de chaos** marquée par la dette, les séquelles d'une économie de la rente et l'onde de choc d'un islamisme radical dans l'arc sahélien ?

Peut-elle raisonnablement retrouver une dynamique où « **responsable d'elle-même** » **elle n'intégrera plus le monde par procuration mais par ambition ?**

I/ Une Afrique subsaharienne délibérément à l'écart du monde : le sous continent tenu à distance et mal parti...

A. L'Afrique incarne de prime abord la déréliction sans issue des PED : l'Afrique paria du développement ?

• **Le choc des statistiques** : les 48 pays subsahariens ne représenteraient que 3 % des échanges mondiaux et des IDE ce qui accreditte l'image d'un continent décroché de la scène internationale. Son milieu hostile est souvent caricaturé (déserts, forêt équatoriale, singularité et isolement, accentués par l'anisotropie des réseaux). La pauvreté se rigidifie avec 47,5 % des habitants vivant avec moins de

1,25 \$ par jour en 2008... La bombe démographique liée au retard de la transition démographique : Niger fécondité à 7,1 un Nigéria qui d'ores et déjà a une natalité annuelle en volume (6 millions) supérieure à celle de l'Union européenne s'emballe avec une rare intensité qui catapulterait l'Afrique devant la Chine en 2050 (1,8 mds d'hommes contre 180 M en 1950) la fait doubler d'ici 2030 voire tripler au niveau des urbains. On ne peut parler de dividende (insécurité alimentaire du continent, malnutrition, crises sociales et politiques à l'aval de la flambée des cours céréaliers (2008, 2010)).

• **Des guerres civiles qu'on croyait disparues.** Le génocide du Rwanda : le 14-18 africain au baromètre de l'horreur en fait avec le Cambodge un des épisodes les plus douloureux de la deuxième moitié du xx^e siècle après les drames du Biafra en 1968 et la Centrafrique donne une actualité aux pires dérives communautaristes.

• **Une mise à l'index** devant un népotisme caricatural : des dictatures, des clientélismes que l'on croyait disparus : avec des Etats clochardisés (biens mal acquis) ou bousculés par le terrorisme au quotidien de Boko Haram (Nigeria) au Mujao ou Ansar Dine (Mali).

B. Son itinéraire et une incompréhension se conjuguent pour justifier une mise à l'écart

• **Un itinéraire** : échec d'une économie de la rente : pas de marché intérieur ; peu de transformations (Mali 5 % seulement du coton transformé sur place).

- Un déficit chronique de productivité ; une Afrique *price taker* ; une accumulation du capital et une industrialisation bloquées (fuite des capitaux : 800 milliards de dollars entre 1970 et 2008), un gaspillage des ressources entretenu par la politique du ventre (éléphants blancs).

- Un mauvais positionnement sur la chaîne de valeur ajoutée (Joseph Ki-Zerbo).

- Des marchés financiers segmentés. Une faible capacité à s'extraire des trappes à pauvreté. Le courant tiers-mondiste met en avant le passé colonial pour expliquer cette mise à l'écart des économies pénalisées par leur extraversion (S. Amin) par l'échange inégal (A. Emmanuel) et par une spécialisation imposée dans les seules matières premières (cf. J. Marseille - *Le sens du pacte colonial*).

• **Une incompréhension** « *le regard porté sur l'Afrique est plus meurtrier que ce qui s'y passe réellement* » (2003) Kofi Yamgnane ex secrétaire d'état français d'origine togolaise. L'image de l'Africain « authentique », vivant à l'écart de toute modernité, aujourd'hui encore représentation entretenue à destination du touriste ou du pseudo explorateur, qui vend aux médias le mythe d'un « monde perdu ». La difficile repentance par rapport à la colonisation des puissances coloniales nourrit les ressentiments et les clivages.

• **Une ignorance** : maladroites ou calculs ? : N. Sarkozy discours de Dakar : « *le drame de l'Afrique c'est que l'homme africain n'est pas assez entré dans l'Histoire... Jamais l'homme ne s'élance vers l'avenir, jamais il ne lui vient à l'idée de sortir de la répétition pour s'inventer un destin. Le problème de l'Afrique c'est qu'elle vit trop le présent dans la nostalgie du paradis perdu de l'enfance* ». On ne sait pas comment ils vivent mais plutôt comment ils meurent... continent oublié, perdu, qui rend perplexe : Comment se fait-il qu'au Mali les régions qui gagnent sont celles qui exportent des hommes et pas celles qui exportent des matières premières et du coton !

C. Des risques majeurs qui entretiennent le fantasme de cordons sanitaires : l’Afrique dont il faut se préserver

• **Un laboratoire diabolique de tous les risques.** La déforestation en République démocratique du Congo, malgré les efforts de protection dans le parc national de Virunga, les pollutions du delta du Niger (depuis 50 ans les quantités de pétrole échappées des terminaux et stations de pompage supérieures à la catastrophe du Golfe du Mexique de Mai 2010), la surexploitation de minerai de bauxite (la fonderie de Mozal au Mozambique (56 % des exportations du pays), pôle majeur de toxicité) le rétrécissement de la biodiversité (forêt malgache victime de la culture sur brûlis...) autant d’agressions dénoncées par les ONG mais plus répertoriés que combattues.

• **Une vulnérabilité face aux risques contemporains :** changement climatique (selon l’indice de vulnérabilité de Maplecroft, 12 des 25 pays les plus vulnérables sont africains), insécurité alimentaire, risque sociétal (capacité à créer des emplois), risque politique (déficit de gouvernance...), risque géopolitique (piraterie, nouveaux conflits, terrorisme) pandémie d’une rare brutalité (Ebola virus le plus létal du monde avec plus de 2000 morts en septembre 2014 en Sierra Leone, Guinée, et Liberia). Les pays les plus risqués se trouvent en Afrique subsaharienne en prenant le World Risk Index de l’ONU.

• **Une mise à distance implicite.** Les migrations subsahariennes : de la peur de l’invasion (VGE) à Frontex d’une Europe contient plus qu’elle ne subvient. Le bilatéralisme sulfureux de la tutelle coloniale à la Françafrique qui évite le multilatéralisme fécond à l’excès de l’afropessimisme (clichés réducteurs) qui éloignent. L’Afrique paraît plus intégrée par les flux illicites que licites (prostitution, clandestins drogues, contrefaçon). Image dévalorisée comparativement par l’émergence asiatique (pourtant même situation en 1960) et une certaine autoflagellation de l’Afrique (Axel Kabou).

II/ L’Afrique subsaharienne des convoitises : le retour en Afrique plus que de l’Afrique

A. L’Afrique rentre dans le jeu des grandes puissances : l’extérieur convoite l’Afrique

Abandonnée dans les années 90 elle suscite désormais toutes les convoitises notamment pour ses matières premières. Mieux vaut faire envie que pitié ...

• **La rente pétrolière d’abord : le troisième golfe rêvé ? !** Afrique : 10 % des réserves mondiales de pétrole et seuls 8 pays sur 54 échappent à ce jour aux projections en cours, dans ce « coffre-fort géologique » dont les ressources sont loin d’avoir été complètement inventoriées (pétrole de bonne qualité, aisément accessible et de nombreux gisements se situent *off shore*, sur les grandes routes maritimes qui desservent les Etats-Unis et l’Europe) et les Etats africains sont beaucoup moins exigeants, dans les contrats qu’ils passent avec les grandes « majors », que leurs homologues moyen et proche orientaux, qui ont plus d’expérience en la matière et moins de besoins à satisfaire. Un tiers des importations de pétrole de la Chine, un quart de celles des Etats-Unis viennent désormais d’Afrique !

• **La rente stratégique revisitée.** Hier angle mort de la diplomatie internationale pendant la décennie du chaos, la principale aide apportée au continent constituant en des interventions humanitaires dépêchées par l’Occident dans une logique d’endiguement (des victimes soignées dans des camps de réfugiés mais surtout

pas d'immigrés), l'Afrique est redevenue une priorité stratégique fréquente (plans d'ajustement structurel, représentants des « gendarmes du monde »).

- **La rente du développement durable imaginée.** L'Afrique bénéficie pleinement des deux priorités du développement durable : la lutte contre la pauvreté, et la préservation des espaces considérés comme « vierges ».

B. Elle retrouve une attractivité : l'extérieur dispose de l'Afrique

- **La défense des valeurs occidentales :** front avancé contre le terrorisme face à l'affaiblissement de l'Afpaq, arc de crise sahélien ; Somalie, piraterie, Boko haram avec la mobilisation contre ceux pour lesquels « l'école occidentale est un péché » lutte contre les djihadistes de la France en coopération avec le G5 Sahel. Majorités de circonstances comme à l'ONU avec instrumentalisation des votes sans représentant au conseil de sécurité.

- **La recherche d'avantages comparatifs** dans ses disponibilités en main-d'œuvre jeune et peu chère (cf. Chinois en Ethiopie, Portugais au Mozambique pendant crise de la dette). Dans ses disponibilités en terres arables (60 % du land-grabbing). Dans des rentabilités dégagées : FTN de tous horizons de Vale à Rusal de Monsanto à Areva.

- **L'exotisme réhabilité.** Apports culturels qui ont compensé les déficits économiques (musique, arts premiers, tissus...). Tourisme de vision comme de masse réhabilité mais aujourd'hui limité par les risques (3/4 du continent ostracisé depuis le drame de l'assassinat de H. Gourdel).

C. Elle bénéficie de programmes d'assistance, façon bien que déséquilibrée de ne plus être à l'écart

- **L'aide** est devenue, dans bien des pays, le **premier employeur**.

- De Lomé à Cotonou : les avancées des programmes d'aides aux ACP par l'UE, qui parvient à imposer une démarche régionale, une conditionnalité démocratique à l'aide.

- De l'ignorance américaine aux programmes de Bush lutte contre le sida et accords commerciaux (Agoa avec une trentaine de pays africains). Mobilisation de B. Obama pour le milliard de \$ contre l'Ebola.

- **Les interventions extérieures** pour une paix fragile : corridors humanitaires, de la licorne à émeraude au G5 sahélien mis en place en 2014. Des interventions françaises et de l'ONU aux côtés de l'UA qui tente de plus en plus d'africaniser les conflits même si Afrique du Sud boude la Centrafrique comme le Nigeria.

- **L'économie sous perfusion :** Plan Marshall pour l'Afrique. Des plans d'ajustement structurels aux effets contrastés mais en 2013, 5 % de croissance et 5,8 % en 2014 au Sud du Sahara ! chiffres répétés bruyamment... 6 pays africains font parties des 10 pays du monde dont le PIB s'est accru le plus rapidement au cours de la décennie 2000 – Angola, Nigeria, Tchad, Ethiopie, Rwanda, Mozambique les 3 derniers étant moins concernés par les matières premières.

III/ L'intégration responsable dans le monde ? « le temps de l'Afrique » annoncé

A. L'Afrique prend conscience de ses potentiels : son passé et son présent au service du futur

- **Elle regarde différemment son histoire** « *l'Afrique n'avait rien à envier au reste du monde* » avec ses formations étatiques d'une grande diversité, ses modèles d'organisation technologique comme dans la maîtrise de la métallurgie du fer dans les régions soudano sahéliennes et la boucle du Niger, sa diplomatie comme celle de Kankan Moussa, empereur du Mali au ^{XIV} siècle qui ramène de la Mecque des architectes arabes fondateurs de Tombouctou (Ibrahima Tioub) ; les sociétés africaines ont toujours eu des contacts avec les régions voisines, notamment le monde arabe : voyage au long cours et mobilité interrégionale sont des pratiques très anciennes au sud du Sahara.

- **Elle appréhende différemment ses potentiels** Population... jeunesse (200 M d'Africains entre 15 et 24 ans) classes moyennes (200 M soit plus que les « *shining class* » indiennes), matières premières de demain (terres rares, bois) économie alternative du microcrédit à la défense de l'environnement. Un développement alternatif durable sans aller jusqu'à la décroissance, l'Afrique rêve « *d'autre chose que de l'expansion d'une culture de mort d'une modernité aliénante qui détruit les valeurs fondamentales de l'être humain* » (Ela 1998). L'Afrique tente de promouvoir une société à la fois du lien : clanisme, et tout acte économique ne se mesure qu'au renforcement des liens qu'il entraîne au sein du groupe (Dia Mamadou 1991) du bien (accès au développement) portée par ses valeurs moins marchandes ; rôle du microcrédit des entreprises liées aux produits nationaux, l'Afrique est dans l'ère des réseaux palliatif des thromboses des transports terrestres (téléphone mobile montre que rien n'est perdu d'avance). Il est loin le temps où on disait que l'Afrique comptait moins de ligne de téléphone que Manhattan ou Tokyo.

- **Des performances qui permettent de ne plus la tenir à l'écart l'« étai de la dette » se desserre** selon Aminata Traoré avec la répudiation progressive de certaines dettes, le sort réservé aux PPTE et le nouveau plan Marshall pour l'Afrique mis en place par le G8. Des bons en avant de la démocratie alternances réussies au Ghana.

Des chefs d'entreprises hommes femmes qui gagnent. L'Afrique mobilise désormais des forces de changement exceptionnelles. La créativité africaine émerge de plus en plus (cinéma, musique, recherche). Il faut « *se dégager d'un fatalisme qui cyniquement dirait l'Afrique n'est jamais partie et d'un optimisme béat qui ferait fi d'un état des lieux préoccupants* », *Pourquoi je crois aux progrès de l'Afrique credo d'un banquier africain*, J. C. Masangu Mulongo, Congo, 2009.

B. De nouvelles légitimités : la renaissance africaine... par l'extérieur

- **L'Afrique est physiquement présente partout** du fait des diasporas anciennes et modernes. L'ubiquité africaine se vit au quotidien en Amérique du Nord avec 12 % de la population américaine d'origine africaine, ou en Amérique latine où le Brésil est après le Nigeria le pays où la population noire d'origine africaine est la plus nombreuse. Coupes du monde, intervention dans la dette des pays européens * G3 AS Brésil, Inde.

- **L'Afrique peut faire valoir des sociétés aux grandes facultés d'adaptation aux crises** avec la sécurité de la famille élargie, la providence assurée, matelas du secteur informel, réappropriation de technologies (success story téléphone

mobile) main-d'œuvre abondante et pas chère, réseaux, société mobile, pluralisme linguistique, et un dynamisme traditionnel des femmes. De plus en plus de femmes s'identifient à l'Afrique en mouvement avec les nana benz au Togo dans le textile, le commerce des pagnes, et premières à importer des Mercedes Benz ou « matrones du commerce de l'or au Sénégal » même malmenées par les Chinois.

• **L'Afrique dispose de ressources culturelles** face au prétendu « clash des civilisations ». L'Afrique peut apporter le pluralisme des opinions une afropolitaneité qui voit le jour avec l'urbanisation qui s'accélère et s'amplifie avec la transition démographique. Même l'Etat jusqu'alors proscripteur et interventionniste devient prescripteur plus efficace en aidant au renforcement du privé (La capacité de l'Afrique à permettre à une classe d'entrepreneurs d'émerger de se mobiliser grâce à un Etat facilitateur et pas prédateur, et dans une stabilité propice au bon climat des affaires).

C. Mais reste à l'Afrique subsaharienne pour s'imposer dans le monde à se « rendre indispensable à elle-même »

L'Afrique « *n'est pas à l'écart des affaires du monde* » et n'a « *pas besoin d'hommes forts, mais d'institutions solides* », Barack Obama en visite au Ghana.

• **Surtout il s'agit de ne plus globaliser le continent africain** : la moitié des PIB cumulés au Sud du Sahara est concentrée dans 3 pays : Nigeria / Afrique du Sud / Angola. Dynamique à plusieurs vitesses avec des pays parias à l'écart comme Zimbabwe ou Somalie ou Centrafrique, des pays réengagés dans une dynamique mondiale mais par une économie de rente (Angola, Burkina Faso), des pays pleinement responsables de leur retour en force dans la mondialisation (Afrique du Sud), des marges dominées qui attendent les nouveaux prédateurs (Sud soudan Zambie terres d'élections des convoitises asiatiques par ex). Typologie de McKinsey (2010) faisant intervenir deux critères : d'une part, l'ouverture et d'autre part le degré de diversification avec comme indicateur le poids des industries manufacturières et des services dans le PIB. D'autres indicateurs pouvaient être pris en compte permettant de mieux saisir la singularité d'un espace hétérogène : – les économies rentières, pétrolières et minières : dualisme, dynamiques économiques axées sur l'affairisme et la création de rente (malédiction ou bénédiction ?) ; – les économies à faible revenu, à dominante primaire et vulnérable groupe qualifié de LICUS par la Banque mondiale (*Low Income Countries under Stress*) – les économies diversifiées à revenu intermédiaire supérieur : Afrique australe, océan indien avec un poids relatif accordé au secteur manufacturier intégré à l'échange international (textile, jouet, bijouterie à partir de l'exemple de Maurice dont le PIB *per capita* est 5 fois supérieur à la moyenne africaine). Fragmentation des territoires de chaque Etat face à la croissance : exemple caricatural Etat de Lagos au Nigeria constitué de l'agglomération de la capitale économique du pays génèrait en 2012 35,6 % du PIB et même 62 % si on retranchait les activités pétrolières pour un Etat ne représentant que 12,5 % de la population et 0,36 % de la superficie de la fédération nigériane.

• **Ceci n'empêche pas l'opportunité de se mobiliser autour d'un projet continental** qui dépasse la dualisation de l'Afrique, voire l'archipelisation du continent avec le levier d'un panafricanisme historique. Il faut valoriser l'aptitude de l'Afrique à se dégager des choix plaqués de l'extérieur comme hier le consensus de Washington, et à trouver fusse au travers de nouveaux partenariats sa propre voie. Cette démarche est au cœur du projet de fin de mise à l'écart : la diversification des partenaires qui permet d'utiliser à plein des intérêts contradictoires parfois entre

grandes puissances il faut repenser la coopération sud /sud comme prioritaire : cf. G3 Brésil Inde Afrique du Sud qui n'est pas une coquille creuse (cf. sur produits pharmaceutiques par ex). Il faut utiliser les compétences quand bien même elles viendraient de l'extérieur (cf. les nouveaux dirigeants émanant des gendarmes du monde comme Sirleaf ou Sally).

• **Deux scenarii balaient l'idée d'une Afrique à l'écart du monde :**

- L'Afrique subsaharienne est bien répartie. Pour deux chercheurs du MIT (Maxim Pinkovsky) et Xavier Sala i Martin la pauvreté africaine chute et après avoir passé au scanner 48 pays d'Afrique subsaharienne entre 1970 et 2006 ils peuvent affirmer que la croissance n'a pas que profité aux élites... Et qu'un rattrapage s'opère avec 3 leçons (Croissance forte 4,7 % par an depuis 2000 supérieure à celle de l'OCDE). Une ascendance avec des locomotives en Afrique anglophone mieux préparées (Nigéria, Afrique du sud, 2/3 du PIB de l'Afrique subsaharienne qui tirent le continent) et des dépendance (matières premières sensibles à la conjoncture mondiale évolutions erratiques... ce qui appelle une diversification).
- Ou l'Afrique subsaharienne est mieux partie... et avec prudence se fixe des objectifs concrets ne serait-ce que de moderniser ses infrastructures (surtout quand à Zinder, 2^e ville du Niger il devient simple par la révolution de la téléphonie mobile de contacter ses proches à Niamey alors qu'en voiture il fallait 15 à 18 heures pour rallier la capitale !)

Conclusion

Moins de mise à l'écart de l'Afrique, pas d'Afrique à l'écart du monde, mais un grand écart entre des défis nombreux (urbanisation croissante, formation, maturation des Etats de droit, mobilités subies...) avec espoir d'une croissance contagieuse (déjà un tiers des pays d'Afrique subsaharienne ont des taux supérieur ou égaux à 6 %) d'un avenir industriel et collectif... Le changement de regard sur l'Afrique ne suffit plus ! et la Série Usoni (futur en swahili) – où en 2063 l'Europe est anéantie par des catastrophes et des épidémies pour les survivants et un seul continent peut apparaître comme un eldorado : l'Afrique – **reste une fiction...**

MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 HEURES.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

SUJET

PROBLÈME 1

On note E le \mathbb{R} -espace vectoriel des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} continues, E_1 le \mathbb{R} -espace vectoriel des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} de classe C^1 . On remarquera que E_1 est inclus dans E .

On note, pour tout élément f de E , $T(f)$ l'application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$T(f)(x) = \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} f(t) dt.$$

Partie I : Propriétés générales de T

1. Établir que, pour tout élément f de E , $T(f)$ appartient à E_1 et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$(T(f))'(x) = \frac{1}{2}(f(x+1) - f(x-1)).$$

On note $T : E \rightarrow E$ l'application qui, à f , associe $T(f)$.

2. Montrer que T est un endomorphisme de E .
3. Est-ce que T est surjectif ?
4. Soit $f \in E$. Montrer que, si f est paire (respectivement impaire), alors $T(f)$ est paire (respectivement impaire).
À cet effet, on pourra utiliser le changement de variable $u = -t$ dans une intégrale.
5. Soit $f \in E$. Montrer que, si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ converge, alors $T(f)(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ et lorsque x tend vers $-\infty$.

6. On note $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application qui, à tout $t \in \mathbb{R}$, associe $s(t) = \sin(\pi t)$.
Calculer $T(s)$. Est-ce que T est injectif ?

Partie II : Premier exemple

On note, pour tout $a \in \mathbb{R}$: $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto f_a(t) = e^{at}$.

7. Calculer, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $T(f_a)(x)$.

On note : $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \mapsto \varphi(a) = \begin{cases} \frac{e^a - e^{-a}}{2a} & \text{si } a \neq 0 \\ 1 & \text{si } a = 0. \end{cases}$

8. Établir : $\forall a \in \mathbb{R}$, $T(f_a) = \varphi(a)f_a$.
9. Montrer que φ est dérivable sur \mathbb{R} et calculer, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\varphi'(a)$.
Étudier, selon $a \in \mathbb{R}$, le signe de $e^a(a-1) + e^{-a}(a+1)$.
En déduire les variations de φ et tracer l'allure de sa représentation graphique.
10. En déduire que, pour tout $\lambda \in [1; +\infty[$, il existe $f \in E - \{0\}$ tel que : $T(f) = \lambda f$.

Partie III : Deuxième exemple

On note : $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto h(t) = \frac{1}{|t| + 1}$.

11. Vérifier $h \in E$ et calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $T(h)(x)$.
À cet effet, on remarquera que h est paire, et on distinguera les cas $0 \leq x \leq 1$ et $1 < x$.
12. Étudier les variations de $T(h)$ et tracer l'allure de sa représentation graphique.
On précisera les tangentes aux points d'abscisses 0 et 1. On donne $\ln 2 \approx 0,69\dots$, $\ln 3 \approx 1,10\dots$
13. Est-ce que la réciproque du résultat obtenu dans la question 5. est vraie, c'est-à-dire, est-ce que, pour tout élément f de E , si $T(f)(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ et lorsque x tend vers $-\infty$, alors l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ converge ?

Partie IV : Recherche d'extrémums locaux pour une fonction réelle de deux variables réelles

On note : $F :]1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto F(x) = \ln(x+2) - \ln(x)$,

de sorte que $F(x) = 2T(h)(x)$, où h a été définie dans la partie III, et on note :

$$H :]1; +\infty[^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto H(x, y) = F(x) + F(y) - 2F(xy).$$

14. Montrer que H est de classe C^1 sur $]1; +\infty[^2$ et calculer les dérivées partielles premières de H en tout $(x, y) \in]1; +\infty[^2$.
15. Établir que H admet un point critique et un seul, que l'on calculera.
On note (x_0, y_0) les coordonnées de ce point critique.
16. On admet que H est de classe C^2 sur $]1; +\infty[^2$ et que

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}(x_0, y_0) \approx -1,2 \cdot 10^{-2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \approx -4,5 \cdot 10^{-2}.$$

Est-ce que H admet un extrémum local sur $]1; +\infty[^2$?

Partie V : Transformée d'une densité

Soit $f \in E$. On suppose, dans cette partie, que f est une densité.

17. Montrer, pour tout (A, B) de \mathbb{R}^2 :

$$\int_A^B T(f)(x) dx = \frac{1}{2} \int_{B-1}^{B+1} (B-x)f(x) dx - \frac{1}{2} \int_{A-1}^{A+1} (A-x)f(x) dx + \frac{1}{2} \int_{A+1}^{B+1} f(x) dx + \frac{1}{2} \int_{A-1}^{B-1} f(x) dx.$$

18. Montrer : $\forall B \in \mathbb{R}, \left| \frac{1}{2} \int_{B-1}^{B+1} (B-x)f(x) dx \right| \leq T(f)(B)$.

En déduire la limite de $\frac{1}{2} \int_{B-1}^{B+1} (B-x)f(x) dx$ lorsque B tend vers $+\infty$.

19. Établir que $T(f)$ est aussi une densité.

PROBLÈME 2

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Pour tout i de $\llbracket 1; n \rrbracket$, on note V_i la matrice colonne de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui de la i -ième ligne qui est égal à 1. On admet que la famille $(V_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ est une base de $M_{n,1}(\mathbb{R})$.

Pour tout (i, j) de $\llbracket 1; n \rrbracket^2$, on note $E_{i,j} = V_i \cdot V_j$. Ainsi, pour tout (i, j) de $\llbracket 1; n \rrbracket^2$, la matrice $E_{i,j}$ est la matrice carrée de $M_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui à l'intersection de la i -ième ligne et de la j -ième colonne qui est égal à 1. On admet que la famille $(E_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2}$ est une base de $M_n(\mathbb{R})$.

On note I_n la matrice identité de $M_n(\mathbb{R})$.

Soit A une matrice quelconque de $M_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout λ de \mathbb{R} , $A \neq \lambda I_n$.

On considère l'application Φ_A de $M_n(\mathbb{R})$ dans $M_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall M \in M_n(\mathbb{R}), \Phi_A(M) = AM - MA.$$

Partie I : Quelques généralités

1. Montrer que Φ_A est un endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$.
2. Calculer $\Phi_A(I_n)$. L'endomorphisme Φ_A est-il injectif? surjectif?

Partie II : Étude d'un cas particulier

On suppose, dans cette partie seulement, que $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

3. Justifier que la matrice A est diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$ et donner les valeurs propres de A .

On note \mathcal{B} la base de $M_2(\mathbb{R})$ constituée des quatre matrices suivantes :

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Écrire la matrice de Φ_A dans la base \mathcal{B} , puis calculer le rang de cette matrice.
5. Déterminer les valeurs propres de Φ_A et montrer que Φ_A est diagonalisable.

Partie III : Étude du cas où A est diagonalisable

On suppose, dans cette partie seulement, que la matrice A est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$.

- Montrer que tA est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$ et que A et tA ont les mêmes valeurs propres.
- Soient $X, Y \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que X (resp. Y) est un vecteur propre de A (resp. de tA).
Montrer que $X {}^tY$ est un vecteur propre de Φ_A .
- Soient (X_1, X_2, \dots, X_n) et (Y_1, Y_2, \dots, Y_n) deux bases de $M_{n,1}(\mathbb{R})$.
On note \mathcal{F} la famille $\mathcal{F} = (X_i {}^tY_j)_{(i,j) \in [1;n]^2}$.
Montrer que, pour tout (i, j) de $[1;n]^2$, $V_i {}^tV_j$ appartient au sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ engendré par \mathcal{F} , et en déduire que la famille \mathcal{F} est une base de $M_n(\mathbb{R})$.
- Établir que Φ_A est diagonalisable.
- Montrer que l'ensemble des valeurs propres de Φ_A est l'ensemble des différences $\lambda - \mu$ lorsque λ et μ décrivent les valeurs propres de A .

Partie IV : Étude d'un sous-espace propre de Φ_A associé à une valeur propre non nulle

Soient λ une valeur propre non nulle de Φ_A et $T \in M_n(\mathbb{R})$ un vecteur propre associé ; on a alors :

$$\Phi_A(T) = \lambda T \quad \text{et} \quad T \neq 0.$$

- À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer : $\forall k \in \mathbb{N}, \Phi_A(T^k) = \lambda k T^k$.
- En raisonnant par l'absurde, montrer qu'il existe un entier q de \mathbb{N}^* tel que : $T^q = 0$ et $q \leq n^2$.
On note p l'entier de \mathbb{N}^* tel que $T^p = 0$ et $T^{p-1} \neq 0$.
- Justifier qu'il existe $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $T^{p-1}X \neq 0$.
Montrer que la famille $(X, TX, \dots, T^{p-1}X)$ est libre dans $M_{n,1}(\mathbb{R})$, et en déduire : $p \leq n$.

Partie V : Étude du cas où A est symétrique

On suppose, dans cette partie seulement, que la matrice A est symétrique ; il existe donc une matrice $P \in M_n(\mathbb{R})$ orthogonale telle que $P^{-1}AP$ est diagonale. On note C_1, C_2, \dots, C_n les colonnes de P .

Pour toutes matrices $M = (m_{i,j})_{(i,j) \in [1;n]^2}$ et $N = (n_{i,j})_{(i,j) \in [1;n]^2}$ de $M_n(\mathbb{R})$, on définit :

$$(M | N) = \sum_{(i,j) \in [1;n]^2} m_{i,j} n_{i,j}.$$

- Montrer que l'application $(\cdot | \cdot)$ est un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$.
- Montrer : $\forall (M, N) \in M_n(\mathbb{R})^2, (M | N) = (M {}^tN | I_n)$.
- Pour tout (i, j) de $[1;n]^2$, calculer ${}^tC_i C_j$.
- Pour tout (i, j) de $[1;n]^2$, déterminer les coefficients diagonaux de la matrice $C_i {}^tC_j$ et en déduire la valeur de $(C_i {}^tC_j | I_n)$.
- Pour tout (i, j, k, ℓ) de $[1;n]^4$, calculer $(C_i {}^tC_j | C_k {}^tC_\ell)$.
- On considère la famille $\mathcal{G} = (C_i {}^tC_j)_{(i,j) \in [1;n]^2}$ de $M_n(\mathbb{R})$.
Montrer que \mathcal{G} est une base orthonormée pour le produit scalaire $(\cdot | \cdot)$ de $M_n(\mathbb{R})$ et que \mathcal{G} est constituée de vecteurs propres de Φ_A .

CORRIGÉ

Par Jean-Louis Roque, professeur au lycée Pasteur à Neuilly-sur-Seine, et external lecturer à Essec Business School.

Problème 1

Avant toute chose, nous tenons à préciser que lorsque f appartient à E , $T(f)$ est effectivement une application de \mathbb{R} dans lui-même.

Soit en effet $f \in E$ et $x \in \mathbb{R}$. La fonction f étant continue sur \mathbb{R} l'est, *a fortiori*, sur le segment $[x - 1, x + 1]$ et l'intégrale :

$$\int_{x-1}^{x+1} f(t) dt$$

se doit d'exister comme nous l'avons appris en classe de terminale. Tout est donc *under control*.

Partie 1

1. Soit $f \in E$. Gaston Darboux et Isaac Barrow assurent de concert l'existence d'une primitive F de f sur \mathbb{R} ainsi que l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad T(f)(x) = \frac{1}{2}(F(x+1) - F(x-1))$$

La fonction F , primitive d'une fonction continue sur \mathbb{R} y hérite d'une authentique et méritée classe \mathcal{C}^1 qu'elle transmet directement à $T(f)$ *via* les théorèmes généraux. En outre et dérivée d'une primitive et d'une composition obligeant, l'on a nettement :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (T(f))'(x) = \frac{1}{2}(f(x+1) - f(x-1))$$

puisque les dérivées des fonctions affines...

2. Nous devons, fatalement, nous organiser en deux temps.

– Soit $f \in E$, nous venons d'établir que l'application $T(f)$ appartient à E_1 , ensemble qui, paraît-il(*), est inclus dans E . Autant dire alors que T applique bien E dans lui-même.

– Quant à sa linéarité, elle découle essentiellement de celle de l'intégration.

Nous avons ainsi effectivement :

$$T \in \mathcal{L}(E)$$

3. Lorsque, tout récemment, nous avons établi que T applique E dans lui-même, nous avons en réalité constaté que, pour toute $f \in E$, l'application $T(f)$ appartient à E_1 , ce que nous pouvons reformuler en disant tout bêtement que :

$$\text{Im } T \subset E_1$$

Le texte nous a étonnamment rappelé que E_1 est inclus dans E , mais nul ne peut raisonnablement ignorer que cette inclusion est *stricte*, la classique preuve de celle

(*) Le texte rappelle de ces *scoops*...

allégation utilisant la fonction « valeur absolue » qui certes est continue sur \mathbb{R} mais qui n'y jouera jamais de la classe \mathcal{C}^1 . Il devrait immédiatement s'ensuivre que :

$$\text{Im } T \neq E$$

et T n'est définitivement pas surjectif.

4. Soit $x \in \mathbb{R}$ et organisons-nous en deux temps.

– Supposons que f soit paire. Nous glissons allègrement sur la symétrie de \mathbb{R} rapport à zéro et nous partons de :

$$T(f)(-x) = \frac{1}{2} \int_{-x-1}^{-x+1} f(t) dt$$

Notre ami Trebogad(*) préfère plutôt le changement de variable $t = -u$ et signale, dans la foulée, que la fonction affine $u \mapsto -u$ réalise, à l'évidence, une bijection de classe \mathcal{C}^1 du segment $[x-1, x+1]$ sur le segment $[-x-1, -x+1]$ à telle enseigne que, selon le théorème du changement de variable, nous avons :

$$T(f)(-x) = \frac{1}{2} \int_{x+1}^{x-1} f(-u) (-du)$$

Après utilisation de la parité de f et remise des bornes dans le sens *ad hoc*, le *physio* reconnaît alors l'égalité :

$$T(f)(-x) = T(f)(x)$$

chronique d'une parité annoncée.

– Si l'on suppose maintenant que f est impaire, l'on se doute bien que l'aboutissement s'atteindra *mutatis mutandis*.

5. Comme f est continue sur \mathbb{R} , l'intégrale en question n'est impropre que deux fois et si l'on en croit l'important « test de la primitive » la fonction F que nous avons évoquée quelques lignes plus haut doit posséder une limite finie L en plus l'infini et une limite finie ℓ en moins l'infini. En conséquence et grâce aux théorèmes généraux sur les limites, nous avons :

– d'une part :

$$\frac{1}{2}(F(x+1) - F(x-1)) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}(L - L)$$

– d'autre part :

$$\frac{1}{2}(F(x+1) - F(x-1)) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2}(\ell - \ell)$$

et autant dire alors effectivement que :

$$T(f)(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{et} \quad T(f)(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$$

(*) Dagobert en verlan, une métaphorique allusion aux trop nombreux changements de variables présentés à l'envers...

6. La fonction s est évidemment continue sur \mathbb{R} et l'une de ses primitives n'est autre que l'application :

$$S : t \mapsto -\frac{1}{\pi} \cos \pi t$$

Soit maintenant $x \in \mathbb{R}$. Comme nous l'avons déjà fait valoir plus haut, nous avons :

$$T(s)(x) = \frac{1}{2}(S(x+1) - S(x-1)) = \frac{1}{2\pi}(\cos \pi(x-1) - \cos \pi(x+1))$$

et comme à l'évidence :

$$\pi(x+1) = \pi(x-1) + 2\pi$$

et que la fonction *cosinus* est 2π -périodique, il semble inéluctable que :

$$T(s)(x) = 0$$

Bref :

$$T(s) = 0$$

et cela montre que s appartient au noyau de T . En outre, s n'est assurément pas la fonction nulle puisque par exemple :

$$s\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

et voilà donc que :

$$\text{Ker } T \neq \{0\}$$

Notre pauvre endomorphisme T , qui n'était déjà pas surjectif, échappe également aux joies de l'injectivité. Décidément ce n'était pas son jour...

Partie 2

7. Soit a un nombre réel. La fonction f_a est notablement continue sur \mathbb{R} et l'une de ses primitives F_a doit se négocier selon les valeurs de a . Nous proposons :

$$F_a : t \mapsto \frac{e^{at}}{a} \quad \text{lorsque } a \neq 0$$

et :

$$F_a : t \mapsto t \quad \text{lorsque } a = 0$$

Soit maintenant $x \in \mathbb{R}$ et organisons-nous en deux temps.

- Si $a \neq 0$, on trouve sans problème :

$$T(f_a)(x) = \frac{e^{a(x+1)} - e^{a(x-1)}}{2a}$$

- Si $a = 0$, on parvient de même à :

$$T(f_a)(x) = 1$$

8. Combien de points pour cette question ?

9. Les généreux théorèmes généraux donnent déjà φ dérivable sur \mathbb{R}^* et l'on découvre aisément que :

$$\forall a \in \mathbb{R}^* \quad \varphi'(a) = \frac{(a-1)e^a + (a+1)e^{-a}}{2a^2}$$

Soit désormais a différent de zéro. Nous nous penchons maintenant sur le taux de Newton qui est au cœur du débat et nous avons :

$$\frac{\varphi(a) - \varphi(0)}{a} = \frac{e^a - e^{-a} - 2a}{2a^2}$$

Comme il fallait s'y attendre, cette quantité présente une forme indéterminée en zéro et vu sa tête, nul ne peut ignorer que le secret de son comportement passe par le développement limité à l'ordre 2 de son numérateur. *Here we go!*

Nous savons par cœur qu'au voisinage de zéro :

$$e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2} + o(a^2) \quad \text{et} \quad e^{-a} = 1 - a + \frac{a^2}{2} + o(a^2)$$

d'où ressort quasi mentalement l'égalité :

$$e^a - e^{-a} - 2a = o(a^2)$$

Il en résulte immédiatement que :

$$\frac{\varphi(a) - \varphi(0)}{a} \xrightarrow{a \rightarrow 0} 0$$

et il se trouve que φ est bel et bien dérivable en zéro et qu'en prime :

$$\varphi'(0) = 0$$

Bref, l'application φ est, comme ils l'affirment, dérivable sur \mathbb{R} et :

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \varphi'(a) = \begin{cases} \frac{(a-1)e^a + (a+1)e^{-a}}{2a^2} & \text{si } a \neq 0 \\ 0 & \text{si } a = 0 \end{cases}$$

Poursuivons en notant u l'application clairement définie sur \mathbb{R} par :

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad u(a) = (a-1)e^a + (a+1)e^{-a}$$

Elle est bien entendu dérivable sur \mathbb{R} et l'on trouve facilement :

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad u'(a) = a(e^a - e^{-a})$$

Il s'ensuit alors aisément le tableau de variation :

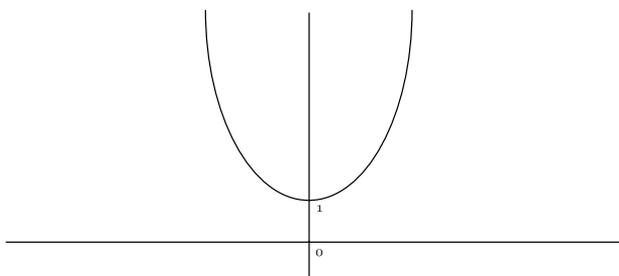
| | | | | | |
|------------|-----------|------------|-----|------------|-----------|
| a | $-\infty$ | | 0 | | $+\infty$ |
| u' | | $+$ | 0 | $+$ | |
| u | | \nearrow | 0 | \nearrow | |
| φ' | | $-$ | 0 | $+$ | |
| φ | $+\infty$ | \searrow | 1 | \nearrow | $+\infty$ |

les limites en plus et moins l'infini de φ procédant essentiellement de la très classique prépondérance :

$$\frac{e^t}{t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$$

La représentation graphique ne se fait alors plus attendre, la lumineuse parité de l'application φ apportant un peu de précision à la qualité de notre dessin...

Here you are !



10. Il résulte, classiquement, de l'étude précédente et du théorème des valeurs intermédiaires de Bernhard Bolzano que :

$$\varphi(\mathbb{R}) = [1, +\infty[$$

Soit maintenant λ appartenant à $[1, +\infty[$. Vu ce que nous venons d'affirmer, il existe un réel a tel que :

$$\lambda = \varphi(a)$$

et la terrible question 8 assure alors que :

$$T(f_a) = \lambda f_a$$

et comme à l'évidence f_a n'est pas la fonction nulle...

† Dommage que le texte n'ait pas envisagé les choses sous l'angle de la *propreté* car il vient en réalité d'être justifié que :

$$[1, +\infty[\subset \text{Spec } T$$

Partie 3

11. Nous avons déjà rappelé que la fonction « valeur absolue » est continue sur \mathbb{R} , nous affirmons que l'application :

$$t \mapsto 1 + |t|$$

ne s'annule visiblement jamais et cela devrait être suffisant pour justifier l'appartenance à E de la fonction h .

Soit alors $x \in \mathbb{R}$. C'est quoi qu'il arrive que nous avons :

$$T(h)(x) = \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} \frac{dt}{1 + |t|}$$

Respectueux des histoires de *parité*, nous obéissons au texte et nous nous organisons en conséquence.

- Si $0 \leq x \leq 1$, l'on a bien sûr :

$$x - 1 \leq 0 \leq x + 1$$

La gestion de la valeur absolue nous oblige, bien entendu, à *chasser* en zéro de telle manière que :

$$T(h)(x) = \frac{1}{2} \int_{x-1}^0 \frac{dt}{1-t} + \frac{1}{2} \int_0^{x+1} \frac{dt}{1+t}$$

Le calcul se termine aisément et l'on trouve :

$$T(h)(x) = \frac{1}{2} \ln(4 - x^2)$$

- Si $x > 1$, nous avons cette fois :

$$0 < x - 1 < x + 1$$

et l'on a alors *absolument* :

$$T(h)(x) = \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} \frac{dt}{1+t} = \frac{1}{2} (\ln(2+x) - \ln x) = \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)$$

Nous venons donc de calculer $T(h)(x)$ pour tous les x positifs mais en vérité le texte demande ce calcul pour tous les x réels. La remarque du texte est fondée, la fonction h est indéniablement paire, *parité* qui, si l'on en croit la question 4, est automatiquement transmise à sa copine $T(h)$. Bref :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad T(h)(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \ln(4 - x^2) & \text{si } |x| \leq 1 \\ \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{2}{|x|}\right) & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$

12. Comme nous l'avons déjà dit, $T(h)$ est une fonction paire. Il suffit donc de mener son étude du côté de la positivité et grâce à la question 1 et à quelques *facéties*, l'on trouve aisément :

$$\forall x \geq 0 \quad (T(h))'(x) = \begin{cases} \frac{x}{x^2 - 4} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{-1}{x(x+2)} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Cette dérivée étant ouvertement négative, les variations de $T(h)$ sur \mathbb{R}_+ sont consignées dans le tableau suivant :

| | | | |
|-----------|---------|------------|-----------|
| x | 0 | | $+\infty$ |
| $(T(h))'$ | | - | |
| $T(h)$ | $\ln 2$ | \searrow | 0 |

la valeur en zéro et la limite en plus l'infini n'étant que de très tranquilles formalités.

Les équations des deux tangentes en question sont très faciles à débusquer :

- en zéro, on trouve :

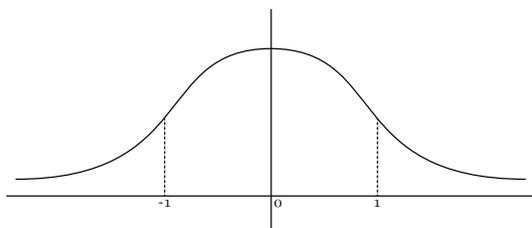
$$y = \ln 2$$

fingers in the nose ;

- quant à celle au point 1, il s'agit de :

$$y = -\frac{x-1}{3} + \frac{1}{2} \ln 3$$

Le graphe tant attendu ne demande alors qu'à éclore. *Here it is.*



† Si l'on a le courage de pousser jusqu'à la dérivée seconde, l'on constate aisément que $T(h)$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ et qu'en chaque point -1 et 1 elle possède des dérivées secondes à droite et à gauche différentes. En outre, en observant le signe de notre dérivée seconde, l'on apprend facilement que $T(h)$ est une fonction convexe sur chacune des demi-droites :

$$]-\infty, -1] \quad ; \quad [1, +\infty[$$

alors qu'elle est concave sur le segment $[-1, 1]$. Les deux points d'abscisse -1 et 1 sont donc des inflexions de $T(h)$ mais, une fois n'est pas coutume, la dérivée seconde ne s'y annule pas...

Ces précieuses informations ont bien sûr permis de peaufiner le tracé de notre graphe.

13. La fonction h est continue sur $[0, +\infty[$, elle y a pour primitive l'application :

$$t \longmapsto \ln(1+t)$$

et cette primitive n'a sûrement pas de limite finie en plus l'infini, pour la simple et bonne raison que :

$$\ln(1+t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} +\infty$$

Le test de la primitive est alors formel. L'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} h(t) dt$$

n'a pas les moyens d'exister, pas plus, *a fortiori*, que sa cousine :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(t) dt$$

Cependant, et *because* l'évidente limite :

$$\frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} 0$$

nous n'avons aucun mal à clamer haut et fort que :

$$T(h)(x) \xrightarrow[x \rightarrow \pm\infty]{} 0$$

et la réciproque en question est plutôt dans les choux...

Partie 4

Pour alléger un peu l'atmosphère, nous adopterons la notation :

$$U =]1, +\infty[\times]1, +\infty[$$

et nous commençons par une nécessaire mise au point. Notons :

$$U_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 1\} \quad \text{et} \quad U_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 1\}$$

Ce sont les images réciproques respectives de l'ouvert $]1, +\infty[$ de \mathbb{R} par les deux applications coordonnées dont la continuité sur \mathbb{R}^2 était déjà connue de l'arrière grand-mère de Matusalem. Il s'agit à ce titre de deux ouverts de \mathbb{R}^2 , un certain Felix Hausdorff n'étant d'ailleurs pas totalement étranger à nos allégations.

Étant donné que :

$$U = U_1 \cap U_2$$

le même Felix assure l'*ouverture* du futur domaine de définition de H , ce qui, pour oser parler sérieusement de classe \mathcal{C}^1 ou \mathcal{C}^2 , est tout de même la moindre des choses...

Notons également que, lorsque (x, y) appartient à U , le produit xy est strictement plus grand que 1 et H est donc définitivement bien définie sur U .

Nous pouvons désormais envisager la suite.

14. Soit $(x, y) \in U$. L'on a vite fait de constater que :

$$H(x, y) = \ln(x+2) + \ln(y+2) + \ln x + \ln y - 2 \ln(xy+2)$$

Puisque les deux applications :

$$(x, y) \mapsto x \quad \text{et} \quad (x, y) \mapsto y$$

sont de classe \mathcal{C}^2 sur U — ce sont précisément les deux applications coordonnées dont nous parlions il y a un instant — et que sur U les cinq fonctions :

$$(x, y) \mapsto x+2 \quad ; \quad (x, y) \mapsto y+2 \quad ; \quad (x, y) \mapsto x \quad ; \quad (x, y) \mapsto y$$

et :

$$(x, y) \mapsto 2 + xy$$

sont à valeurs *strictement* positives, les théorèmes généraux donnent la fonction H de classe \mathcal{C}^2 sur U puisque c'est le cas de la fonction \ln mais sur \mathbb{R}_+^* s'entend.

On trouve ensuite aisément que :

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x} - \frac{2y}{xy+2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{y+2} + \frac{1}{y} - \frac{2x}{xy+2}$$

15. Nous rappelons qu'il est fortement conseillé de mener la recherche des points critiques comme une analyse-synthèse. Soit donc $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

– Supposons que (x, y) soit critique pour H . Cela signifie que (x, y) appartient à U et que :

$$\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x} = \frac{2y}{xy+2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{y+2} + \frac{1}{y} = \frac{2x}{xy+2}$$

On multiplie la première par x , la seconde par y et l'on en déduit transitivement que :

$$\frac{x}{x+2} + 1 = \frac{y}{y+2} + 1$$

égalité de laquelle il ressort facilement que :

$$x = y$$

On répercute ensuite dans la première ce qui révèle assez rapidement que :

$$x^2 - 2x - 2 = 0$$

et comme nous n'avons pas oublié la panoplie de la classe de première, il devrait s'ensuivre que :

$$x = 1 + \sqrt{3}$$

puisque l'autre racine n'est ni au bon moment, ni au bon endroit...

Il résulte de cette analyse que le seul point critique potentiel est :

$$(1 + \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3})$$

– Le point $(1 + \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3})$ appartient ouvertement à U et ce n'est qu'une formalité que de vérifier qu'il annule nos deux dérivées partielles, ce que nous laissons au soin de notre *dévoué* lecteur !

Bref, la fonction H n'a effectivement qu'un seul point critique qui n'est autre que :

$$(1 + \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3})$$

16. Il semble que, lors de la quatorzième, nous ayons établi la classe \mathcal{C}^2 de H sur U et nous ne voyons donc pas la raison de l'admettre. Notons également que des valeurs approchées sans *aucune* indication de marges d'erreurs sont des données *inexploitables* et il va donc impérativement falloir passer au calcul exact.

Soit à nouveau $(x, y) \in U$. On trouve aisément :

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x, y) = \frac{2y^2}{(xy+2)^2} - \frac{1}{(x+2)^2} - \frac{1}{x^2} ; \quad \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}(x, y) = \frac{2x^2}{(xy+2)^2} - \frac{1}{(y+2)^2} - \frac{1}{y^2}$$

puis :

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y}(x, y) = -\frac{2}{(xy+2)^2}$$

La suite des événements n'est pas vraiment drôle et c'est la raison pour la quelle nous laissons à notre *cannibal lecteur* le soin de dévorer le calcul des valeurs de ces *zozos* au point critique en question. Il trouvera tout d'abord :

$$r = t = \frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{7}{6} \quad \text{et} \quad s = \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{3}$$

et ensuite :

$$rt - s^2 = -\frac{3}{18(45 + 26\sqrt{3})}$$

Oui mais voilà, puisque visiblement :

$$rt - s^2 < 0$$

la fonction H ne présente pas d'extremum local au point critique :

$$(1 + \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3})$$

et elle y présenterait plutôt une configuration de *col*.

Enfin, et pour répondre complètement à la question, signalons qu'une importante condition nécessaire du premier ordre, stipule qu'un extremum local de H sur l'ouvert U ne peut avoir lieu qu'en un point critique et comme H n'en a qu'un...

Bref, la fonction H n'a désespérément aucun extremum local sur U . Tout ça pour ça...

Partie 5

17. Soit A et B deux nombres réels. Considérons les deux fonctions :

$$u : x \mapsto T(f)(x) \quad \text{et} \quad v : x \mapsto x$$

Elles sont de classe \mathcal{C}^1 sur le segment $[A, B]$ — depuis peu il est vrai pour la première — et l'on a :

$$\forall x \in [A, B] \quad u'(x) = \frac{1}{2}(f(x+1) - f(x-1)) \quad \text{et} \quad v'(x) = 1$$

Ainsi, selon la formule d'intégration par parties, voilà tout d'abord que :

$$\int_A^B T(f)(x) dx = [xT(f)(x)]_A^B - \frac{1}{2} \int_A^B x(f(x+1) - f(x-1)) dx$$

et il s'agit maintenant d'y aller en douceur.

– Nous avons tout d'abord :

$$[xT(f)(x)]_A^B = \frac{B}{2} \int_{B-1}^{B+1} f(x) dx - \frac{A}{2} \int_{A-1}^{A+1} f(x) dx$$

– Grâce à un *chouia* de linéarité, nous avons ensuite :

$$\int_A^B x(f(x+1) - f(x-1)) dx = \int_A^B x f(x+1) dx - \int_A^B x f(x-1) dx$$

Au *right hand side* nous proposons les changements de variables $x = u - 1$ dans la première intégrale et $x = u + 1$ dans la seconde, changements *affines* qui ne sont pas plus difficiles à justifier que la quadrature du carré, et *boum badamoum* :

$$\int_A^B x(f(x+1) - f(x-1)) dx = \int_{A+1}^{B+1} (u-1)f(u) du - \int_{A-1}^{B-1} (u+1)f(u) du$$

Un mini réarrangement des choses utilisant à coup sûr quelques soupçons de linéarité transforme maintenant le côté droit en :

$$\int_{A+1}^{B+1} u f(u) du - \int_{A-1}^{B-1} u f(u) du - \int_{A+1}^{B+1} f(u) du - \int_{A-1}^{B-1} f(u) du$$

et en entonnant tous en chœur : « *chaslons enfants de la patrie* » voilà aisément que :

$$\int_{A+1}^{B+1} uf(u)du - \int_{A-1}^{B-1} uf(u)du = \int_{B-1}^{B+1} uf(u)du - \int_{A-1}^{A+1} uf(u)du$$

puisqu' de façon très schématique :

$$\int_{A-1}^{A+1} + \int_{A+1}^{B+1} = \int_{A-1}^{B-1} + \int_{B-1}^{B+1}$$

Il suffit alors de remettre tout ce petit monde à sa place, de continuer encore et toujours de linéariser ce qui est linéarisable et l'inégalité souhaitée est acquise mais, *as usual*, nous demandons au lecteur suspicieux de se charger de l'intendance.

18. Soit $B \in \mathbb{R}$. L'inégalité triangulaire intégrale assure déjà que :

$$\left| \frac{1}{2} \int_{B-1}^{B+1} (B-x)f(x)dx \right| \leq \frac{1}{2} \int_{B-1}^{B+1} |B-x|f(x)dx$$

la *densitaire* positivité de f et la position géographique des bornes n'étant pas totalement étrangères à l'affaire. Soit alors x appartenant au segment $[B-1, B+1]$. Nous avons donc :

$$|B-x| \leq 1 \quad \text{puis} \quad |B-x|f(x) \leq f(x)$$

puisqu', au risque de radoter, les densités sont rarement négatives... L'intégration étant croissante, il s'en déduit(*) transitivement :

$$\left| \frac{1}{2} \int_{B-1}^{B+1} (B-x)f(x)dx \right| \leq \frac{1}{2} \int_{B-1}^{B+1} f(x)dx$$

puisqu'entre temps, les bornes n'ont pas changé d'âne. Il ne reste alors qu'à réveiller le *physio*...

Poursuivons. Étant donné que f est une densité, son intégrale sur \mathbb{R} existe, et la cinquième question assène catégoriquement que $T(f)$ tend vers zéro en plus l'infini. Le *squeezing process* peut alors prendre le relais et *vlan* !

$$\frac{1}{2} \int_{B-1}^{B+1} (B-x)f(x)dx \xrightarrow{B \rightarrow +\infty} 0$$

¶ Puisque la question 5 fonctionne également en moins l'infini, c'est bien sûr *mutatis mutandis* que l'on obtiendra :

$$\frac{1}{2} \int_{A-1}^{A+1} (A-x)f(x)dx \xrightarrow{A \rightarrow -\infty} 0$$

Nous essaierons de nous en souvenir dans quelques instants.

(*) *Comme cochon!*

19. Nous avons quatre points à passer en revue.

– La fonction $T(f)$ est tout d'abord parfaitement définie sur \mathbb{R} et ce, depuis la genèse de ce texte.

– Vu que f est *densitairement* positive sur \mathbb{R} , sa copine $T(f)$ l'est également puisque l'intégration est croissante quand les bornes le veulent bien.

– Depuis la toute première question, l'application $T(f)$ est continue sur \mathbb{R} et nous n'allons pas nous en plaindre car nous étions prêts à lui tolérer une nombre fini de *bugs*.

– Il reste alors à causer d'intégrale sur \mathbb{R} , intégrale qui, à bien y regarder, n'est impropre que deux fois. Il nous faut donc étudier séparément :

$$\int_0^{+\infty} T(f)(x)dx \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^0 T(f)(x)dx$$

– Soit B un réel positif. Grâce à un choix qui s'impose et à la précédente question, nous avons :

$$\int_0^B T(f)(x)dx = I_B + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 xf(x)dx + \frac{1}{2} \int_1^{B+1} f(x)dx + \frac{1}{2} \int_{-1}^{B-1} f(x)dx$$

où, histoire d'alléger un peu les écritures, nous avons noté I_B la vieille connaissance :

$$\frac{1}{2} \int_{B-1}^{B+1} (B-x)f(x)dx$$

Nous venons d'apprendre que cette dernière tend vers zéro quand B tend vers plus l'infini et densité oblige nous avons également :

$$\int_1^{B+1} f(x)dx \xrightarrow{B \rightarrow +\infty} \int_1^{+\infty} f(x)dx \quad \text{et} \quad \int_{-1}^{B-1} f(x)dx \xrightarrow{B \rightarrow +\infty} \int_{-1}^{+\infty} f(x)dx$$

Il s'ensuit immédiatement que l'intégrale sur $[0, +\infty[$ de $T(f)$ existe et que :

$$\int_0^{+\infty} T(f)(x)dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 xf(x)dx + \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} f(x)dx + \frac{1}{2} \int_{-1}^{+\infty} f(x)dx$$

– On démontre *mutatis mutandis* que l'intégrale sur $] -\infty, 0]$ de $T(f)$ existe également et que :

$$\int_{-\infty}^0 T(f)(x)dx = -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 xf(x)dx + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{-1} f(x)dx + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{-1} f(x)dx$$

La morale de l'histoire est que l'intégrale sur \mathbb{R} de $T(f)$ existe et que, après quelques aménagements et autres magiques simplifications, l'on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} T(f)(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

et comme f est une densité...

Problème 2

La famille $(V_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est *officiellement* la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$. Quant à la famille double :

$$(E_{ij})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$$

il s'agit de la base consacrée et canonique de $M_n(\mathbb{R})$ et il n'y a donc rien à admettre ! Nous en profitons pour rappeler que les E_{ij} sont ici les fameuses « unités matricielles » du format (n, n) et qu'il en existe aussi pour les formats rectangulaires. Notons enfin que certains auteurs les notent e_{ij} .

Partie 1

1. Nous devons nous organiser en deux temps.

– Soit M appartenant à $M_n(\mathbb{R})$. Les formats respectifs autorisent les deux produits matriciels AM et MA qui se trouvent être encore carrés (n, n) , tout comme la différence :

$$AM - MA$$

et Φ_A applique donc bien $M_n(\mathbb{R})$ dans lui-même.

– Quant à la linéarité de Φ_A , elle repose essentiellement et mentalement sur la distributivité à droite et à gauche du produit matriciel par rapport à la somme.

Nous avons donc effectivement :

$$\Phi_A \in \mathcal{L}(M_n(\mathbb{R}))$$

† L'opérateur Φ_A est bien connu dans la littérature mathématique. Il s'appelle « opérateur de Sophus Lie » attaché à la matrice A .

2. Il semble que :

$$\Phi_A(I_n) = 0$$

et comme assurément I_n n'est pas nulle, il s'avère que :

$$\text{Ker } \Phi_A \neq \{0\}$$

L'endomorphisme Φ_A ne goûtera donc pas aux joies de l'injectivité ! Du coup, il ne goûtera pas non plus à celles de la surjectivité puisque, l'espace vectoriel $M_n(\mathbb{R})$ étant de dimension finie, cela contrarierait drôlement l'importante caractérisation des automorphismes en dimension finie...

Partie 2

3. Étrange ce « et », très étrange ! Il semble en effet impératif de *commencer* par les valeurs propres de A . À cet effet, nous avons à n'en pas douter :

$$\text{Spec } A = \{1, 3\}$$

puisque les valeurs propres des matrices trigonales se calculent avec les mirettes. Du coup, la matrice A est d'ordre 2 et possède *désormais* deux valeurs propres réelles et *différentes*. Une importante condition suffisante — *the sufficient condition* de diagonalisation — termine alors l'affaire.

4. Après quelques poétiques produits matriciels, *as usual* laissés à la charge de l'impétrant, et grâce à une parfaite maîtrise du protocole de « matricialisation » on trouve :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\Phi_A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Notons H cette matrice et C_1, \dots, C_4 ses différentes colonnes. Comme :

$$C_1 = -C_4 \quad \text{et} \quad C_2 = -2C_4$$

et comme la famille (C_3, C_4) est mentalement libre, nous crions haut et fort que :

$$\text{rg } H = 2$$

5. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Le lecteur constatera aisément que les deux opérations élémentaires :

$$L_1 \leftrightarrow L_2 \quad ; \quad L_2 \leftarrow L_2 - \lambda L_1$$

font passer de la matrice $H - \lambda I_4$ à la matrice *up-trigonal* :

$$U(\lambda) = \begin{bmatrix} -1 & -(\lambda+2) & 0 & 1 \\ 0 & \lambda(\lambda+2) & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix}$$

et il en résulte en un tournemain que :

$$\text{Spec } H = \{-2, 0, 2\}$$

L'espace propre $E_0(H)$ n'est autre que le noyau de H et si l'on en croit monsieur *du rang* :

$$\dim E_0(H) = 4 - \text{rg } H = 2$$

la dernière égalité provenant de la fin de la précédente.

Pour terminer l'affaire nous nous appuyerons sur deux importantes vérités :

– *Primo*, un espace propre n'est *jamais* nul. Il en résulte donc que :

$$\dim E_{-2}(H) \geq 1 \quad \text{et} \quad \dim E_2(H) \geq 1$$

– *Deuzio*, selon l'importante règle du non-dépassement(*), nous avons dans le cas présent :

$$\dim E_{-2}(H) + \dim E_0(H) + \dim E_2(H) \leq 4$$

(*) Pour une matrice M d'ordre n une somme de dimensions d'espaces $E_\lambda(M)$ attachés à des λ *différents* ne peut jamais dépasser l'entier n .

et tout cela oblige inéluctablement que :

$$\dim E_{-2}(H) + \dim E_0(H) + \dim E_2(H) = 4$$

et une classique *cms* de diagonalisation — celle du comptable pour les initiés — assure alors que la matrice H est diagonalisable.

Comme H est l'une des matrices de l'endomorphisme Φ_A nous en déduisons que :

$$\text{Spec } \Phi_A = \{-2, 0, 2\}$$

et que Φ_A est effectivement diagonalisable.

Partie 3

6. Il est dit par définition qu'il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que :

$$A = P \cdot D \cdot P^{-1}$$

Grâce au *dressing undressing principle*, la transposition de cette égalité donne :

$$A^T = (P^{-1})^T \cdot D \cdot P^T$$

puisque les matrices diagonales sont ouvertement symétriques. En outre, puisque la transposition et l'inversion font un très bon ménage — transposée de l'inverse, inverse de la transposée même combat ! — nous avons également :

$$A^T = (P^T)^{-1} \cdot D \cdot P^T$$

et la matrice A^T devient ainsi semblable à la diagonale D . Autant dire alors, par définition, que A^T est déjà diagonalisable. Enfin, comme il est bien connu que deux matrices semblables ont le même spectre, les valeurs propres de A^T sont exactement les mêmes que celles de D et comme ces dernières sont aussi celles de A ...

7. Notons λ la valeur propre de A attachée au vecteur propre X et μ celle de A^T attachée au vecteur Y . La *colimatrice*(*) $X \cdot Y^T$ appartient à $M_n(\mathbb{R})$ et nous avons :

$$\Phi_A(X \cdot Y^T) = A \cdot X \cdot Y^T - X \cdot Y^T \cdot A$$

Vu les dispositions que nous avons adoptées, nous avons :

$$A \cdot X = \lambda X \quad \text{et} \quad A^T \cdot Y = \mu Y$$

un joli coup de *dup* transforme la seconde en :

$$Y^T \cdot A = \mu Y^T$$

(*) C'est le nom que nous donnons aux matrices carrées — ou même rectangulaires — qui sont le produit d'une matrice colonne par une matrice ligne.

et voilà donc au bout du compte que :

$$\Phi_A(X \cdot Y^T) = (\lambda - \mu)X \cdot Y^T$$

Tout cela est déjà bien parti, mais attention ce n'est pas fini ! Pour véritablement conclure encore faut-il — *never forget!* — que notre *colimatrice* ne soit pas nulle.

Vu que X et Y sont des vecteurs propres, la colonne X et la ligne Y^T ne sont certes pas nulles mais les *intégristes* de tout bord savent que cela n'est pas complètement suffisant puisqu'il y a, dans le monde, des palanquées de matrices *non nulles* dont le produit est misérablement *nul*.

Oui mais voilà, ce phénomène est totalement impossible lorsqu'il s'agit du produit d'une colonne C non nulle par une ligne L non nulle, on parle même parfois de « *cl-intégrité* ».

En effet, l'une des entrées c_i de la colonne C est non nulle et l'une des entrées ℓ_j de L est également et comme :

$$(CL)_{ij} = c_i \ell_j$$

le produit CL n'est pas nul *and Bob's your uncle!*

† Non seulement $X \cdot Y^T$ est désormais vecteur propre de Φ_A , mais la valeur propre attachée est la différence $\lambda - \mu$.

8. Soit i et j deux éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Bases de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ obligent, il existe des scalaires :

$$a_1, \dots, a_n \quad ; \quad b_1, \dots, b_n$$

tels que :

$$V_i = \sum_{h=1}^n a_h X_h \quad \text{et} \quad V_j = \sum_{k=1}^n b_k Y_k$$

et la transposition étant linéaire, il s'ensuit également que :

$$V_j^T = \sum_{k=1}^n b_k Y_k^T$$

Le développement du produit $V_i \cdot V_j^T$ est alors immédiat et voilà donc que :

$$V_i \cdot V_j^T = \sum_{h=1}^n \sum_{k=1}^n a_h b_k X_h \cdot Y_k^T$$

ce qui est déjà une excellente nouvelle.

Vu la définition de l'unité matricielle E_{ij} , il semble que nous venions d'établir que :

$$E_{ij} \in \text{Vect}(\mathcal{F})$$

Faisons alors un petit bilan. Toute matrice de $M_n(\mathbb{R})$ est évidemment combinaison linéaire des matrices E_{ij} de sa base canonique et ces dernières sont, à leur tour, combinaison linéaire des matrices de la famille \mathcal{F} . On en déduit ainsi — on parle parfois de transitivité

des combinaisons linéaires — que toute matrice de $M_n(\mathbb{R})$ est combinaison linéaire des matrices de la famille \mathcal{F} et autrement dit :

$$M_n(\mathbb{R}) = \text{Vect}(\mathcal{F})$$

La famille \mathcal{F} est donc désormais génératrice de $M_n(\mathbb{R})$ et elle est providentiellement formée de n^2 vecteurs, l'entier n^2 étant justement la dimension de $M_n(\mathbb{R})$. Il ne reste plus qu'à ne pas avoir oublié la cruciale caractérisation des bases en dimension finie.

9. Comme A est diagonalisable, la *cns* de la base propre produit une base :

$$(X_1, \dots, X_n)$$

de $M_{n,1}(\mathbb{R})$, formée de vecteurs propres de A . Nous avons récemment établi que la transposée de A est elle-même diagonalisable et pour la même raison, nous disposons également d'une base :

$$(Y_1, \dots, Y_n)$$

de $M_{n,1}(\mathbb{R})$, formée cette fois de vecteurs propres de A^T .

Nous faisons maintenant valoir deux choses.

- D'après la septième question toutes les matrices de type :

$$X_i \cdot Y_j^T \quad \text{où } (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$$

sont des vecteurs propres de Φ_A .

- D'après la huitième, la famille :

$$\mathcal{F} = (X_i \cdot Y_j^T)_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$$

est une base de $M_n(\mathbb{R})$.

Il existe donc une base de $M_n(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de Φ_A ce qui déclenche, pour la troisième fois, la *cns* de la base propre. L'endomorphisme Φ_A est donc bel et bien diagonalisable.

10. Notons :

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

la liste des valeurs propres respectivement attachées aux vecteurs propres (X_1, \dots, X_n) de la précédente question et notons :

$$(\mu_1, \dots, \mu_n)$$

celle des valeurs propres attachées aux vecteurs propres (Y_1, \dots, Y_n) . Il ne fait aucun doute que les λ_i sont les valeurs propres de A et que les μ_j sont celles de A^T , autrement dit exactement celles de A , puisque nous n'avons pas oublié la question 6.

Soit alors i et j deux éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$. La précieuse remarque que nous avons faite à la fin de la question 7 tombe à pic. Elle révèle que $(\lambda_i - \mu_j)$ est la valeur propre de Φ_A

attachée au vecteur propre $X_i \cdot Y_j^T$. La matrice de Φ_A dans la base propre \mathcal{F} est donc la diagonale dont les éléments diagonaux sont toutes les différences :

$$\lambda_i - \mu_j$$

où i et j parcourent l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$. So...

↗ Cela est en pure conformité avec ce que nous avons trouvé lors de la question 5. Nous avons en effet :

$$\text{Spec } A = \{1, 3\}$$

et les fameuses différences sont ici :

$$1 - 1 = 0 \quad ; \quad 1 - 3 = -2 \quad ; \quad 3 - 1 = 2 \quad ; \quad 3 - 3 = 0$$

all's well that ends well !

Partie 4

11. Il est demandé de récurre, récurrons !

- Lorsque $k = 0$, il n'y a pas grand-chose à prouver puisque $T^0 = I_n$ et que depuis peu, nous avons :

$$\Phi_A(I_n) = 0$$

- Supposons que la propriété soit établie pour un certain entier $k \in \mathbb{N}$, ce qui devrait s'écrire :

$$A \cdot T^k - T^k \cdot A = \lambda k T^k$$

Multiplions alors à droite par la matrice T . Il advient ainsi que :

$$A \cdot T^{k+1} - T^k \cdot A \cdot T = \lambda k T^{k+1}$$

et comme il est *hypothétiquement* dit que :

$$A \cdot T = T \cdot A + \lambda T$$

il s'ensuit quasi mentalement que :

$$A \cdot T^{k+1} - T^{k+1} \cdot A = \lambda(k+1) T^{k+1}$$

et nous pouvons envisager la suite.

12. Supposons par l'absurde que, pour tout $k \in \llbracket 1, n^2 \rrbracket$, l'on ait :

$$T^k \neq 0$$

Comme I_n n'est ici évidemment pas nulle, c'est en réalité pour *tous* les entiers k vérifiant :

$$0 \leq k \leq n^2$$

que la matrice T^k n'est pas nulle. Bref :

$$\forall k \in \llbracket 0, n^2 \rrbracket \quad \Phi_A(T^k) = \lambda k T^k \quad \text{et} \quad T^k \neq 0$$

et voilà donc, en définitive, que les réels λk , l'entier k se dandinant de 0 à n , sont des valeurs propres de Φ_A .

Oui mais voilà, vu que λ est donné *non nul*, ces réels λk sont deux à deux *distincts* et s'il nous est encore donné de savoir bien compter, il devrait y en avoir $n^2 + 1$.

L'endomorphisme Φ_A aurait donc $n^2 + 1$ valeurs propres distinctes alors qu'il opère dans l'espace $M_n(\mathbb{R})$ dont la dimension est légendairement n^2 . L'apagogie(*) est ainsi à son apogée et il existe donc bien un entier q vérifiant :

$$1 \leq q \leq n^2$$

tel que :

$$T^q = 0$$

† Nous venons d'établir que tout vecteur propre de Φ_A attaché à une valeur propre *non nulle* est une matrice nilpotente.

13. On observe que l'existence d'un tel entier p n'est pas totalement anodine.

Elle repose, précisément, sur l'important théorème dit « de la première fois » selon lequel toute partie non vide de \mathbb{N} possède un plus petit élément. En effet, la partie de \mathbb{N} que voici :

$$\{m \in \mathbb{N} \mid T^m = 0\}$$

n'est pas vide puisqu'elle contient au moins l'entier q de la précédente et d'après le *first time theorem* elle dispose d'un plus petit élément que nous nommons justement p . Il reste à signaler que p ne peut évidemment pas être nul et que, minimum oblige, nous avons bel et bien :

$$T^p = 0 \quad \text{et} \quad T^{p-1} \neq 0$$

† Cet entier p est bien connu. Il s'appelle « indice de nilpotence » de la matrice T .

Excusez maintenant cette petite appartée concernant, chemin faisant, les fameuses *identifications* que pratiquent les algébristes et qui sont très souvent au cœur de certains débats.

– Cela commence par l'*identification* d'une matrice $(1, 1)$ à l'unique scalaire qu'elle renferme, ce qui se traduit par les égalités :

$$\forall a \in \mathbb{K} \quad [a] = a \quad \text{et} \quad M_1(\mathbb{K}) = \mathbb{K} \quad (\text{ID}_1)$$

– Cela se poursuit un peu plus tard en *identifiant* les listes de \mathbb{K}^n aux colonnes correspondantes de $M_{n,1}(\mathbb{K})$ et les retombées ont ici le *look* :

$$\forall x \in \mathbb{K}^n \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = (x_1, \dots, x_n) \quad \text{et} \quad M_{n,1}(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^n \quad (\text{ID}_2)$$

(*) On rappelle qu'en dimension finie un spectre est toujours fini et de cardinal inférieur ou égal à la dimension ambiante.

– Nous terminons maintenant par une identification, moins répandue, mais qui fait de plus en plus son chemin, qui consiste à *confondre* toute matrice M de format (n, p) à l'application linéaire :

$$\begin{aligned}\mu : M_{p,1}(\mathbb{K}) &\longrightarrow M_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X &\longmapsto M \cdot X\end{aligned}$$

dite *canoniquement* attachée à la matrice M . Cela revient ici à décider *manu militari* des égalités :

$$M_{n,p}(\mathbb{K}) = \mathcal{L}(M_{p,1}(\mathbb{K}), M_{n,1}(\mathbb{K})) = \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n) \quad (\text{ID}_3)$$

en ayant, dans la foulée et parce que nous le valons bien, usé de la seconde identification.

Il est clair que toutes les égalités que nous venons d'écrire lors des rubriques (ID₁), (ID₂) et (ID₃) sont de pures monstruosités ou même pire, mais elles s'avèrent *inoffensives* car il y a bien sûr de l'*isomorphie*(*) entre les uns et les autres, c'est-à-dire de l'isomorphie entre les premiers objets et les objets auxquels on les identifie. En outre, l'on s'en doute bien, ces identifications sont très pratiques et ont l'immense privilège de rendre les choses souvent plus lumineuses.

Revenons maintenant à nos ovins, en utilisant la troisième identification.

Comme la matrice T^{p-1} n'est pas nulle, l'application linéaire :

$$X \longmapsto T^{p-1} \cdot X$$

à laquelle nous venons de l'identifier ne l'est pas non plus et il existe donc effectivement une colonne $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, telle que :

$$T^{p-1} \cdot X \neq 0$$

¶ Il eut été évidemment possible de donner une preuve manuelle de cette existence, mais c'eut été avouer la méconnaissance des isomorphismes — officiels ! — que nous avons évoqués plus haut, et il n'est jamais très bon de révéler de telles choses...

Poursuivons en notant que la famille en question est assez clairement intérieure à $M_{n,1}(\mathbb{R})$ et c'est déjà une très bonne chose. Soit alors a_0, \dots, a_{p-1} , des scalaires vérifiant :

$$a_0 X + a_1 T \cdot X + \dots + a_{p-1} T^{p-1} \cdot X = 0 \quad (\text{TL})$$

et supposons, avec Hyppocrate de Chios, que nos scalaires ne soient pas tous nuls. L'ensemble :

$$\{i \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket \mid a_i \neq 0\}$$

n'est donc pas vide et — *first time theorem again* — il possède un plus petit élément que nous nommons i_0 . Dans ces *minimales* conditions il ne fait aucun doute que non seulement i_0 appartient à l'ensemble $\llbracket 0, p-1 \rrbracket$ mais qu'aussi l'égalité (TL) se raccourcit notablement en :

$$a_{i_0} T^{i_0} \cdot X + \dots + a_{p-1} T^{p-1} \cdot X = 0 \quad (\text{TLR})$$

(*) C'est d'ailleurs l'occasion, si ce n'est déjà fait, de mesurer la puissance de la notion d'isomorphisme...

Vu que $i_0 \leq p-1$, le nombre $p-1-i_0$ est un entier positif et nous avons tout loisir de multiplier, l'égalité raccourcie, à gauche par la matrice T^{p-1-i_0} ce qui amène à :

$$a_{i_0} T^{p-1} \cdot X = 0$$

puisque T^p et ses *sur-acolytes* sont carrément nuls. Oui mais voilà, il est dit quelque part que :

$$a_{i_0} \neq 0 \quad \text{et} \quad T^{p-1} \cdot X \neq 0$$

chronique d'une contradiction fortement espérée. Notre famille est désormais libre dans un espace vectoriel de dimension n et comme elle est visiblement de longueur $p \dots$

Partie 5

La matrice A est ici *symétrique réelle* d'ordre supérieur ou égal à un et elle est, à ce titre, *spectralement* diagonalisable. L'existence de l'orthogonale P est donc bel et bien à l'ordre du jour. Merci, théorème spectral !

14. Il suffit de réorganiser les matrices (n, n) en hautes colonnes de hauteur n^2 pour que le *physio* reconnaisse un célèbre produit scalaire *canonique* — la somme des produits des entrées respectives — et nous n'avons rien à ajouter.

† Malgré sa *canonique* simplicité, ce produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$ a son lot de popularité. Il s'appelle produit scalaire de Schur-Hilbert-Schmidt et, dans les annales, on l'a souvent rencontré sous la forme :

$$(M | N) = \text{tr}(M \cdot N^T)$$

15. Soit i et j appartenant à $\llbracket 1, n \rrbracket$. D'après la formule du produit matriciel d'Arthur Cayley nous avons :

$$(M \cdot N^T)_{ij} = \sum_{k=1}^n (M)_{ik} (N^T)_{kj} = \sum_{k=1}^n M_{ik} N_{jk}$$

la dernière égalité procédant d'une simple gestion de transposition. Nous en déduisons immédiatement que :

$$(M \cdot N^T | I_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n M_{ik} N_{jk} \right) \delta_{ij}$$

puisque nul ne peut ignorer les liens très étroits qui existent entre la matrice unité et le symbole *delta* de Leopold Kronecker. Il est toujours très agréable de s'occuper de ces fameux *deltas* et il ne devrait subsister que :

$$(M \cdot N^T | I_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n M_{ik} N_{ik}$$

ce qui, à un maigre *ghost* près, est exactement ce qui nous est demandé.

16. Soit à nouveau i et j deux éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Le produit matriciel :

$$C_i^T \cdot C_j$$

n'est autre que le produit scalaire *canonique* des deux colonnes C_i et C_j et permettez-nous de rappeler l'important lemme suivant :

CARACTÉRISATION DE L'ORTHOGONALITÉ VIA LES COLONNES :

Soit U une matrice carrée réelle d'ordre n . Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

i. La matrice U est orthogonale, autrement dit :

$$U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$$

ii. Les colonnes de U forment une famille orthonormale de l'espace $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ équipé de sa structure euclidienne canonique.

Grâce à cette aide providentielle et parce que P est justement orthogonale, nous clamons haut et fort que :

$$C_i^{\mathbf{T}} \cdot C_j = \delta_{ij}$$

puisque nul n'est censé ignorer les liens étroits qui unissent l'orthonormalité et le symbole de Leopold.

17. Pour chaque entier $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, nous noterons :

$$c_{i1} ; c_{i2} ; \dots ; c_{in}$$

les entrées de la colonne C_i . Les *aficionados* des colimatrices savent alors sur le bout des doigts que les éléments diagonaux de :

$$C_i \cdot C_j^{\mathbf{T}}$$

sont les produits :

$$c_{ik}c_{jk} \quad \text{où } k \in \llbracket 1, n \rrbracket$$

et quand on maîtrise *farpaitement* le produit scalaire (|), il ne doit faire aucun doute que :

$$(C_i \cdot C_j^{\mathbf{T}} | I_n) = \sum_{k=1}^n c_{ik}c_{jk} = C_i^{\mathbf{T}} \cdot C_j$$

la dernière égalité procédant d'une canonique reconnaissance. La question 16 clôt l'affaire en assénant que :

$$(C_i \cdot C_j^{\mathbf{T}} | I_n) = \delta_{ij}$$

18. Soit i, j, k, ℓ quatre éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Comme les deux colimatrices :

$$M = C_i \cdot C_j^{\mathbf{T}} \quad \text{et} \quad N = C_k \cdot C_\ell^{\mathbf{T}}$$

sont carrées (n, n) , nous pouvons user de la quinzième et *boum, badaboum!*

$$(C_i \cdot C_j^{\mathbf{T}} | C_k \cdot C_\ell^{\mathbf{T}}) = (M | N) = (M \cdot N^{\mathbf{T}} | I_n) = (C_i \cdot C_j^{\mathbf{T}} \cdot C_\ell \cdot C_k^{\mathbf{T}} | I_n)$$

puisque, selon l'ineffable *dressing undressing principle* , nous avons :

$$N^T = C_\ell \cdot C_k^T$$

Il reste à bien capter que dans le quadruple produit :

$$C_i \cdot \underbrace{C_j^T \cdot C_\ell \cdot C_k^T}$$

la partie centrale que nous avons mise en évidence n'est autre que le scalaire δ_{jk} de la question 16, scalaire qui peut évidemment quitter sa position carcérale de telle manière que :

$$C_i \cdot \underbrace{C_j^T \cdot C_\ell \cdot C_k^T} = \delta_{jl} C_i \cdot C_k^T$$

Il résulte alors du *boum badaboum supra* que :

$$(C_i \cdot C_j^T \mid C_k \cdot C_\ell^T) = (\delta_{jl} C_i \cdot C_k^T \mid I_n)$$

La bilinéarité du produit scalaire et la question 17 terminent alors l'affaire en stipulant que :

$$(C_i \cdot C_j^T \mid C_k \cdot C_\ell^T) = \delta_{jl} \delta_{ik}$$

19. Nous allons prendre les choses les unes après les autres.

– La première concerne les secrets de fabrication du passage diagonalisant P . Nous ne pouvons pas ignorer que la famille de ses colonnes, en l'occurrence :

$$(C_1, \dots, C_n)$$

est une base de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A et il résulte déjà des acquis de la partie 3 que la famille :

$$(C_i \cdot C_j^T)_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$$

est une base de $M_n(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de Φ_A .

– La seconde doit regarder du côté de l'orthonormalité qui, comme nous l'avons déjà laissé entendre *supra*, se gère agréablement *via* le symbole de Kronecker. D'ailleurs, à propos de ce délicieux outil, nous devons apporter quelques éclaircissements. Il s'adresse en réalité à deux objets mathématiques *quelconques* que nous noterons *truc* et *machin* et il est légendairement défini par :

$$\delta_{\text{truc}, \text{machin}} = \begin{cases} 1 & \text{si } \text{truc} = \text{machin} \\ 0 & \text{si } \text{truc} \neq \text{machin} \end{cases}$$

Il est vrai qu'il est très souvent utilisé lorsque les deux acolytes *truc* et *machin* sont des *integers* — nous en avons eu l'illustration *supra* — parce qu'il y a, dans notre entourage, de nombreuses familles indexées par des *entiers*. Le problème, ici, est que ce n'est pas du tout le cas de la famille qui nous occupe, en l'occurrence :

$$(C_i \cdot C_j^T)_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$$

qui est, quant à elle, indexée par des *couples* d'entiers et du coup les non anonymes *truc* et *machin* vont devoir appartenir à $\llbracket 1, n \rrbracket^2$.

À la fin de la précédente, il semble que nous ayons appris que lorsque (i, j) et (k, ℓ) sont des couples d'éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$ on a :

$$(C_i \cdot C_j^{\mathbf{T}} \mid C_k \cdot C_\ell^{\mathbf{T}}) = \delta_{ik} \delta_{jl}$$

Oui mais voilà, en y regardant bien, il ne doit pas être insurmontable de justifier la miraculeuse égalité :

$$\delta_{ik} \delta_{jl} = \delta_{(i,j),(k,\ell)}$$

puisque, égalité dans le couple oblige, nous avons l'équivalence logique :

$$(i, j) = (k, \ell) \iff i = k \text{ et } j = \ell$$

Voilà donc *in fine* que :

$$(C_i \cdot C_j^{\mathbf{T}} \mid C_k \cdot C_\ell^{\mathbf{T}}) = \delta_{(i,j),(k,\ell)}$$

So...

† Nous venons, magistralement, d'exhiber une base *orthonormale* de l'espace euclidien de Shur-Hilbert-Schmidt :

$$\left(M_n(\mathbb{R}), (\mid) \right)$$

dans laquelle la matrice de Φ_A est diagonale et donc, *a fortiori*, symétrique réelle. La caractérisation matricielle de la symétrie révèle alors que Φ_A est un endomorphisme *symétrique* de notre espace euclidien, ce que notre perspicace lecteur pourra retrouver directement en établissant, *a la mano*, que :

$$\forall M \in M_n(\mathbb{R}) \quad \forall N \in M_n(\mathbb{R}) \quad (\Phi_A(M) \mid N) = (M \mid \Phi_A(N))$$

Enjoy it!

MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 HEURES.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

S U J E T

Le problème comporte 6 parties.

Le but du problème est d'étudier les matrices $A \in M_n(\mathbb{R})$ telles que ${}^tAA = A{}^tA$.

Une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant cette propriété sera dite normale.

Dans tout le problème :

- n désigne un entier supérieur ou égal à 1.
- $B_0 = (e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique de \mathbb{R}^n .
- Si $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, on identifiera x et la matrice $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de ses coordonnées dans la base B_0 .
- $\langle \mid \rangle$ est le produit scalaire usuel de \mathbb{R}^n : $\langle x \mid y \rangle = {}^tXY = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ si $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$. La norme euclidienne associée à $\langle \mid \rangle$ est notée $\| \cdot \|$.
- Pour $A \in M_n(\mathbb{R})$ et f l'endomorphisme de \mathbb{R}^n représenté par A dans la base B_0 , on note f^* l'endomorphisme représenté par tA dans la base B_0 .
- Un endomorphisme de \mathbb{R}^n représenté par une matrice normale dans la base B_0 est dit normal, il vérifie donc $f^*of = fof^*$.
- Si F est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n et $f \in L(\mathbb{R}^n)$, on dit que F est stable par f si : $\forall x \in F$, $f(x) \in F$. Dans ce cas, on note f_F l'endomorphisme de F défini par : $\forall x \in F$, $f_F(x) = f(x)$.
- Si $\theta \in \mathbb{R}$, on note $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$.

Partie I – Matrices normales d'ordre 2.

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

- 1) Vérifier que A est une matrice normale si et seulement si ou bien A est symétrique ou bien il existe $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $A = \rho R_\theta$.
- 2) On suppose que A est une matrice normale, montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que ${}^tA = P(A)$ (on pourra utiliser ${}^tA + A$).
- 3) Déterminer les matrices normales A de $M_2(\mathbb{R})$ telles que $A^2 - A + I_2 = 0$.

Partie II – L'endomorphisme f^* .

Dans cette partie, $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in [1,n]^2} \in M_n(\mathbb{R})$ et f est l'endomorphisme de \mathbb{R}^n représenté par A dans la base B_0 .

4) Propriétés élémentaires de f^* :

- a- Préciser l'endomorphisme $(f^*)^*$.
- b- Si f est inversible, préciser l'endomorphisme $(f^{-1})^*$.

5) Caractérisation de l'endomorphisme f^* :

- a- Pour tout couple (i, j) dans $[1, n]^2$, exprimer $\langle f(e_i) | e_j \rangle$ à l'aide des coefficients de A .
- b- Montrer que : $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \langle f(x) | y \rangle = \langle x | f^*(y) \rangle$.
- c- Montrer que f^* est l'unique endomorphisme de \mathbb{R}^n vérifiant :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \langle f(x) | y \rangle = \langle x | f^*(y) \rangle.$$

6) Montrer que si f est un endomorphisme normal: $\forall x \in \mathbb{R}^n, \|f(x)\| = \|f^*(x)\|$.

7) Réciproquement, soit $g \in L(\mathbb{R}^n)$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n, \|g(x)\| = \|g^*(x)\|$. En exploitant l'égalité $\|g(x+y)\| = \|g^*(x+y)\|$, montrer que g est normal.

8) Vérifier que, si A est une matrice normale de $M_n(\mathbb{R})$, la matrice de f dans toute base orthonormale de \mathbb{R}^n est normale.

Dans la suite du problème, on admettra les résultats suivants :

Si f est un endomorphisme d'un espace euclidien E muni du produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$, on notera encore f^* l'unique endomorphisme de E vérifiant : $\forall (x, y) \in (E)^2, \langle f(x) | y \rangle = \langle x | f^*(y) \rangle$.

Dans toute base orthonormée de E , la matrice de f^* est la transposée de la matrice de f .

On dira encore que f est normal si $f^*of = fof^*$.

Partie III – Matrices normales et polynômes annulateurs.

9) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice normale telle qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $A^p = 0$. Soit $S = {}^tAA$, vérifier que $S^p = 0$ et montrer que $S = 0$. Montrer alors que $A = 0$.

10) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice normale, on suppose qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $P^q(A) = 0$, montrer que $P(A) = 0$.

11) Exemple : Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 + M - {}^tM = I_n$. Déterminer un polynôme annulateur de M de degré 4, le factoriser. En déduire que $(M - I_n)^3 \cdot (M + I_n)^3 = 0$. Montrer alors que M est symétrique et que $M^2 = I_n$.

Dans la suite de cette partie, on suppose que A est une matrice normale non nulle de $M_n(\mathbb{R})$.

12) Montrer que A admet un polynôme annulateur $P \in \mathbb{R}[X]$, de degré au moins égal à 1, dont les racines complexes sont toutes de multiplicité 1.

On note I_A l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ annulateurs de A dont les racines complexes sont toutes de multiplicité 1, et on pose $D_A = \{\deg Q; Q \in I_A\}$.

13) Justifier que D_A admet un minimum d , soit π un élément de I_A de degré d . On note $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ les racines complexes deux à deux distinctes de π .

- a- Montrer que $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ sont les valeurs propres complexes de A .
- b- En déduire que l'unique élément de I_A de degré d , de coefficient dominant égal à 1 est

$$\prod_{k=1}^d (X - \lambda_k).$$

Dans la suite du problème, on note π_A ce polynôme.

14) Déterminer π_M pour $M \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 + M - {}^tM = I_n$ et $M \neq \pm I_n$.

Partie IV – Propriétés spectrales des matrices normales.

Dans cette partie, $A \in M_n(\mathbb{R})$ est une matrice normale, f l'endomorphisme de \mathbb{R}^n représenté par A dans la base B_0 .

On note toujours π_A le polynôme associé à A défini dans la partie III.

15) Montrer que $\text{Ker } f = \text{Ker } f^*$. Plus généralement, si $\lambda \in \mathbb{R}$, vérifier que

$\text{Ker}(f - \lambda id_{\mathbb{R}^n}) = \text{Ker}(f^* - \lambda id_{\mathbb{R}^n})$, en déduire que les espaces propres, s'ils existent, de f et de f^* sont identiques.

16) Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $F = \text{Ker}(Q(f))$, montrer que F est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n stable par f et f^* . Montrer que F^\perp est aussi stable par f et f^* . Vérifier alors que f_F et f_{F^\perp} sont deux endomorphismes normaux respectivement de F et de F^\perp et que $(f_F)^* = (f^*)_F$.

17) Recherche d'un sous-espace stable.

On désire montrer qu'il existe un sous-espace F , stable par f et f^* , de dimension 1 ou 2 :

- a- Premier cas : on suppose que π_A admet une racine réelle $\lambda : \pi_A(\lambda) = 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Montrer qu'il existe $e \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ appartenant à $\text{Ker}(f - \lambda \text{id}_{\mathbb{R}^n})$. Montrer que $F = \text{Vect}(e)$ convient.
- Deuxième cas : on suppose maintenant que π_A n'admet pas de racine réelle.
- b- Justifier l'existence d'un couple de réels (a, b) tels que $a^2 - 4b < 0$ et $f^2 + af + b \text{id}_{\mathbb{R}^n}$ ne soit pas inversible. On note $G = \text{Ker}(f^2 + af + b \text{id}_{\mathbb{R}^n})$ et $g = f_G$.
- c- Vérifier que $h = g + g^*$ est diagonalisable. On note e un vecteur propre de h .
- d- Montrer alors que $F = \text{Vect}(e, f(e))$ convient.

18) Montrer qu'il existe une base orthonormée C de \mathbb{R}^n dans laquelle la matrice de f est de la forme :

$$M_C(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda_p & & (0) & \vdots \\ \vdots & (0) & & \rho_1 R_{\theta_1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \rho_s R_{\theta_s} \end{pmatrix} \quad \text{où } \lambda_1, \dots, \lambda_p \text{ sont des réels, } \rho_1, \dots, \rho_s \text{ sont des réels}$$

positifs et $\theta_1, \dots, \theta_s$ des réels appartenant à $[0, 2\pi[$.

19) Quelles sont les matrices normales A pour lesquelles π_A a toutes ses racines réelles ?

Partie V – Etude d'un exemple.

Dans cette partie, A est une matrice normale et inversible de $M_n(\mathbb{R})$ telles que $(A + I_n)^7 = A^7 + I_n$.

On note $P = (X + 1)^7 - X^7 - 1$.

20) Déterminer les complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que $\begin{cases} P(z) = 0 \\ P'(z) = 0 \end{cases}$ puis factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

21) Montrer que A est une matrice orthogonale de \mathbb{R}^n .

22) Montrer que ${}^t A$ est un polynôme en A .

23) On suppose de plus que n est impair et que $A \neq -I_n$, déterminer le polynôme π_A associé à A .

Partie VI – Généralisation.

Dans cette partie A est une matrice normale non nulle de $M_n(\mathbb{R})$, f l'endomorphisme canoniquement associé à A . On note π_A le polynôme associé à A , tel que défini à la question 13.

On désire démontrer que ${}^t A$ est un polynôme en A .

Plus précisément, on cherche un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, de degré inférieur ou égal à $n - 1$, tel que ${}^t A = P(A)$.

24) Quel polynôme P convient lorsque π_A a toutes ses racines réelles ?

Dans la suite de cette partie, on suppose que A admet $2t$ valeurs propres complexes non réelles distinctes. On les note $\mu_1, \bar{\mu}_1, \mu_2, \bar{\mu}_2, \dots, \mu_t, \bar{\mu}_t$. Pour tout q de $[1, t]$, on note $\mu_q = \rho_q e^{i\theta_q}$, où ρ_q est un réel strictement positif et θ_q un réel appartenant à $[0, 2\pi[$. Enfin, on note $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres réelles distinctes de A .

$$\text{On a : } \pi_A = \prod_{k=1}^r (X - \lambda_k) \prod_{q=1}^t (X^2 - 2\rho_q \cos \theta_q X + \rho_q^2).$$

D'après la question 18, il existe une base orthonormée C de \mathbb{R}^n dans laquelle la matrice de f est de la

$$\text{forme : } M_C(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda_r & & (0) & \vdots \\ \vdots & (0) & & \rho_1 R_{\theta_1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \rho_t R_{\theta_t} \end{pmatrix} \quad (\text{les réels } \lambda_k \text{ pouvant être répétés plusieurs fois})$$

ainsi que les matrices $\rho_q R_{\theta_q}$.

25) Préciser $M_C(f^*)$.

26) Montrer que $(f^* = P(f)) \Leftrightarrow (\forall k \in [1, r], \lambda_k = P(\lambda_k) \text{ et } (\forall k \in [1, t], \bar{\mu}_k = P(\mu_k)))$.

On note $S = \prod_{k=1}^r (X - \lambda_k)$ et $Q = \prod_{q=1}^t (X^2 - 2\rho_q \cos \theta_q X + \rho_q^2) = \prod_{q=1}^t (X - \mu_q)(X - \bar{\mu}_q)$ et on introduit les familles de polynômes $(L_j)_{j \in [1, r]}$, $(Q_j)_{j \in [1, t]}$ et $(T_j)_{j \in [1, t]}$ telles que :

$$\text{pour tout } j \in [1, r], L_j = \left(\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^r \frac{X - \lambda_k}{\lambda_j - \lambda_k} \right) \cdot \frac{Q}{Q(\lambda_j)},$$

$$\text{pour tout } j \in [1, t], Q_j = \frac{S}{S(\mu_j)} \cdot \left(\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^t \frac{(X - \mu_k)(X - \bar{\mu}_k)}{(\mu_j - \mu_k)(\mu_j - \bar{\mu}_k)} \right) \cdot \left(\frac{X - \bar{\mu}_j}{\mu_j - \bar{\mu}_j} \right) \text{ et}$$

$$\text{pour tout } j \in [1, t], T_j = \frac{S}{S(\mu_j)} \cdot \left(\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^t \frac{(X - \mu_k)(X - \bar{\mu}_k)}{(\mu_j - \mu_k)(\mu_j - \bar{\mu}_k)} \right) \cdot \left(\frac{X - \mu_j}{\mu_j - \bar{\mu}_j} \right).$$

$$\text{Enfin, on pose } P = \sum_{k=1}^r \lambda_k L_k + \sum_{k=1}^t (\bar{\mu}_k Q_k + \mu_k T_k).$$

27) Montrer que $P \in \mathbb{R}[X]$ et que ${}^t A = P(A)$.

28) Préciser P lorsque $\pi_A = X(X+1)(X^2+X+1)$.

CORRIGÉ

Par Jean-Louis Roque, professeur au lycée Pasteur à Neuilly-sur-Seine, et external lecturer à Essec Business School.

Nous nous étonnons d'emblée que le texte ait noté R_θ la matrice, dans la base canonique de \mathbb{R}^2 , de la rotation d'angle $-\theta$. Nous nous devons de reconnaître que c'est particulièrement tordu et le pire est que ce n'est pas fini ! Affaire à suivre donc...

Partie 1

1. Organisons-nous en deux temps.

– Supposons que A soit normale. Nous avons alors :

$$A^T \cdot A = A \cdot A^T$$

ce qui, après quelques gentils aménagements, se traduit finalement par le système :

$$\begin{cases} b^2 = c^2 \\ (a-d)(c-b) = 0 \end{cases}$$

Nous profitons maintenant de la première pour poursuivre l'investigation.

– si $b = c$, la matrice A est symétrique et c'est bien !

– si $b = -c$ et $b \neq 0$ cette dernière supposition — regrettamment oubliée par le texte — étant là pour réellement faire du « ou bien », « ou bien », nous avons cette fois :

$$a = d$$

puisque $c - b$ n'est pas nul. Dans ce deuxième cas la matrice A hérite déjà du *look* :

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \quad \text{où } b \neq 0$$

mais ce n'est pas totalement fini. Considérons le nombre complexe :

$$z = a + ib$$

Comme b n'est pas nul, le complexe z ne l'est pas plus et nous savons depuis nos *seventies* qu'il existe $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que :

$$z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$$

à telle enseigne que A devient alors :

$$A = \rho \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \rho R_\theta$$

et vu que b et ρ ne sont pas nuls, nous pouvons même ajouter que :

$$\sin \theta \neq 0 \quad \text{i.e.} \quad \theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$$

Bref, les vraies conclusions de ce premier temps sont les suivantes. Si la matrice A est normale alors ou bien A est symétrique, ou bien il existe $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ tels que :

$$A = \rho R_\theta$$

- Supposons, réciproquement, que A soit ou bien symétrique ou bien de *look* :

$$A = \rho R_\theta \quad \text{où } \rho > 0 \text{ et } \theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$$

Ce n'est alors qu'une formalité que de vérifier que A est normale et nous nous permettons de laisser cette tâche à notre dévoué lecteur.

† Les matrices normales de notre seconde situation sont donc au choix les matrices de type :

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \quad \text{où } b \neq 0$$

ou celles ayant le *look* trigonométrique :

$$\rho R_\theta = \rho \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad \text{où } \rho > 0 \text{ et } \theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$$

Le texte semble privilégier le *trigolook*, mais il nous arrivera parfois de sérieusement préférer l'autre...

2. Reprenons le plan que nous venons de découvrir à l'instant.

- Si A est symétrique, nous proposons :

$$P = X$$

et le tour est joué.

- Si maintenant A est du genre :

$$A = \rho R_\theta \quad \text{où } \rho > 0 \text{ et } \theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$$

et si nous suivons le *hint* du texte, nous constatons mentalement que :

$$A + A^\top = 2\rho \cos \theta I_2$$

ou encore :

$$A^\top = 2\rho \cos \theta I_2 - A$$

Ici, la proposition :

$$P = 2 \cos \theta - X$$

devrait satisfaire tout le monde.

3. Nous sommes repartis pour une attaque en deux temps.

- Supposons que A soit une matrice convenable. Il est tout d'abord dit que le polynôme :

$$X^2 - X + 1$$

est un annulateur de A et nous constatons dans la foulée qu'il n'a visiblement aucune racine *réelle*. Il est alors important de savoir en déduire — c'est le thème annulateur et spectre — que A n'a aucune valeur propre réelle ce qui, si l'on en croit un des lemmes de Cauchy, fait que A n'a aucune chance d'être symétrique réelle. La précédente question est du coup formelle la matrice A est au choix de *look* :

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \quad \text{où } b \neq 0$$

ou aussi le *look* trigonométrique ρR_θ mais que nous choisissons de ne pas pas retenir ici. Nous faisons maintenant appel à l'égalité :

$$A^2 - A + I_2 = 0$$

qui nous amène tranquillement au système :

$$\begin{cases} a^2 - b^2 - a + 1 = 0 \\ b(2a - 1) = 0 \end{cases}$$

Comme b n'est pas nul, nous déduisons de la seconde que :

$$a = \frac{1}{2}$$

information qui, répercutée dans la première, révèle que :

$$b = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ou} \quad b = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ce premier temps aura donc eu l'immense privilège de nous apprendre qu'il y a *plus* deux matrices convenables, en l'occurrence :

$$A_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad A_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$$

– Puisqu'il n'y a aucune raison que ce soit toujours les mêmes qui triment, nous laissons à notre dévoué lecteur le soin de tester les deux matrices A_1 et A_2 et de découvrir avec joie qu'elles sont toutes les deux *farpaitement* idoines.

† Le lecteur trigonométriquement *aware* pourra aussi vérifier que :

$$A_1 = R_{\pi/3} \quad \text{et} \quad A_2 = R_{-\pi/3}$$

Partie 2

4.a. Comme :

$$(A^\top)^\top = A$$

nous déduisons sans peine que :

$$(f^*)^* = f$$

b. Si f est inversible, la matrice A l'est également tout comme sa transposée d'ailleurs et nous ne pouvons ignorer que :

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$$

Il devrait alors tranquillement s'ensuivre que :

$$(f^{-1})^* = (f^*)^{-1}$$

5.a. Soit i et j appartenant à $\llbracket 1, n \rrbracket$. Le protocole de « matricialisation » révèle, sans ambages que :

$$f(e_i) = \sum_{k=1}^n A_{ki} e_k$$

et il en résulte quasi mentalement que :

$$\langle f(e_i) \mid e_j \rangle = A_{ji}$$

puisque, c'est bien connu, la base canonique est orthonormale pour le produit scalaire usuel.

† D'habitude, du moins chez nous, on note i l'indice de ligne et j l'indice de colonne. Ici on fait délibérément le contraire ce qui n'est peut-être pas très sympathique vis-à-vis de l'impétrant qui n'a pas toujours les yeux en face des trous et qui n'aime pas vraiment que l'on bouscule ses repères !

b. Soit x et y appartenant à \mathbb{R}^n . Base oblige, il existe des scalaires $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ tels que :

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \quad \text{et} \quad y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$$

et des linéarités respectives de f et de f^* , nous déduisons également que :

$$f(x) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) \quad \text{et} \quad f^*(y) = \sum_{j=1}^n y_j f^*(e_j)$$

C'est maintenant la bilinéarité du produit scalaire qui est sollicitée. Elle nous apprend tout d'abord que :

$$\langle f(x) \mid y \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \langle f(e_i) \mid e_j \rangle \quad (1)$$

et ensuite que :

$$\langle x \mid f^*(y) \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \langle e_i \mid f^*(e_j) \rangle \quad (2)$$

Soit alors i et j deux éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Nous venons récemment d'établir que :

$$\langle f(e_i) \mid e_j \rangle = A_{ji}$$

et l'on démontre *mutatis mutandis* que :

$$\langle e_i \mid f^*(e_j) \rangle = A_{ij}^T$$

Oui mais voilà, il ne fait aucun doute que :

$$A_{ij}^T = A_{ji}$$

et au vu et au su des égalités (1) et (2)...

c. Nous venons déjà de montrer que f^* fait l'affaire. Supposons ensuite qu'un autre endomorphisme de \mathbb{R}^n , mettons f_1^* , rende le même service et annonçons alors deux vecteurs x et y appartenant à \mathbb{R}^n . Nous avons à la fois :

$$\langle f(x) \mid y \rangle = \langle x \mid f^*(y) \rangle$$

et :

$$\langle f(x) \mid y \rangle = \langle x \mid f_1^*(y) \rangle$$

d'où il ressort très bilinéairement et par différence que :

$$\langle x \mid f^*(y) - f_1^*(y) \rangle = 0$$

Le vecteur $f^*(y) - f_1^*(y)$ est donc désormais orthogonal à *tous* les vecteurs de \mathbb{R}^n . Il est donc fatalement ratatiné et autant dire ainsi que :

$$f^*(y) = f_1^*(y)$$

Cette égalité étant d'actualité pour *tous* les vecteurs y de \mathbb{R}^n , nous avons finalement :

$$f^* = f_1^*$$

chronique d'une unicité fortement annoncée...

† Les initiés auront reconnu en f^* l'adjoint de l'endomorphisme f . Il est bon de savoir que la notion d'adjonction est un des produits phares, pour ne pas dire un incontournable, de l'algèbre bilinéaire. Dans l'égalité :

$$\langle f(x) \mid y \rangle = \langle x \mid f^*(y) \rangle$$

on observera ce joli balancement de l'étoile quand on passe de la gauche à la droite.

6. Nous allons faire un peu de zèle en annonçant carrément deux vecteurs x et y de \mathbb{R}^n . Grâce au jeu subtil de l'étoile de l'adjonction, nous avons tour à tour :

$$\langle f(x) \mid f(y) \rangle = \langle x \mid f^* \circ f(y) \rangle = \langle x \mid f \circ f^*(y) \rangle = \langle f^*(x) \mid f^*(y) \rangle$$

l'égalité centrale reposant *normalement* sur notre hypothèse et il en résulte en particulier que :

$$\|f(x)\|^2 = \|f^*(x)\|^2$$

en choisissant tout bêtement $y = x$.

7. Soit à nouveau x et y appartenant à \mathbb{R}^n . Parce que l'application g est linéaire et grâce à l'égalité d'Al Kashi, nous avons tout d'abord :

$$\|g(x+y)\|^2 = \|g(x) + g(y)\|^2 = \|g(x)\|^2 + 2 \langle g(x) | g(y) \rangle + \|g(y)\|^2$$

Mutatis mutandis, nous avons également :

$$\|g^*(x+y)\|^2 = \|g^*(x) + g^*(y)\|^2 = \|g^*(x)\|^2 + 2 \langle g^*(x) | g^*(y) \rangle + \|g^*(y)\|^2$$

et vu qu'il est hypothétiquement dit que :

$$\|g(x+y)\|^2 = \|g^*(x+y)\|^2 \quad ; \quad \|g(x)\|^2 = \|g^*(x)\|^2 \quad ; \quad \|g(y)\|^2 = \|g^*(y)\|^2$$

nous sommes en mesure de revendiquer l'égalité :

$$\langle g(x) | g(y) \rangle = \langle g^*(x) | g^*(y) \rangle$$

C'est là que nous sommes fortement récompensés du zèle de la question 6, puisque à bien y regarder et en y remplaçant f par g , notre toute dernière égalité se transforme en :

$$\langle x | g^* \circ g(y) \rangle = \langle x | g \circ g^*(y) \rangle$$

C'est alors toujours un peu la même histoire. On déduit d'abord bilinéairement que :

$$\langle x | g^* \circ g(y) - g \circ g^*(y) \rangle = 0$$

On ressort ensuite l'argument du *gugusse* orthogonal à la terre entière et l'on parvient ainsi aisément et en beauté à :

$$g^* \circ g = g \circ g^*$$

Tout cela paraît alors totalement *normal*...

8. Soit \mathcal{B} une base orthonormale quelconque de \mathbb{R}^n , notons B la matrice de f dans cette nouvelle base et notons également P la matrice de passage de \mathcal{B}_0 à \mathcal{B} . Nous commençons par avancer deux choses :

- la matrice P est orthogonale puisque les deux bases \mathcal{B}_0 et \mathcal{B} sont orthonormales ;
- selon le théorème de changement de base, nous avons au choix :

$$B = P^{-1} \cdot A \cdot P = P^T \cdot A \cdot P$$

la possibilité de choisir provenant justement de la récente orthogonalité de la matrice P . C'est assurément l'égalité :

$$B = P^T \cdot A \cdot P$$

que nous retenons pour la suite parce que d'un grand coup de *dressing undressing principle*, elle nous apprend que :

$$B^T = P^T \cdot A^T \cdot P$$

et comme il est *orthogonalement* acquis que :

$$P \cdot P^T = I_n$$

nous pouvons clamer haut et fort que :

$$B \cdot B^T = P^T \cdot A \cdot A^T \cdot P \quad \text{et} \quad B^T \cdot B = P^T \cdot A^T \cdot A \cdot P$$

L'hypothèse assurant que A et sa transposée commutent, il devrait *normalement* s'ensuivre que :

$$B \cdot B^T = B^T \cdot B$$

et il est alors temps de changer de partie.

↳ Il est curieux d'avoir choisi de commencer par \mathbb{R}^n et d'*admettre* ensuite que tout fonctionne de la même façon dans n'importe quel espace euclidien. On aurait pu tout aussi bien — et aussi simplement — attaquer d'emblée dans un euclidien quelconque !

Partie 3

9. Comme les matrices A et A^T commutent(*), nul ne peut ignorer que :

$$(A^T \cdot A)^p = (A^T)^p \cdot A^p$$

et il en résulte effectivement que $S^p = 0$. Grâce au *dressing undressing principle* il advient aisément que la matrice S est symétrique et sa réalité ne peut échapper qu'à ceux — ou à celles — qui souffrent de diplopie avancée. Elle est donc justiciable du grand théorème spectral qui affirme en particulier qu'elle est diagonalisable. Autant dire alors qu'il existe une matrice inversible Q et des réels a_1, \dots, a_n tels que :

$$Q^{-1} \cdot S \cdot Q = \begin{bmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{bmatrix}$$

et il est alors impossible de passer à côté de l'égalité :

$$Q^{-1} \cdot S^p \cdot Q = \begin{bmatrix} a_1^p & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n^p \end{bmatrix}$$

Comme S^p est la matrice nulle, il s'ensuit immédiatement que :

$$a_1^p = \dots = a_n^p = 0$$

(*) Lorsque deux matrices commutent les puissances de leur produit sont égales au produit de leurs puissances, mais si elles ne commutent pas...

d'où il ressort gentiment que :

$$a_1 = \dots = a_n = 0$$

puisque les a_k ne sont que de misérables scalaires(*). Il semble donc en définitive que :

$$Q^{-1} \cdot S \cdot Q = 0$$

Un petit coup à gauche par Q et à droite par Q^{-1} et *boum* ! Voilà effectivement que :

$$S = 0$$

Il y a plusieurs façons de terminer l'affaire. Nous optons, par exemple, pour la (i, j) stratégie. Soit donc i appartenant à $\llbracket 1, n \rrbracket$. Nous avons en particulier $S_{ii} = 0$, c'est-à-dire :

$$(A^T \cdot A)_{ii} = 0$$

égalité que la formule du produit matriciel d'Arthur Cayley transforme sur-le-champ en :

$$\sum_{j=1}^n A_{ij}^T A_{ji} = 0$$

ou encore en :

$$\sum_{j=0}^n A_{ji}^2 = 0$$

après une très tranquille gestion de transposition. L'argument final est classique. Nous avons devant les yeux une somme nulle de réels positifs ou nuls ce qui oblige instamment :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad A_{ji} = 0$$

et comme cela vaut aussi pour tous les i de $\llbracket 1, n \rrbracket$...

† Une autre route eut pu également être la suivante. Vu que A est une matrice *réelle*, le professeur de la classe de deuxième année a dû quelque part établir que :

$$\text{Ker}(A^T \cdot A) = \text{Ker } A$$

et la conclusion en résulte à nouveau assez facilement.

† Nous venons d'établir que les matrices normales nilpotentes ne courent pas plus les rues que les scalaires nilpotents !

10. Il est facile de voir — lecteur, crayon et *confetti* — que lorsque deux matrices commutent, leurs différentes puissances commutent également, ce qui, sans faire les présentations, peut s'écrire :

$$MN = NM \implies \forall i \in \mathbb{N} \quad \forall j \in \mathbb{N} \quad M^i N^j = N^j M^i$$

(*) Les scalaires nilpotents ne courent pas les rues...

Cette propriété passe alors allègrement aux polynômes matriciels en indiquant que quand deux matrices commutent, les polynômes matriciels par rapport à l'une commutent aux polynômes matriciels par rapport à l'autre et Lycée de Versailles !

Autre chose, comme la transposition est linéaire et se comporte fort bien avec les puissances, nous avons mentalement :

$$(P(A))^T = P(A^T)$$

et forts de ces gentils arguments nous pouvons tranquillement affirmer que $P(A)$ est tout à fait normale. Dernière chose, comme nous connaissons parfaitement les propriétés officielles des polynômes matriciels, nous assénons que :

$$P^q(A) = (P(A))^q$$

et la matrice $P(A)$ est désormais normale et nilpotente et si l'on en croit la neuvième question...

11. Nous partons de l'égalité :

$$M^2 + M - M^T = I_n$$

et nous la transposons. Nous obtenons bien sûr :

$$(M^T)^2 + M^T - M = I_n$$

puisque la matrice unité est symétrique et que, au risque de radoter, la transposition fait un très bon ménage avec les puissances. L'addition membre à membre conduit sans surprise à :

$$M^2 + (M^T)^2 = 2I_n$$

ce qui, en extrayant M^T de la première relation, devient :

$$M^2 + (M^2 + M - I_n)^2 = 2I_n$$

comme « ça commute » ici dans tous les sens, nous pouvons utiliser la formule du carré du trinôme pour développer le carré de $M^2 + M - I_n$ et après un palpitant calcul, l'on parvient à :

$$M^4 + 2M^3 - 2M - I_n = 0$$

Le polynôme :

$$X^4 + 2X^3 - 2X - 1$$

est donc annulateur de M et à bien y regarder, il semble que son degré soit égal à 4. Il a en outre 1 comme racine évidente et il est alors très facile d'obtenir la première factorisation que voici :

$$X^4 + 2X^3 - 2X - 1 = (X - 1)(X^3 + 3X^2 + 3X + 1)$$

que le *newtonien physio* transforme dans la foulée en :

$$X^4 + 2X^3 - 2X - 1 = (X - 1)(X + 1)^3$$

Le polynôme $(X - 1)(X + 1)^3$ est donc désormais annulateur de la matrice M et nous sommes supposés savoir que tout multiple polynomial d'un annulateur l'est à son tour. Du coup le polynôme :

$$(X - 1)^3(X + 1)^3$$

annule la matrice M et l'on a effectivement :

$$(M - I_n)^3 \cdot (M + I_n)^3 = 0$$

Il faut maintenant capter que la matrice M est normale puisque sa transposée est carrément polynomiale en M . Considérons alors le polynôme :

$$P = (X - 1)(X + 1) = X^2 - 1$$

Il semble que nous venions d'établir que :

$$P^3(M) = 0$$

et la normale question 10 est formelle. *No doubt that* :

$$P(M) = 0 \quad i.e. \quad M^2 = I_n$$

On répercute cela dans l'égalité initiale et voilà pour finir que :

$$M^T = M$$

crónica de una simetría anunciada.

12. Cette question va nécessiter de sérieuses mises au point techniques en ce qui concerne les factorisations sur \mathbb{C} et sur \mathbb{R} des polynômes réels non constants. Le programme officiel parle timidement et seulement d'exemples de telles factorisations et cela ne devrait pas vraiment suffire surtout au vu et au su des futures questions 17 et 24 qui semblent prendre pour argent comptant le résultat suivant :

LEMME DE FACTORISATION DES POLYNÔMES RÉELS NON CONSTANTS :

Soit Q un polynôme réel unitaire non constant.

i. La factorisation complexe.

Il existe deux entiers naturels non tout les deux nuls r et t , des réels différents $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, des complexes non réels μ_1, \dots, μ_t tels que la liste :

$$(\mu_1, \bar{\mu}_1, \dots, \mu_t, \bar{\mu}_t)$$

soit formée de $2t$ nombres différents, et enfin des entiers naturels non nuls :

$$\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_t$$

tout ce petit monde vérifiant allègrement :

$$Q = \prod_{k=1}^r (X - \lambda_k)^{\alpha_k} \prod_{j=1}^t (X - \mu_j)^{\beta_j} (X - \bar{\mu}_j)^{\beta_j} \quad (\text{FC})$$

ii. La factorisation réelle, version basique.

Il existe deux entiers naturels non tous les deux nuls r et t , des réels différents $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, et des réels $a_1, \dots, a_t, b_1, \dots, b_t$ vérifiant :

$$\forall j \in \llbracket 1, t \rrbracket \quad a_j^2 - 4b_j < 0$$

et enfin des entiers naturels non nuls :

$$\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_t$$

tous ces joyaux lurons vérifiant gentiment :

$$Q = \prod_{k=1}^r (X - \lambda_k)^{\alpha_k} \prod_{j=1}^t (X^2 + a_j X + b_j)^{\beta_j} \quad (\text{FRB})$$

iii. La factorisation réelle, version trigonométrique.

Il existe deux entiers naturels non tous les deux nuls r et t , des réels différents $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, et des réels $\rho_1, \dots, \rho_t, \theta_1, \dots, \theta_t$ vérifiant :

$$\forall j \in \llbracket 1, t \rrbracket \quad \rho_j > 0 \quad \theta_j \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$$

et enfin des entiers naturels non nuls :

$$\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_t$$

toute cette petite bande vérifiant coquettement :

$$Q = \prod_{k=1}^r (X - \lambda_k)^{\alpha_k} \prod_{j=1}^t (X^2 - 2\rho_j \cos \theta_j X + \rho_j^2)^{\beta_j} \quad (\text{FRT})$$

† Même si le programme officiel n'est pas très explicite à propos de ces factorisations, il faut bien reconnaître que rien n'est vraiment difficile à partir du moment où l'on admet le théorème de D'Alembert-Gauss(*). Le point crucial est en effet l'officielle propriété que voici. Lorsqu'un complexe z est racine d'un polynôme *réel* son conjugué \bar{z} s'y enrachine également et avec la même multiplicité de surcroît. Le reste n'est alors que littérature procédant, pour (FRB), de l'égalité :

$$(X - \mu_j)(X - \bar{\mu}_j) = X^2 + a_j X + b_j$$

dans laquelle :

$$a_j = -(\mu_j + \bar{\mu}_j) = -2\Re(\mu_j) \quad \text{et} \quad b_j = |\mu_j|^2$$

puis pour, (FRT), de sa cousine :

$$(X - \mu_j)(X - \bar{\mu}_j) = X^2 - 2\rho_j \cos \theta_j X + \rho_j^2$$

(*) Qui lui est plutôt coriace !

si l'on choisit d'écrire μ_j sous la forme exponentielle :

$$\mu_j = \rho_j e^{i\theta_j}$$

Nous pouvons maintenant attaquer la redoutable douzième question.

Le professeur a fatalement établi en classe l'existence d'un polynôme annulateur réel non nul — carrément unitaire même — pour n'importe quelle matrice carrée et en particulier pour notre matrice A . Quitte à le multiplier par X , il reste annulateur unitaire de A et son degré est supérieur ou égal à un.

Nous disposons donc déjà d'un polynôme réel unitaire de degré supérieur ou égal à un qui a la bonté d'annuler la matrice A et nous décidons de le noter Q . Sa factorisation complexe permet alors de l'écrire sous la forme :

$$Q = \prod_{k=1}^r (X - \lambda_k)^{\alpha_k} \prod_{j=1}^t (X - \mu_j)^{\beta_j} (X - \bar{\mu}_j)^{\beta_j}$$

et cela nous donne l'idée de proposer pour P le polynôme *simplifié* :

$$P = \prod_{k=1}^r (X - \lambda_k) \prod_{j=1}^t (X - \mu_j)(X - \bar{\mu}_j)$$

puisque'il n'a ouvertement que des racines simples, et pour q le *plus grand* — on peut aussi prendre la *somme* — des entiers $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_t$. Ce judicieux choix de q fait que le polynôme P^q est un multiple polynomial de l'annulateur Q et, à ce titre, il vérifie :

$$P^q(A) = 0$$

Remarquons pour finir que *basiquement*, nous avons également :

$$P = \prod_{k=1}^r (X - \lambda_k) \prod_{j=1}^t (X^2 + a_j X + b_j)$$

écriture qui tout d'abord, révèle inéluctablement la réalité du polynôme P , et qui, *because* :

$$(r, t) \neq (0, 0)$$

assure également sa non constance. Comme la précédente question oblige :

$$P(A) = 0$$

la messe est définitivement dite...

13. La définition même de l'ensemble I_A fait que le polynôme nul ne lui appartient pas(*) et nous espérons donc ne froisser personne en imposant *manu militari* « l'unitarité » des

(*) C'est le moment rêvé pour méditer sur les multiplicités des racines du polynôme nul !

éléments de I_A , les annulateurs non nuls non unitaires n'étant pas vraiment prisés par la profession. L'ensemble D_A est en conséquence une partie de \mathbb{N} qui n'est assurément pas vide puisqu'elle contient le degré du polynôme que nous avons mis en évidence lors de la question 12. Il reste alors à ne pas avoir oublié l'émotionnel théorème de la première fois selon lequel « toute partie non vide de \mathbb{N} possède un plus petit élément ».

† Le texte, dans son chapeau, précise que l'entier n est supérieur ou égal à un et il est alors important de savoir que les polynômes de degré zéro n'annulent absolument aucune matrice d'ordre n . Cela *démontre* que l'entier d que nous venons de rencontrer est supérieur ou égal à un, ce qui va s'avérer plutôt rassurant pour la suite.

a. Il est déjà dit que π est annulateur de A et la teneur du théorème « annulateur et spectre » nous apprend que :

$$\text{Spec } A \subset \text{root } \pi$$

c'est-à-dire :

$$\text{Spec } A \subset \{ \lambda_1, \dots, \lambda_p \}$$

Soit alors réciproquement $k \in \llbracket 1, d \rrbracket$ et supposons par l'absurde que λ_k ne soit pas valeur propre de A . On écrit alors :

$$\pi = (X - \lambda_k) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^d (X - \lambda_j)$$

à telle enseigne que, annulateur oblige, l'on ait :

$$(A - \lambda_k I_n) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^d (A - \lambda_j I_n) = 0$$

Oui mais voilà, vu ce que nous avons supposé la matrice $A - \lambda_k I_n$ est inversible et du coup simplifiable à gauche dans l'égalité précédente, ce qui conduit à la perverse :

$$\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^d (A - \lambda_j I_n) = 0$$

méritant absolument son appellation puisqu'elle indique que le polynôme de degré $d - 1$:

$$\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^d (X - \lambda_j)$$

appartient inéluctablement à I_A ce qui est *minimalement* insupportable !

† Heureusement que nous avons justifié que $d \geq 1$, n'est-il pas ?

b. Vu les dispositions que nous avons prises, nous ne parlerons pas de coefficient dominant. Nous attaquons alors la question en deux temps.

– Il ne fait déjà pas l'ombre d'un doute que :

$$\pi = \prod_{j=1}^d (X - \lambda_j)$$

est un élément de degré d de I_A .

– Soit maintenant π_1 un autre élément de degré d de l'ensemble — autoritairement unitarisé ! — I_A . Nous ressortons le thème « annulateur et spectre » qui oblige :

$$\text{Spec } A \subset \text{root } \pi_1$$

et autant dire alors que $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ sont des racines *différentes* du polynôme π_1 et comme ce dernier est unitaire de degré d , il n'y a pas vraiment d'autre issue que :

$$\pi_1 = \pi$$

chronique d'une unicité annoncée...

14. Lors de la question 11, nous avons déjà démontré que :

$$M^2 = I_n$$

.La matrice M est donc ce qu'il est convenu d'appeler une matrice de « symétrie vectorielle » et nous savons alors depuis la classe de première année qu'elle est diagonalisable et qu'en tout et pour tout elle ne possède au plus que les deux valeurs propres -1 et 1 . Oui mais voilà :

– si M ne possédait que la valeur propre 1 , elle serait *mono valeur propre* 1 et diagonalisable ce qui, selon un sacré argument, obligerait l'inconcevable :

$$M = I_n$$

– si M ne possédait que la valeur propre -1 , elle serait *mono valeur propre* -1 et diagonalisable ce qui, selon le même sacré, obligerait l'inacceptable :

$$M = -I_n$$

Bref, la matrice M ne possède en tout et pour tout que les deux valeurs propres 1 et -1 et comme nous avons bien capté comment se construit π_M , nous revendiquons :

$$\pi_M = (X - 1)(X + 1) = X^2 - 1$$

Partie 4

15. Comme A est normale, l'endomorphisme f l'est également et nous avons appris en question 6 que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \|f(x)\| = \|f^*(x)\|$$

Il en résulte mentalement que :

$$\text{Ker } f = \text{Ker } f^*$$

Soit maintenant $\lambda \in \mathbb{R}$. Après avoir gentiment observé que :

$$f^* - \lambda \text{Id} = (f - \lambda \text{Id})^*$$

il ne fait plus aucun doute que :

$$E_\lambda(f) = E_\lambda(f^*)$$

Nous venons ainsi de démontrer que les espaces $E_\lambda(\cdot)$ de l'endomorphisme f et de son adjoint sont rigoureusement identiques et comme leurs espaces propres sont précisément les espaces $E_\lambda(\cdot)$ qui ne sont pas nuls...

16. Il semble que nous ayons quatre points à passer en revue et nous les traitons deux par deux.

– Soit $x \in \text{Ker } Q(f)$.

– Comme les polynômes d'endomorphismes en f commutent, c'est le cas de $Q(f)$ et de f et nous avons tour à tour :

$$Q(f)(f(x)) = Q(f) \circ f(x) = f \circ Q(f)(x) = f(Q(f)(x))$$

et vu la position géographique de x ainsi que la linéarité de f , nous avons effectivement :

$$f(x) \in \text{Ker } Q(f)$$

† La stabilité, par un endomorphisme u , de tous les noyaux — et de toutes les images aussi d'ailleurs — des polynômes d'endomorphisme en u est une propriété qui doit se trouver dans tous les cours dignes de ce nom ! Ce que nous venons de refaire n'est donc pas vraiment étonnant.

– Il a été signalé plus haut que la « commutance » de f et f^* entraîne également celle des endomorphismes $Q(f)$ et f^* et un simple *copier-coller* amène alors à :

$$Q(f)(f^*(x)) = Q(f) \circ f^*(x) = f^* \circ Q(f)(x) = f^*(Q(f)(x))$$

égalités qui conduiront à une analogue conclusion.

– Il nous faut maintenant causer de « *perpendicularité* ».

Le professeur a démontré en classe un important lemme de stabilité qui pourrait se résumer ainsi :

LEMME DE STABILITÉ :

Soit $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien, u un endomorphisme de E et W un sous-espace vectoriel de V . On suppose que u est symétrique. Alors, si u stabilise W , ce même endomorphisme u stabilise également W^\perp .

Lorsque u n'est plus vraiment symétrique, on démontre, *mutatis mutandis*, que le sous-espace W^\perp est encore stabilisé, sauf que ce n'est plus exactement par u , mais par

son adjoint... Nous recommandons cependant à notre dévoué lecteur de s'assurer qu'il s'agit d'un *genuine mutatis mutandis*.

Forts de cet énorme *scoop*, vous pouvons clamer haut et fort que :

- vu que f stabilise F , l'adjoint f^* stabilise F^\perp ;
- puisque f^* stabilise F son adjoint f^{**} stabilise F^\perp et comme $f^{**} = f \dots$

Faut-il maintenant rappeler que le principe philosophique de la notion d'endomorphisme induit, est le non changement d'action — *the famous nca* —, principe selon lequel :

$$\forall x \in F \quad f_F(x) = f(x) \quad \text{et} \quad \forall x \in F^\perp \quad f_{F^\perp}(x) = f(x)$$

et lycée de Versailles pour f^* . Soit alors x et y appartenant à F . *Because nca*, nous avons tour à tour :

$$\langle f_F(x) \mid y \rangle = \langle f(x) \mid y \rangle = \langle x \mid f^*(y) \rangle = \langle x \mid (f^*)_F(y) \rangle$$

l'égalité centrale profitant de la propriété d'adjonction appliquée à f , propriété qui, appliquée maintenant à l'induit f_F , conduit également à :

$$\langle f_F(x) \mid y \rangle = \langle x \mid (f_F)^*(y) \rangle$$

L'*unicité* de l'adjoint dans l'espace euclidien(*) ($F, \langle \mid \rangle$) est alors formelle. Nous avons inéluctablement :

$$(f^*)_F = (f_F)^*$$

and, with crafty tactics, l'on se doute bien que l'on a également :

$$(f^*)_{F^\perp} = (f_{F^\perp})^*$$

Cela dit puisqu'il est *normalement* écrit que f et f^* commutent, ce n'est plus qu'une *nca* formalité que de vérifier que :

$$f_F \circ (f_F)^* = (f_F)^* \circ f_F \quad \text{et} \quad f_{F^\perp} \circ (f_{F^\perp})^* = (f_{F^\perp})^* \circ f_{F^\perp}$$

chroniques de deux normalités annoncées...

† L'ordre des phrases dans ces questions est pour le moins curieux. Il nous a fallu trouver l'adjoint de l'induit *avant* de prouver sa normalité et non l'inverse ! Nous avons d'ailleurs eu un anachronisme du même acabit lors de la question 11. Décidément...

17.a. Nous avons bien compris — question 13 — que les racines de π_A sont les valeurs propres complexes de la *matrice* A . En conséquence, celles d'entre-elles qui sont *réelles* ne sont, ni plus ni moins, que les valeurs propres de l'endomorphisme f . Ainsi λ se retrouve-t-il valeur propre de f ce qui doit aisément impliquer :

$$E_\lambda(f) \neq \{0\}$$

(*) Comme cela se pratique habituellement, nous ne changeons pas la notation du produit scalaire quand on le restreint à $F \times F$.

Un vecteur e non nul dans cet espace est donc bien dans l'obligation d'exister même qu'il devrait être vecteur propre de f . Le sous-espace vectoriel :

$$\text{Vect } e$$

est à coup sûr une droite vectorielle, qui, parce qu'elle est dirigée par un vecteur propre de f , est officiellement stabilisée par f .

b. L'absence de racines réelle de π_A a un gros impact sur sa réelle factorisation dont nous avons parlé quelques lignes plus haut. En factorisation basique, elle a obligatoirement le *look* (FRB) :

$$\pi_A = \prod_{j=1}^t (X^2 + a_j X + b_j)$$

où t est un entier naturel non nul et où :

$$\forall j \in \llbracket 1, t \rrbracket \quad a_j^2 - 4b_j < 0$$

La mission annulatrice de notre polynôme nous amène alors à :

$$\prod_{j=1}^t (f^2 + a_j f + b_j \text{Id}) = 0$$

égalité qui a au moins le privilège de mettre en lumière t endomorphismes ayant le type très recherché :

$$f^2 + a f + b \text{Id} \quad \text{où} \quad a^2 - 4b < 0$$

et ce serait bien le diable que, dans la bande, il n'y en ait pas au moins un *very interesting for us*.

Nous allons — merci Zénon ! — nous en assurer *by contradiction*. Supposons ainsi à cet effet que, pour tout $j \in \llbracket 1, t \rrbracket$, l'endomorphisme :

$$f^2 + a_j f + b_j \text{Id}$$

soit inversible. Un composé d'endomorphismes inversibles étant à son tour inversible, ce serait donc le cas de l'endomorphisme nul, mais comme n est non nul(*)...

† Notons pour nous rassurer que, selon la question 16, le sous-espace G est *stable* par f ce qui donne du sens à l'induit $g = f_G$.

c. Il y a deux choses, certes facilement captables, que le texte aurait pu faire un peu plus émerger.

– *primo*, l'adjoint d'une somme d'endomorphismes n'est autre que la somme de leurs adjoints ;

– *deuzio*, les endomorphismes *symétriques* sont exactement ceux qui sont leurs *own adjoints*, ce qui leur vaut d'ailleurs parfois le qualificatif d'endomorphismes « auto-adjoints ».

(*) En dimension non nulle, l'endomorphisme nul n'est pas inversible mais, bizarrement, il l'est en dimension zéro...

Grâce à ces précieuses allégations et à une certaine question 4.a, il devrait tranquillement en résulter que :

$$h^* = g^* + g^{**} = g^* + g = h$$

et l'endomorphisme h hériterait alors d'une très providentielle symétrie. Il reste alors une chose à préciser en ce qui concerne l'espace G . Il est dit que $f^2 + af + b \text{Id}$ n'est pas inversible, son noyau n'est donc pas réduit à zéro et par conséquent :

$$\dim G \geq 1$$

Bref, h est un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien de dimension supérieure ou égale à un et le théorème spectral emporte spectaculairement l'affaire.

† On peut sûrement tergiverser à propos de la diagonalisabilité en dimension zéro, mais une chose est claire, un endomorphisme diagonalisable d'un espace vectoriel de dimension supérieure ou égale à un possède au moins un vecteur propre. Le vecteur e est donc bel et bien là !

Nous noterons α la valeur propre de h attachée au vecteur propre e .

d. We have a lot to do ! Nous allons même numéroter nos tâches.

i. Supposons par l'absurde que la famille $(e, f(e))$ soit liée. Comme e n'est proprement pas nul, il existerait un réel λ tel que :

$$f(e) = \lambda e$$

mais cela est hors de question puisque, dans le cas présent, f n'a aucune valeur propre vu que π_A est fort dépourvu(*) de racine réelle...

L'espace vectoriel F est donc déjà un plan vectoriel et c'est bien.

ii. Il faut ensuite causer de stabilité de F par f ce qui, nous le savons bien, ne nécessite que les deux appartenances :

$$f(e) \in F \quad \text{et} \quad f(f(e)) \in F$$

- la première appartenance ne mérite évidemment rien de plus que *no comment* ;
- quant à la seconde, puisque e appartient au noyau de $f^2 + af + b \text{Id}$, nous avons :

$$f^2(e) = -be - af(e)$$

dont l'appartenance à F se voit comme le nez au milieu...

iii. Il reste, pour finir, à papoter de stabilité de F par l'adjoint f^* ce qui, comme *supra*, passe cette fois par les deux appartenances :

$$f^*(e) \in F \quad \text{et} \quad f^*(f(e)) \in F$$

(*) Comme la cigale !

ici dans une situation analogue, nous ne changeons pas une équipe qui gagne et nous suggérons donc une preuve par induction sur l'entier $n \geq 1$. En outre, comme certains arguments vont être identiques à ceux, *spectralement* développé en classe par le maître, il nous arrivera parfois de « glisser » allègrement sur ces points là.

- Si $n = 1$, l'argument est exactement le même que le *spectrally yours*. So...

- Supposons, pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$, le théorème acquis dans tous les euclidiens de dimension *inférieure ou égale* à n et considérons alors un espace euclidien $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ de dimension $n + 1$ ainsi que f un endomorphisme normal de E . Utilisons maintenant les pépites de la question 17.

- Supposons tout d'abord que f et f^* stabilisent une droite D . Celle-ci est fatalement dirigée par un vecteur propre ε_0 de f , que l'on peut évidemment supposer unitaire, et dont nous noterons λ_0 la valeur propre attachée. La question 16 assure que f_{D^\perp} est un endomorphisme normal de D^\perp et la formule « dimension d'un orthogonal » révèle quant à elle que :

$$\dim D^\perp = \dim E - \dim D = n$$

L'hypothèse de récurrence s'applique et il existe donc une base orthonormale :

$$\epsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$$

de D^\perp dans laquelle la matrice de f_{D^\perp} a la forme si fortement prisée dans cette question, mettons :

$$\text{Mat}_\epsilon(f_{D^\perp}) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & & & & \\ & & \lambda_p & & & & & & & & \\ & & & \square_1 & & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & & \\ 0 & & & & & & & & & & \square_s \end{bmatrix}$$

Il ne fait aucun doute — exactement comme en classe — que :

$$\mathcal{C} = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$$

est une base orthonormale de E . Observons ensuite que :

$$f(\varepsilon_0) = \lambda_0 \varepsilon_0$$

et que — non changement d'action merci ! — il est dit que :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad f(\varepsilon_j) = f_{D^\perp}(\varepsilon_j)$$

la matrice de f dans \mathcal{C} a le *look* :

$$\text{Mat}_\mathcal{C}(f) = \begin{bmatrix} \lambda_0 & & & & & & & & & & 0 \\ & \lambda_1 & & & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & & & \\ & & & \lambda_p & & & & & & & \\ & & & & \square_1 & & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & & \\ 0 & & & & & & & & & & \square_s \end{bmatrix}$$

et tout le monde est ravi.

– Supposons maintenant que f et f^* stabilisent un plan P . En question 17, ce cas est d'actualité lorsque f ne possède aucune valeur propre et il va donc en être de même des induits f_P et f_{P^\perp} , par ailleurs très normaux depuis la question 16. Le théorème d'existence des bases orthonormales dans les espaces euclidiens autorise la considération d'une base orthonormale $(\varepsilon_0, \varepsilon_1)$ de P et selon les questions 1 — seconde situation — et 8, la matrice de f_P dans cette base est de la forme :

$$\square_0 = \rho_0 R_{\theta_0} \quad \text{où } \rho_0 > 0 \text{ et } \theta_0 \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$$

Maintenant, puisque :

$$\dim P^\perp = n - 1$$

l'hypothèse de récurrence s'applique au normal f_{P^\perp} et il existe ainsi une base orthonormale :

$$(\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$$

de P^\perp telle que la matrice de f_{P^\perp} dans cette base soit de type :

$$\begin{bmatrix} \square_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \square_s \end{bmatrix}$$

l'absence, cette fois, de valeurs propres étant totalement responsable de la disparition des réels λ_i dans cette matrice. *As usual*, la famille :

$$\mathcal{C} = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$$

est une base orthonormale de E et toujours, *because nca*, nous avons ici :

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{bmatrix} \square_0 & & & 0 \\ & \square_1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \square_s \end{bmatrix}$$

ce qui ne fera de mal à personne !

19. La réponse est désormais claire. Ce sont *exactement* celles qui se diagonalisent *réellement* et en base orthonormale de surcroît !

Partie 5

20. Soit z un complexe convenable. Nous devons avoir :

$$\begin{cases} (z+1)^7 = z^7 + 1 \\ (z+1)^6 = z^6 \end{cases}$$

En écrivant :

$$(z+1)^7 = (z+1)(z+1)^6 = z(z+1)^6 + (z+1)^6$$

on en déduit aisément que :

$$(z + 1)^6 = z^6 = 1$$

et z fait donc partie de l'ensemble \mathbb{U}_6 des racines sixièmes complexes de l'unité. Notre cultivé lecteur se souvient sûrement de l'année de ses *seventies* durant laquelle il a dû apprendre que :

$$\mathbb{U}_6 = \{1, -1, j, j^2, -j, -j^2\}$$

où j désigne le fameux complexe :

$$j = e^{2i\pi/3}$$

vérifiant la bien connue :

$$1 + j + j^2 = 0$$

Nous allons maintenant passer en revue les diverses possibilités pour z .

– Si $z = 1$, nous avons :

$$(z + 1)^6 = 2^6 \quad \text{et} \quad z^6 = 1$$

– Si $z = -1$, nous avons cette fois :

$$(z + 1)^6 = 0 \quad \text{et} \quad z^6 = 1$$

– Si $z = -j$ ou $z = -j^2$, on a facilement et quasi mentalement :

$$|z + 1| = \sqrt{3} \quad \text{et} \quad |z| = 1$$

Bref, les seuls complexes *potentiellement* convenables sont $z = j$ et $z = j^2$ et il est très facile — lecteur à toi l'honneur ! — de constater qu'ils le sont *définitivement*.

À bien regarder, grâce à la caractérisation des multiplicités *via* les dérivées successives, nous venons de démontrer que les complexes j et j^2 sont, chacun, racine de P d'ordre de multiplicité au moins égal à deux et il est impensable de ne pas avoir aperçu les racines réelles 0 et -1 . Notre parfaite maîtrise de la factorisation polynomiale fait alors que le polynôme :

$$X(X + 1)(X - j)^2(X - j^2)^2$$

divise P et comme ce dernier est ouvertement de degré 6 et de coefficient dominant 7(*) nous revendiquons :

$$P = 7X(X + 1)(X - j)^2(X - j^2)^2$$

ce qui constitue la factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$. Maintenant, étant donné qu'il est bien connu que :

$$(X - j)(X - j^2) = X^2 + X + 1$$

(*) Le « binomage » de $(X+1)^7$ et quelques bénignes simplifications conduisent aisément à l'égalité :

$$P = 7X^6 + 21X^5 + 35X^4 + 35X^3 + 21X^2 + 7X$$

nous avons également :

$$P = X(X + 1)(X^2 + X + 1)^2$$

chronique d'une factorisation *réelle* annoncée.

↯ Nous avons déjà évoqué l'égalité :

$$P = 7(X^6 + 3X^5 + 5X^4 + 5X^3 + 3X^2 + X)$$

Les racines très évidentes 0 et -1 révèlent la mise en facteur du produit $X(X + 1)$ et c'est alors assez facilement que l'on parvient à :

$$P = 7X(X + 1)(X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1)$$

Grâce à la formule du carré du trinôme, en l'occurrence :

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

le *physio* se réveille et assène que :

$$X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1 = X^4 + X^2 + 1 + 2X^3 + 2X^2 + 2X = (X^2 + X + 1)^2$$

et nous obtenons le même résultat sans avoir à résoudre de fastidieux systèmes...

21. La question est assez violente, c'est le moins que l'on puisse dire ! Allons-y calmement.

– Il faut tout d'abord bien comprendre comment l'on obtient une « réduite » de f comme celle obtenue lors de la dix-huitième question. Les λ_k sont les valeurs propres *réelles* de la matrice A et les blocs :

$$\square_h = \rho_h R_{\theta_h} = \rho_h \begin{bmatrix} \cos \theta_h & \sin \theta_h \\ -\sin \theta_h & \cos \theta_h \end{bmatrix}$$

correspondent aux couples de valeurs propres complexes non réelles mais conjuguées :

$$(\rho_h e^{i\theta_h}, \rho_h e^{-i\theta_h})$$

À bon entendre donc !

– Il est dit ensuite, depuis le début, que :

$$A(A + I_n)(A^2 + A + I_n)^2 = 0$$

le polynôme P ayant, entre-temps, subi un *lifting* factorisant. Oui mais voilà, le texte précise que la matrice A est inversible, à telle enseigne qu'après multiplication à gauche par A^{-1} , nous avons aussi :

$$(A + I_n)(A^2 + A + I_n)^2 = 0$$

et où :

$$\forall h \in \llbracket 1, s \rrbracket \quad \square_h = \begin{bmatrix} \cos \theta_h & \sin \theta_h \\ -\sin \theta_h & \cos \theta_h \end{bmatrix} \quad \theta_h \in \mathbb{R}$$

sont mentalement orthogonales, les raisons essentielles étant tout bêtement les égalités :

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \quad \text{et} \quad \cos \theta \sin \theta - \sin \theta \cos \theta = 0$$

On notera la *cruciale* absence de réels « ρ » dans les blocs \square_h de cette affaire.

– La matrice dans la base \mathcal{C} de f , puisqu'elle a justement le *look* que nous venons d'évoquer, est donc définitivement orthogonale et nous la noterons M .

Il est alors temps de faire le bilan. Nous avons :

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(f) \quad ; \quad M = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$$

et les deux bases \mathcal{B}_0 et \mathcal{C} sont orthonormales. La matrice de passage P de la base \mathcal{B}_0 à la base \mathcal{C} est donc officiellement orthogonale et le théorème de changement de base est formel. Il stipule que :

$$A = PMP^{-1}$$

Nous n'avons pas oublié que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est stable pour l'inversion et *in fine*, la matrice A est produit de trois matrices orthogonales et comme nous n'avons pas non plus égaré la stabilité de l'orthogonalité pour la multiplication...

22. Nous avons déjà remarqué que :

$$(I_n + A)(I_n + A + A^2)^2 = 0$$

et après multiplication à gauche par $I_n + A$, nous avons aussi :

$$(I_n + A)^2(I_n + A + A^2)^2 = 0$$

égalité qui, puisque les polynômes en A commutent, peut également s'écrire :

$$\left[(I_n + A)(I_n + A + A^2) \right]^2 = 0$$

Comme A est normale, la délicieuse question 10 tombe à pic et révèle qu'en réalité :

$$(I_n + A)(I_n + A + A^2) = 0$$

qu'un simple développement transforme en :

$$I + 2A + 2A^2 + A^3 = 0$$

Nous avons du coup :

$$A(-2I_n - 2A - A^2) = I_n$$

puis carrément :

$$A^{-1} = -2I_n - 2A - A^2$$

grâce à la multiplication à gauche par A^{-1} . En bref, la matrice A^{-1} est un polynôme en A et comme depuis peu :

$$A^T = A^{-1}$$

nous pouvons changer de question.

† Il n'est pas exclu que le professeur ait évoqué en classe le résultat suivant :

ANNULATEUR ET INVERSIBILITÉ :

Soit U une matrice carrée d'ordre supérieur ou égal à un. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

i. La matrice U est inversible.

ii. La matrice U possède un polynôme annulateur dont le terme constant n'est pas nul.

En outre et cerise sur le gâteau, lorsque U est inversible, son inverse U^{-1} est toujours un polynôme en U c'est-à-dire :

$$U^{-1} \in \mathbb{K}[U]$$

Ceci explique donc cela...

23. Au risque de radoter, nous rappelons que le polynôme :

$$(X + 1)(1 + X + X^2)$$

est annulateur de A et vu l'état de ses racines, il semblerait que :

$$\text{Spec}_{\mathbb{C}} A \subset \{-1, j, j^2\}$$

et il est temps de discuter *un poquétin*.

– Si le réel -1 n'était pas valeur propre, il n'y aurait pas de « -1 » dans notre super réduite M qui aurait donc l'aspect suivant :

$$M = \begin{bmatrix} \square_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \square_s \end{bmatrix}$$

Nos petits blocs \square_h étant d'ordre 2, l'ordre de M serait l'entier *pair* :

$$n = 2s$$

ce que le texte a définitivement écarté.

– À l'opposé, si les complexes j et j^2 n'étaient pas des valeurs propres de A , ce sont nos petits blocs \square_h qui quitteraient le navire de la réduite M qui deviendrait alors :

$$M = \begin{bmatrix} -1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -1 \end{bmatrix} = -I_n$$

La matrice A finirait donc par être semblable à $-I_n$ et par conséquent égale(*) à $-I_n$ et cela non plus, n'est pas d'actualité.

Bref, nous avons en réalité :

$$\text{Spec}_{\mathbb{C}} A = \{-1, j, j^2\}$$

et comme nous avons bien compris comment se trame le polynôme π_A , nous pouvons revendiquer l'égalité :

$$\pi_A = (X + 1)(1 + X + X^2)$$

Partie 6

24. Nous avons déjà eu l'occasion d'observer que la matrice A est *orthogonalement* semblable à la réduite M de la question 18 ce qui signifie l'existence d'une matrice *orthogonale* P telle que l'on ait au choix :

$$A = PMP^{-1} = PMP^T$$

Vu la situation que l'on nous propose ici notre réduite M est maintenant diagonale et, si cela ne dérange personne, nous la noterons plutôt D pour bien marquer sa *diagonalité*. Nous avons alors :

$$A = PDP^T$$

égalité qui, après un petit coup de *dressing undressing principle* et parce que les diagonales sont symétriques, amène mentalement à :

$$A^T = A$$

chronique d'une symétrie *a priori* inattendue mais *a posteriori* bien prévisible...

Vu les exigences du projet, nous allons devoir faire un peu attention.

- Si $n \geq 2$, le polynôme :

$$P = X$$

semble *farparement* faire l'affaire d'autant que son degré est ouvertement idoine.

- En revanche, si $n = 1$, il existe un réel a tel que :

$$A = [a]$$

et le polynôme constant $P = a$ est assurément *ad hoc*.

25. Il nous est déjà arrivé de noter P la matrice de passage de la base canonique \mathcal{B}_0 à la base \mathcal{C} , matrice dont nous avons, *au passage*, signalé l'orthogonalité. Le théorème de changement de base est à nouveau mis à contribution et voilà donc que :

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f^*) = P^{-1} \cdot \text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(f^*) \cdot P = P^T \cdot \text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(f^*) \cdot P$$

(*) Nul ne peut ignorer que quand on est semblable à λI_n , on est fatalement égal à λI_n ...

la possibilité de choisir entre la transposée de P et son inverse étant l'un des privilèges de l'orthogonalité. Autant dire alors que :

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f^*) = P^T \cdot A^T \cdot P$$

égalité que l'ineffable *dressing undressing* transforme dans la foulée en :

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f^*) = (P^T \cdot A \cdot P)^T$$

Le *physio* ayant assurément capté que :

$$P^T \cdot A \cdot P = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = M$$

il s'avère, comme l'on pouvait s'y attendre, que la matrice dans \mathcal{C} de l'adjoint f^* n'est autre que la transposée de celle de f , ce qui, compte tenu des notations que nous avons adoptées, s'écrit aussi :

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f^*) = M^T$$

26. L'équivalence logique oblige une organisation en deux temps.

i. \Rightarrow Nous commençons par déduire de l'hypothèse que :

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f^*) = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(P(f)) = P(\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f))$$

la dernière égalité reposant sur les excellentes propriétés de l'opérateur :

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}} : \mathcal{L}(E) \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$$

que sont sa linéarité et sa compatibilité avec la composition(*). Oui mais voilà, compte tenu de la précédente cela devient gentiment :

$$M^T = P(M)$$

Nous demandons alors à notre dévoué lecteur d'accepter sans sourciller que l'égalité précédente se détaille en réalité en :

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \lambda_r & & & & & & \\ & & & \square_1^T & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ 0 & & & & & & & & \square_t^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P(\lambda_1) & & & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & P(\lambda_r) & & & & & & \\ & & & P(\square_1) & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ 0 & & & & & & & & P(\square_t) \end{bmatrix}$$

(*) Les initiés parlent de morphisme d'algèbre.

l'égalité :

$$P(M) = \begin{bmatrix} P(\lambda_1) & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & P(\lambda_r) & & & & \\ & & & P(\square_1) & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & P(\square_t) & \\ 0 & & & & & & \end{bmatrix}$$

réclamant, par ci, par là, quelque dextérité avec les produits par bloc — pas vraiment officiels d'ailleurs — mais au point où nous en sommes...

Soit tout d'abord $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$. L'égalité :

$$\lambda_k = P(\lambda_k)$$

doit, bien sûr, ne casser aucune patte de palmipède.

Soit maintenant $k \in \llbracket 1, t \rrbracket$. Ce qui est totalement limpide est évidemment l'égalité :

$$\square_k^T = P(\square_k)$$

mais il semble que la route soit encore longue... Nous devons donc nous organiser en conséquence.

– Nous commençons par rappeler que :

$$\square_k = \rho_k \begin{bmatrix} \cos \theta_k & \sin \theta_k \\ -\sin \theta_k & \cos \theta_k \end{bmatrix}$$

et que :

$$\mu_k = \rho_k (\cos \theta_k + i \sin \theta_k)$$

et nous observons également que \square_k^T se déduit de \square_k en changeant tout bêtement θ_k en son opposé.

– Il se trouve maintenant que toutes les matrices de type :

$$\rho \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

sont très sympathiquement \mathbb{C} -diagonalisables, le fabuleux côté de l'affaire reposant sur une diagonalisation *via* une matrice de passage Q qui ne dépend ni de ρ , ni de θ . Après une rapide recherche d'éléments propres, *as usual* laissée à la sagacité de l'impétrant, il s'avère en effet que la matrice :

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}$$

qui ne dépend *caïman* de personne vérifie l'égalité :

$$\rho \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \bar{\mu} \end{bmatrix} Q^{-1}$$

où, à la surprise générale, nous avons noté :

$$\mu = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$$

– Il résulte alors de toutes ces belles choses que :

$$\square_k^T = Q \begin{bmatrix} \bar{\mu}_k & 0 \\ 0 & \mu_k \end{bmatrix} Q^{-1} \quad \text{et} \quad \square_k = Q \begin{bmatrix} \mu_k & 0 \\ 0 & \bar{\mu}_k \end{bmatrix} Q^{-1}$$

et nous sommes alors impérativement tenus de savoir que :

– *primo*, l'on a l'égalité :

$$P(\square_k) = Q \cdot P \left(\begin{bmatrix} \mu_k & 0 \\ 0 & \bar{\mu}_k \end{bmatrix} \right) \cdot Q^{-1}$$

qui pourrait s'inscrire dans le thème « polynôme matriciel et similitude » ;

– *Deuzio*, l'on a l'officielle(*) :

$$P \left(\begin{bmatrix} \mu_k & 0 \\ 0 & \bar{\mu}_k \end{bmatrix} \right) = Q \begin{bmatrix} P(\mu_k) & 0 \\ 0 & P(\bar{\mu}_k) \end{bmatrix} Q^{-1}$$

Il semble bien désormais que nous soyons au bout du chemin puisque que nous venons de parvenir à :

$$Q \begin{bmatrix} \bar{\mu}_k & 0 \\ 0 & \mu_k \end{bmatrix} Q^{-1} = Q \begin{bmatrix} P(\mu_k) & 0 \\ 0 & P(\bar{\mu}_k) \end{bmatrix} Q^{-1}$$

d'où il ressort en particulier et quasi mentalement que :

$$P(\mu_k) = \bar{\mu}_k$$

ii. \Leftarrow On suppose maintenant que :

$$\forall k \in \llbracket 1, r \rrbracket \quad \lambda_k = P(\lambda_k) \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket 1, t \rrbracket \quad \bar{\mu}_k = P(\mu_k)$$

Comme P est un polynôme réel, il s'ensuit sans problème que l'on a également :

$$\forall k \in \llbracket 1, t \rrbracket \quad \mu_k = P(\bar{\mu}_k)$$

(*) Un peu plus haut nous avons un polynôme en une matrice bloc-diagonale d'où la demande exprime d'admettre le *déblocage* de la situation alors qu'ici nous avons un polynôme en une *genuine* matrice diagonale. So...

et du coup tout se « remonte » aisément jusqu'à l'obtention de :

$$M^T = P(M)$$

qui n'est autre que la matricielle façon d'écrire l'égalité :

$$f^* = P(f)$$

† Sacrée question n'est-il pas ?

27. Le texte a pris soin de préciser que les r réels :

$$\lambda_1, \dots, \lambda_r$$

sont deux à deux distincts, ainsi que les $2t$ complexes non réels :

$$\mu_1, \bar{\mu}_1, \dots, \mu_t, \bar{\mu}_t$$

Les dénominateurs des polynômes en question sont donc assurément non nuls, les joyeux lurons L_j , Q_j et T_j sont là et bel et bien là mais, ici encore, il semble qu'il y ait pas mal de pain sur la planche !

– Soit tout d'abord $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$. Comme le polynôme Q est réel et que les λ_k le sont également, il ne fait aucun doute que :

$$L_j \in \mathbb{R}[X]$$

– Soit ensuite $j \in \llbracket 1, t \rrbracket$. Nous allons devoir commencer par un petit prolégomène de conjugaison polynomiale.

L'on se doute bien que lorsque H est un polynôme complexe, l'on définit son conjugué comme étant le polynôme, noté \bar{H} , dont les coefficients sont les conjugués de ceux de H . Autrement dit et sans faire de fioritures, si l'on a :

$$H = \sum_{k=0}^m h_k X^k$$

l'on a dans la foulée :

$$\bar{H} = \sum_{k=0}^m \bar{h}_k X^k$$

Les propriétés de la conjugaison des nombres complexes, largement développées durant l'année de nos *seventies*, se transmettent sans sourciller à la conjugaison des polynômes et nous avons du coup des choses polynomiales du genre :

$$\overline{H_1 + H_2} = \bar{H}_1 + \bar{H}_2 \quad ; \quad \overline{H_1 \cdot H_2} = \bar{H}_1 \cdot \bar{H}_2$$

ou aussi :

$$H \in \mathbb{R}[X] \Leftrightarrow H = \bar{H} \quad ; \quad H + \bar{H} \in \mathbb{R}[X]$$

et d'autres choses encore que le lecteur découvrira au fur et à mesure.

Maintenant que nous sommes aguerris à cette nouvelle conjugaison il devrait être assez limpide que :

$$T_j = \overline{Q_j}$$

la réalité du polynôme S ayant eu, bien entendu et quelque part, son pesant d'arachide. Il en résulte alors tour à tour que :

$$\bar{\mu}_j Q_j + \mu_j T_j = \bar{\mu}_j Q_j + \mu_j \overline{Q_j} = \bar{\mu}_j Q_j + \overline{\mu_j Q_j}$$

ce qui montre également que :

$$\bar{\mu}_j Q_j + \mu_j T_j \in \mathbb{R}[X]$$

De là à en déduire que P est un polynôme *réel*, il n'y a qu'un misérable pas que nous franchissons dans la plus grande des allégresses !

† Le texte semble ici avoir oublié une partie de son projet, en l'occurrence l'allégation concernant le degré de P . Nous allons donc combler ce vide insupportable ! Il suffit en effet de savoir compter sur ses doigts pour se convaincre de ce que :

$$\forall j \in \llbracket 1, r \rrbracket \quad \deg L_j = r + 2t - 1 \quad \text{et} \quad \forall j \in \llbracket 1, t \rrbracket \quad \deg Q_j = \deg T_j = r + 2t - 1$$

et il en résulte alors très tranquillement que :

$$\deg P \leq r + 2t - 1$$

Oui mais voilà, vu les origines ethniques des nombres λ_k et autres $\mu_k, \bar{\mu}_k$, il ne fait pas l'ombre d'un doute que :

$$r + 2t \leq n$$

à telle enseigne qu'en réalité :

$$\deg P \leq n - 1$$

and the gap is filled...

– Si l'on en croit désormais la terrible question 26, le pain qui reste sur la planche doit passer par le calcul des nombres :

$$P(\lambda_k) \quad \text{et} \quad P(\mu_k)$$

où, histoire de rafraîchir un peu les mémoires, nous avons :

$$P = \sum_{j=1}^r \lambda_j L_j + \sum_{j=1}^t (\bar{\mu}_j Q_j + \mu_j T_j)$$

We've to roll up one's sleeves !

– Soit $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$. Les habitués des « galipettes lagrangiennes » n'auront aucun mal à constater que :

$$L_j(\lambda_k) = \delta_{jk} \quad \text{si} \quad j \in \llbracket 1, r \rrbracket \quad ; \quad Q_j(\lambda_k) = T_j(\lambda_k) = 0 \quad \text{si} \quad j \in \llbracket 1, t \rrbracket$$

la finesse du gadget de Kronecker étant toujours très appréciée dans ce genre de situation.

Dans ces conditions, il ne fait plus alors aucun doute que :

$$P(\lambda_k) = \sum_{j=1}^r \lambda_j L_j(\lambda_k) + \sum_{j=1}^t (\bar{\mu}_j Q_j(\lambda_k) + \mu_j T_j(\lambda_k)) = \sum_{j=1}^r \lambda_j \delta_{jk}$$

et après une toujours aussi ludique gestion du *delta* de Leopold, voilà que :

$$P(\lambda_k) = \lambda_k$$

Nous venons ainsi de gagner le premier *round* de la 26.

– Soit maintenant $k \in \llbracket 1, t \rrbracket$. On trouve de la même façon que :

$$L_j(\mu_k) = 0 \text{ si } j \in \llbracket 1, r \rrbracket \quad ; \quad Q_j(\mu_k) = \delta_{jk} \text{ et } T_j(\mu_k) = 0 \text{ si } j \in \llbracket 1, t \rrbracket$$

Il en résulte cette fois que :

$$P(\mu_k) = \sum_{j=1}^r \lambda_j L_j(\mu_k) + \sum_{j=1}^t (\bar{\mu}_j Q_j(\mu_k) + \mu_j T_j(\mu_k)) = \sum_{j=1}^r \bar{\mu}_j \delta_{jk}$$

ce que la sympathique gestion transforme en :

$$P(\mu_k) = \bar{\mu}_k$$

et nous permet à la fois de gagner le second *round* et de passer, dans la foulée, à la toute dernière question.

28. Nous avons ici :

$$r = 2 \quad ; \quad S = X(X + 1) \quad ; \quad t = 1 \quad ; \quad Q = X^2 + X + 1$$

et du coup :

$$\lambda_1 = 0 \quad ; \quad \lambda_2 = -1 \quad ; \quad \mu_1 = j \quad ; \quad \bar{\mu}_1 = j^2$$

et comme on dit, il n'y a plus qu'à...

Précisons cependant à ceux — ou celles — qui ont peur du vide qu'il va bien falloir vaincre le vertige ! En effet, puisque $t = 1$, le produit :

$$\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq 1}}^t \text{---}$$

qui figure à la fois dans les polynômes Q_1 et T_1 , est ouvertement le produit *vide* — on ne multiplie rien ! — et il faut alors impérativement savoir que le produit *vide* est égal à 1.

Cela étant dit, et en n'oubliant pas la célèbre :

$$1 + j + j^2 = 0$$

le lecteur trouvera aisément que :

$$L_1 = (X + 1)(X^2 + X + 1) \quad \text{et} \quad L_2 = -X(X^2 + X + 1)$$

ainsi que :

$$Q_1 = -X(X + 1) \cdot \frac{X - j^2}{j - j^2} \quad \text{et} \quad T_1 = -X(X + 1) \cdot \frac{X - j}{j^2 - j}$$

dernières égalités qui confirment au passage que les polynômes Q_1 et T_1 se *conjuguent au présent !*

Le reste n'est alors affaire que de remplacements, de développements et autre simplifications, en bref le lots de tous ceux qui calculent et qui aiment calculer, et comme il se fait tard, nous laissons à notre valeureux lecteur le soin de parvenir à :

$$P = -X^2$$

MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 HEURES.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

SUJET

Dans ce problème, on s'intéresse à des opérations de transport dans des situations déterministes ou aléatoires, modélisées de manière discrète ou continue, dans le but de trouver un programme de transport optimal dont le coût serait le plus faible possible.

Les parties I, II et III sont largement indépendantes.

- Toutes les variables aléatoires considérées dans ce problème sont supposées définies sur le même espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) .
- Sous réserve d'existence, on note $E(Z)$ l'espérance d'une variable aléatoire Z .
- Pour tout entier N supérieur ou égal à 1, on note \mathcal{E}_N l'ensemble des applications de $[1, N]$ dans $[1, N]$.

Préliminaire

1. Soit N un entier supérieur ou égal à 2.

- Quel est le nombre d'éléments de l'ensemble \mathcal{E}_N ?
- Parmi les éléments de \mathcal{E}_N , quel est le nombre d'applications injectives et parmi celles-ci, combien sont strictement monotones ?
(les réponses aux questions 1.a) et 1.b) seront données sans démonstration)

2. Soit p un réel vérifiant $0 < p < 1$.

On considère une variable aléatoire X suivant la loi exponentielle de paramètre 1.

Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose : $Y(\omega) = \lfloor pX(\omega) \rfloor$, où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la fonction partie entière.

- Vérifier que Y est une variable aléatoire discrète. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, la probabilité $P(\{Y = n\})$.
- Montrer que la variable aléatoire $Y + 1$ suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.
- Établir les inégalités strictes : $0 < E(Y) < p$.

- 3.a) Pour tout couple $(r, s) \in \mathbb{N}^2$, montrer que l'intégrale $\int_0^1 x^r (\ln x)^s dx$ est convergente.
(on pourra utiliser le changement de variable $u = -\ln x$ après avoir justifié précisément sa validité)
- b) Établir pour tout couple $(r, s) \in \mathbb{N}^2$, l'égalité : $\int_0^1 x^r (\ln x)^s dx = \frac{(-1)^s s!}{(r+1)^{s+1}}$.

Partie I. Transport dans une situation aléatoire

On dit que la loi d'une variable aléatoire Y est *accessible* depuis une variable aléatoire X , s'il existe une application $T : X(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ telle que la variable aléatoire $T(X)$ suit la même loi que Y .

L'application T est alors appelée une *fonction de transport* de la variable aléatoire X vers la loi de Y .

On associe à T un *coût de transport* $C(T)$ défini, sous réserve d'existence, par : $C(T) = E\left((X - T(X))^2\right)$.

Dans toute cette partie, X désigne une variable aléatoire vérifiant $X(\Omega) =]0, 1[$ et suivant la loi uniforme sur $]0, 1[$, c'est-à-dire admettant pour densité la fonction f_X définie par :

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]0, 1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

4. Soit p un réel vérifiant $0 < p < 1$. Pour tout réel $a \in]0, 1 - p]$, on note dans cette question, T_a la fonction définie sur $]0, 1[$ par :

$$T_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]a, a + p[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

- a) Calculer la probabilité $P([T_a(X) = 1])$ et en déduire que les fonctions T_a sont des fonctions de transport de X vers une même loi que l'on précisera.
- b) Vérifier que le coût de transport $C(T_a)$ est égal à $\frac{1}{3} + p(1 - p) - 2ap$.
- c) En déduire la valeur de a qui minimise $C(T_a)$ et exprimer le coût minimal correspondant en fonction de p .
5. Soit T_1 et T_2 les applications définies sur $]0, 1[$ par $T_1(x) = -\ln x$ et $T_2(x) = -\ln(1 - x)$.
- a) Vérifier que T_1 et T_2 sont des fonctions de transport de X vers une loi que l'on précisera.
- b) En utilisant les résultats de la question 3, comparer les coûts de transport $C(T_1)$ et $C(T_2)$.
- c) À l'aide de la question 2, montrer que toutes les lois géométriques sont accessibles depuis X .
6. Dans cette question, Y désigne une variable aléatoire admettant une densité f_Y continue et strictement positive sur \mathbb{R} .
- a) Justifier que la fonction de répartition F_Y de Y réalise une bijection de \mathbb{R} sur l'intervalle ouvert $]0, 1[$.
- b) On note F_Y^{-1} la bijection réciproque de F_Y .
Montrer que F_Y^{-1} est une fonction de transport de la variable aléatoire X vers la loi de Y .
7. *Cas particulier : on suppose que Y suit la loi normale centrée réduite.*

On note F_Y la fonction de répartition de Y et φ la densité continue sur \mathbb{R} de Y .

- a) Établir la convergence de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} y F_Y(y) \varphi(y) dy$.

À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} y F_Y(y) \varphi(y) dy = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$.

- b) Montrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} (y - F_Y(y))^2 \varphi(y) dy$ est convergente et la calculer.
 c) En déduire que le coût de transport $C(F_Y^{-1})$ est égal à $\frac{4}{3} - \frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

Partie II. Transport optimal dans une situation déterministe

Dans toute cette partie, N désigne un entier supérieur ou égal à 2.

On considère N réels d_1, d_2, \dots, d_N (appelés points de départ) et N réels a_1, a_2, \dots, a_N (appelés points d'arrivée) vérifiant $d_1 < d_2 < \dots < d_N$ et $a_1 < a_2 < \dots < a_N$.

On pose : $D = \{d_1, d_2, \dots, d_N\}$ et $A = \{a_1, a_2, \dots, a_N\}$.

8.a) Montrer que pour tout couple $(k, \ell) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2$, on a : $d_k a_k \geq d_k a_\ell + d_\ell a_k - d_\ell a_\ell$.

b) En déduire à l'aide d'une double sommation que pour tout N -uplet $(p_1, p_2, \dots, p_N) \in \mathbb{R}_+^N$ tel que $\sum_{k=1}^N p_k = 1$,

on a :

$$\sum_{k=1}^N p_k d_k a_k \geq \left(\sum_{k=1}^N p_k d_k \right) \times \left(\sum_{k=1}^N p_k a_k \right) \quad (1)$$

9. Soit $t \in \mathcal{E}_N$. On réordonne la liste $(t(1), t(2), \dots, t(N))$ selon les valeurs croissantes et on note alors $(\hat{t}(1), \hat{t}(2), \dots, \hat{t}(N))$ la liste ordonnée obtenue. On a donc : $\hat{t}(1) \leq \hat{t}(2) \leq \dots \leq \hat{t}(N)$.

a) Justifier pour tout $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$, l'inégalité : $\sum_{k=n}^N a_{t(k)} \leq \sum_{k=n}^N a_{\hat{t}(k)}$.

b) On pose $d_0 = 0$. Justifier l'égalité : $\sum_{n=1}^N d_n a_{t(n)} = \sum_{n=1}^N \left((d_n - d_{n-1}) \sum_{k=n}^N a_{t(k)} \right)$.

c) Établir l'inégalité : $\sum_{n=1}^N d_n a_{t(n)} \leq \sum_{n=1}^N d_n a_{\hat{t}(n)}$. (2)

On appelle *programme de transport*, toute bijection T de D sur A , et *coût* d'un programme de transport T , la somme $c(T)$ définie par : $c(T) = \sum_{k=1}^N (d_k - T(d_k))^2$.

10. Soit \hat{T} le programme de transport défini par : pour tout $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$, $\hat{T}(d_k) = a_k$.

Déduire des questions précédentes que le programme \hat{T} est optimal, c'est-à-dire que pour tout programme de transport T , on a : $c(T) \geq c(\hat{T})$.

11. *Interprétation probabiliste des inégalités (1) et (2).*

Soit h une application croissante de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

- a) En utilisant l'inégalité (1), établir pour toute variable aléatoire discrète X ne prenant qu'un nombre fini de valeurs, l'inégalité : $E(X h(X)) \geq E(X) E(h(X))$.
 b) Que peut-on en déduire pour le coefficient de corrélation linéaire de X et $h(X)$ lorsque les variances de X et $h(X)$ sont strictement positives ?
 c) En utilisant l'inégalité (2), montrer que si X est une variable aléatoire discrète suivant la loi uniforme sur $\llbracket 1, N \rrbracket$ et t un élément de \mathcal{E}_N , on a : $E(h(X) t(X)) \leq E(h(X) \hat{t}(X))$.

Partie III. Transport optimal dans une situation aléatoire

Les définitions de fonction de transport et de coût de transport sont identiques à celles données dans le préambule de la partie I.

Dans toute cette partie, U désigne une variable aléatoire vérifiant $U(\Omega) = [0, 1]$ et suivant la loi uniforme sur le segment $[0, 1]$.

Soit Y une variable aléatoire admettant une densité f_Y nulle hors d'un segment $[\alpha, \beta]$ ($\alpha < \beta$) et dont la restriction à ce segment est continue et strictement positive. On note F_Y la fonction de répartition de Y .

On suppose l'existence d'une fonction g de classe C^1 sur $[0, 1]$, à valeurs dans $[\alpha, \beta]$, telle que la variable aléatoire $Z = g(U)$ suit la même loi que Y .

12. Pour tout entier $N \geq 1$, on pose pour tout $\omega \in \Omega$:

$$X_N(\omega) = \begin{cases} [1 + N U(\omega)] & \text{si } 0 \leq U(\omega) < 1 \\ N & \text{si } U(\omega) = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad Y_N(\omega) = g\left(\frac{X_N(\omega)}{N}\right).$$

a) Trouver la loi de la variable aléatoire X_N .

b) Établir l'existence d'une constante $\lambda > 0$, indépendante de N telle que : $\forall \omega \in \Omega, |Z(\omega) - Y_N(\omega)| \leq \frac{\lambda}{N}$.

c) Montrer que pour tout réel y , on a : $F_Y\left(y - \frac{\lambda}{N}\right) \leq P([Y_N < y])$.

13. Pour tout $k \in [1, N]$, on pose : $t_N(k) = g\left(\frac{k}{N}\right)$. On définit alors \hat{t}_N à partir de t_N , comme \hat{t} à partir de t dans la question 9.

a) Établir pour tout $k \in [1, N]$, les inégalités : $F_Y\left(\hat{t}_N(k) - \frac{\lambda}{N}\right) \leq P([Y_N < \hat{t}_N(k)]) < \frac{k}{N}$.

b) On note F_Y^{-1} la fonction réciproque de la restriction à $[\alpha, \beta]$ de la fonction F_Y .

Montrer que pour tout entier $N \geq 1$, on a : $\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{k}{N} g\left(\frac{k}{N}\right) \leq \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{k}{N} \left(F_Y^{-1}\left(\frac{k}{N}\right) + \frac{\lambda}{N}\right)$.

c) En déduire l'inégalité : $E(U g(U)) \leq E(U F_Y^{-1}(U))$.

14.a) Parmi les fonctions de transport de classe C^1 de U vers la loi de Y , trouver une fonction de transport T^* de coût minimal.

b) On suppose que $Y = |4U - 2|$. Déterminer T^* et $C(T^*)$.

CORRIGÉ

Par Jean-Louis Roque, professeur au lycée Pasteur à Neuilly-sur-Seine, et external lecturer à Essec Business School.

Pour des raisons esthétiques, totalement personnelles, je préfère le graphisme n à son grand frère haut de casse N . J'ai donc, dans le texte qui va suivre, utilisé la *typo* « n » en lieu et place de sa majuscule et j'espère que j'en serai pardonné...

Préliminaire

1. Comme il y a visiblement des hypothèses inutiles d'emblée, nous décidons de transformer l'attaque en annonçant un entier n tout bêtement naturel. Dans la foulée, et histoire de rafraîchir les mémoires *vives*, nous annonçons un autre entier m , lui aussi simplement naturel.

a. Nul ne peut alors ignorer qu'il y a exactement n^m applications d'un ensemble à m éléments dans un ensemble à n éléments et il en résulte en particulier que :

$$|\mathcal{E}_n| = n^n$$

b. Le nombre d'injections d'un ensemble à m éléments dans un ensemble à n éléments est lui aussi bien connu. Il s'agit du nombre d'arrangements A_n^m et nous en déduisons ici que le nombre d'injections de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans lui-même est :

$$A_n^n = n!$$

L'égalité supposant que notre sérieux lecteur se soit *arrangé* pour apprendre ses leçons.

Nous rappelons enfin qu'il y a précisément $\binom{n}{m}$ applications strictement croissantes de l'ensemble $\llbracket 1, m \rrbracket$ dans l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$ et dans notre cas particulier, il n'y a donc qu'une seule application strictement croissante de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans lui-même.

† L'hypothèse $n \geq 2$ est donc véritablement et définitivement inutile. Tout ce que nous venons de narrer vaut pour tous les entiers naturels du monde, mais bien sûr, si tel ou tel entier est nul, il ne faudra pas avoir le vertige — la peur de l'ensemble vide et de ses affres ! — mais comme nous sommes ici entre grandes personnes...

2. Comme cela se fait fréquemment et plus ou moins officiellement, nous supposons en outre que :

$$X(\Omega) = \mathbb{R}_+^*$$

Il est cependant bon et important d'avoir capté que toute variable aléatoire sur (Ω, \mathcal{A}, p) qui est *presque sûrement* égale à X se voit également qualifiée de variable exponentielle de paramètre 1, mais peut indéniablement avoir une étendue très différente de \mathbb{R}_+^* ...

Autre chose, le texte annonce p dans l'ouvert $]0, 1[$ ce qui, au vu et au su de la future question 5.c, semble être une réelle maladresse. Ainsi, et si cela ne dérange personne, nous annoncerons tout simplement $p > 0$.

a. Compte tenu de notre récente précision concernant $X(\Omega)$ et de la stricte positivité de p , nous pouvons déjà clamer haut et fort que :

$$Y(\Omega) = \mathbb{N}$$

Soit maintenant $k \in \mathbb{N}$. Il suffit de bien connaître l'encadrement standard de la partie entière pour se persuader de l'égalité ensembliste :

$$[Y = k] = [k \leq pX < k + 1]$$

égalité que la *stricte* positivité du réel p transforme immédiatement en :

$$[Y = k] = \left[\frac{k}{p} \leq X < \frac{k+1}{p} \right]$$

Il est dit que X est une authentique variable aléatoire sur (Ω, \mathcal{A}, p) et nous sommes alors tenus de savoir^(*) que :

$$\left[\frac{k}{p} \leq X < \frac{k+1}{p} \right] \in \mathcal{A}$$

En bref, nous avons :

$$[Y = k] \in \mathcal{A}$$

et puisque \mathbb{N} est dénombrable, nous savons que tout cela suffit à justifier que Y est également une *genuine* variable aléatoire discrète sur l'espace (Ω, \mathcal{A}, p) .

Ajoutons alors que X , variable aléatoire à densité, ne charge absolument rien sur son passage et que par conséquent :

$$p(Y = k) = F_X\left(\frac{k+1}{p}\right) - F_X\left(\frac{k}{p}\right)$$

Les deux réels entre parenthèse étant ouvertement positifs ou nuls, notre parfaite connaissance des répartitions exponentielles amène alors après quelques simplifications et autres aménagements à :

$$p(Y = k) = (1 - e^{-1/p})e^{-k/p}$$

b. Nous avons :

$$(Y + 1)(\Omega) = \mathbb{N}^*$$

Soit cette fois $k \in \mathbb{N}^*$. Nous avons sans surprise :

$$p(Y + 1 = k) = p(Y = k - 1) = (1 - e^{-1/p})e^{-(k-1)/p}$$

la dernière égalité procédant à la fois de la positivité de $k - 1$ et de la précédente question. Tout cela permet alors au *physio* d'asséner que :

$$Y + 1 \longleftrightarrow \mathcal{G}(1 - e^{-1/p})$$

c. La *géométrie* de la situation fait que la variable $Y + 1$ possède une espérance et que :

$$E(Y + 1) = \frac{1}{1 - e^{-1/p}}$$

Il en résulte linéairement que Y en possède une aussi et que, tous calculs faits :

$$E(Y) = \frac{1}{e^{1/p} - 1}$$

^(*) Nous sommes en réalité censés ne pas ignorer que, pour tout intervalle I de \mathbb{R} , l'on a $[X \in I] \in \mathcal{A}$.

Nous rappelons alors une très *stricte* classique selon laquelle :

$$\forall u \in \mathbb{R}^* \quad e^u > 1 + u$$

et il devrait très rapidement s'ensuivre que :

$$0 < \frac{1}{p} < e^{1/p} - 1$$

Comme l'inversion est *strictement* décroissante sur \mathbb{R}_+^* , il semble que nous puissions changer de question.

¶ Au cas, très surprenant, où notre lecteur n'aurait jamais croisé la *stricte* classique *supra*, nous lui donnons une idée de route. La fonction \exp ayant la *mega* classe, nos amis Brook et Joseph-Louis assurent dans un élan égalitaire(*) que, pour tout $u \in \mathbb{R}^*$, il existe un réel $c \in]0, u[$ tel que :

$$e^u - 1 - u = \frac{u^2}{2} e^c$$

So...

3.a. Soit r et s deux entiers naturels. Nous ne suivrons pas le *hint* du texte pour deux raisons.

– *Primo*, le changement de variable donné est à l'envers. Dagobert, Dagobert !

– *Deuzio*, les preuves d'existences d'intégrale *via* le principe du changement de variable sont souvent sources de regrettables anachronismes.

Nous optons donc pour une approche plus standard. Selon les théorèmes généraux, et parce que s est un *entier*(**) positif, la fonction :

$$x \mapsto x^r \ln^s x$$

est continue sur le semi-ouvert $]0, 1]$, son intégrale n'est donc impropre qu'une fois et un gentil $x^{1/2}$ -shot devrait tranquillement venir à bout du problème. En effet, selon nos classiques prépondérances, nous avons :

$$x^{r+(1/2)} \ln^s x \xrightarrow[\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}]{} 0$$

la stricte positivité du réel $r + (1/2)$ étant bien sûr sur la scellette et autant dire alors que :

$$x^r \ln^s x = o\left(\frac{1}{x^{1/2}}\right) \quad \text{et} \quad \forall x \in]0, 1] \quad \frac{1}{x^{1/2}} \geq 0$$

Puisque la référence de Riemann :

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}}$$

(*) Nous parlons évidemment de l'égalité de Taylor-Lagrange...

(**) Dans le cas contraire, les *aficionados* des fonctions puissances savent que la fonction \ln^s peut n'être *jamais* définie sur $]0, 1[$!

est connue pour mener une existence paisible, il en est de même de notre intégrale en remerciant cependant le test de prépondérance en signe positif.

b. Soit à nouveau r et s appartenant à \mathbb{N} . Dans l'intégrale :

$$I_{r,s} = \int_0^1 x^r \ln^s x \, dx$$

qui existe depuis peu, et parce que $r + 1$ n'est pas nul, nous suggérons le changement de variable :

$$x = e^{-u}$$

Il ne fait aucun doute que la fonction :

$$u \mapsto e^{-u}$$

réalise une facile bijection de classe \mathcal{C}^1 de l'intervalle $[0, +\infty[$ sur $]0, 1]$ et après un peu de ménage — simplifications, aménagements divers — il résulte déjà du théorème de changement de variable que :

$$I_{r,s} = (-1)^s \int_0^{+\infty} u^s e^{-(r+1)u} \, du$$

Mais attention, vu ce que nous savons de r , le réel $r + 1$ est *strictement* positif et il suffit alors de bien maîtriser ses lois Gamma, plus précisément la loi :

$$\Gamma(s + 1, (r + 1)^{-1})$$

pour en déduire que :

$$\int_0^{+\infty} u^s e^{-(r+1)u} \, du = \frac{\Gamma(s + 1)}{(r + 1)^{s+1}}$$

Oui mais voilà, vu que s est un entier naturel, nul ne peut officiellement ignorer que :

$$\Gamma(s + 1) = s!$$

et il s'ensuit alors effectivement que :

$$I_{r,s} = \frac{(-1)^s s!}{(r + 1)^{s+1}}$$

† Le lecteur perspicace pourra constater que le côté entier naturel de r n'a pas vraiment servi dans la bataille. Il est en effet assez facile de constater que toute notre affaire fonctionne encore en l'état pour tout *real* r strictement supérieur à -1 . En revanche, le côté *integer* de s ...

Partie 1

Nous devons encore une fois rectifier un peu le texte. Il faut savoir en effet qu'il existe des applications T de $X(\Omega)$ dans \mathbb{R} telles que $T(X)$ ne soit *pas* une variable aléatoire.

En conséquence, nous dirons plutôt que la loi d'une variable aléatoire Y est accessible depuis X s'il existe une application T de $X(\Omega)$ dans \mathbb{R} vérifiant les *deux* propriétés suivantes :

- i. La composée $T(X)$ est une variable aléatoire sur (Ω, \mathcal{A}, p) .
- ii. La variable aléatoire $T(X)$ a la même loi que Y .

Autre chose, le texte rappelle l'expression de la densité officielle f_X , mais nous en profitons pour rappeler également celle de la répartition F_X . *Here you are* :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad (\text{RX})$$

4. Vu la rectification que nous venons d'opérer il est nécessaire de causer un peu de problématiques *tribales*. Il résulte de la définition de T_a que :

$$[T_a(X) = 1] = [a < X < a + p] \in \mathcal{A}$$

l'appartenance finale profitant de ce que X est une *réelle* variable aléatoire sur (Ω, \mathcal{A}, p) . Comme l'application $T_a(X)$ ne prend que les deux valeurs 0 et 1 et que les tribus sont stables par complémentation, nous déduisons de tout cela que :

$$[T_a(X) = 1] \in \mathcal{A} \quad \text{et} \quad [T_a(X) = 0] \in \mathcal{A}$$

et $T_a(X)$ gagne ainsi ses galons d'aléa numérique sur (Ω, \mathcal{A}, p) .

a. Il est maintenant autorisé de parler de probabilité et bien entendu :

$$p[T_a(X) = 1] = p[a < X < a + p] = F_X(a + p) - F_X(a)$$

puisque, au risque de radoter, les variables à densité ne chargent absolument rien sur leur passage.

La situation géographique de a stipule que les deux réels a et $a + p$ appartiennent au segment $[0, 1]$ et nous avons pris la peine — égalité (RX) — de rappeler l'expression de la répartition de X . Il devrait alors rapidement en résulter que :

$$F_X(a + p) = a + p \quad \text{et} \quad F_X(a) = a$$

de sorte qu'*in fine* :

$$p[T_a(X) = 1] = p$$

et la fonction T_a transporte donc X vers la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1, p)$.

† Comme il y a vraisemblablement une infinité de valeurs de a autorisées, nous déduisons aisément qu'il y a une infinité de compagnies aériennes assurant la liaison entre X et la loi de Bernoulli de paramètre p . Resterait alors à savoir laquelle est la moins chère...

b. Il est dit que :

$$X(\Omega) =]0, 1[\quad \text{et} \quad T_a(X)(\Omega) = \{0, 1\}$$

Il devrait aisément s'ensuivre que $X - T_a(X)$ est une variable aléatoire *bornée* et, à ce titre, elle possède tous les moments du monde. La fonction de transport T_a possède donc un coût qui, si l'on en croit un certain théorème de transfert, est donné par :

$$C(T_a) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - T_a(x))^2 f_X(x) dx$$

ou encore :

$$C(T_a) = \int_0^1 (x - T_a(x))^2 dx$$

après une évidente et *uniforme* gestion de facettes. Grâce à nos souvenirs de la classe de quatrième et à une gentille linéarisation, il s'avère déjà que :

$$C(T_a) = \int_0^1 x^2 dx - 2 \int_0^1 x T_a(x) dx + \int_0^1 (T_a(x))^2 dx$$

et comme nous avons déjà eu l'occasion de signaler que $[a, a+p] \subset [0, 1]$, l'histoire se facette ensuite en :

$$C(T_a) = \int_0^1 x^2 dx - 2 \int_a^{a+p} x dx + \int_a^{a+p} dx$$

Les trois intégrales sont maintenant très faciles à calculer et tous calculs faits, il se révèle effectivement que :

$$C(T_a) = \frac{1}{3} - 2ap + pq$$

où, fidèles à nos habitudes bernoulliennes, nous avons noté :

$$q = 1 - p$$

c. Comme p est strictement positif et que le réel a est confiné au segment $[0, q]$ la valeur de a qui minimise $C(T_a)$ est ouvertement :

$$a_0 = q$$

et le coût minimal correspondant est alors :

$$C(T_{a_0}) = \frac{1}{3} - pq$$

5. On note tout d'abord que les applications T_1 et T_2 sont parfaitement définies sur l'intervalle ouvert $]0, 1[$ et comme il est précisé que :

$$X(\Omega) =]0, 1[$$

les deux compositions $T_1(X)$ et $T_2(X)$ sont, quant à elles, *farpaitement* définies sur Ω , ce qui est déjà une bonne chose.

a. Prenons nos deux fonctions l'une après l'autre.

– Nous venons déjà d'établir que $T_1(X)$ applique bien Ω dans \mathbb{R} et nous devons maintenant causer de *tribalité* !

Soit donc $x \in \mathbb{R}$. Les croissances respectives de la fonction logarithme sur \mathbb{R}_+^* et de l'exponentielle sur \mathbb{R} permettent, par double inclusion, d'accéder aisément à l'égalité ensembliste :

$$[T_1(X) \leq x] = [X \geq e^{-x}]$$

et puisque X est une *genuine* variable aléatoire sur (Ω, \mathcal{A}, p) , nous en déduisons alors que :

$$[X \geq e^{-x}] \in \mathcal{A}$$

Tout cela démontre donc déjà que $T_1(X)$ est un véritable aléa numérique sur notre espace ce qui est une nouvelle bonne chose.

Nous pouvons désormais parler de probabilité. La variable à densité X n'ayant aucun atome(*), nous revendiquons l'égalité :

$$F_{T_1(X)}(x) = 1 - F_X(e^{-x})$$

et grâce au rappel (RX) *supra* cela devient aisément :

$$F_{T_1(X)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

ce qui permet au *physio* de reconnaître la répartition de la loi exponentielle de paramètre un. Ainsi, la fonction T_1 transporte X vers la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$.

– On démontre *mutatis mutandis* que la fonction T_2 transporte également X vers la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$ et nous ne pouvons que conseiller à notre dévoué lecteur de se charger d'en rédiger les détails.

† Les applications T_1 et T_2 sont bien connues des simulateurs de loi exponentielle. D'ailleurs et en utilisant le vocabulaire de ce texte on démontre dans une *quicky* de l'oral HEC 2012 que T_1 et T_2 sont *les seules* fonctions continues et strictement monotones sur $]0, 1[$ qui transportent X vers la loi $\mathcal{E}(1)$.

b. Allons-y derechef à la queue leu leu !

– En ce qui concerne le coût de T_1 et si l'on en croit le théorème de transfert et en ayant mentalement gommé le superflu, nous devons nous pencher sur l'intégrale :

$$\int_0^1 (x + \ln x)^2 dx$$

Soit alors $x \in]0, 1[$. Depuis l'âge de nos treize ans, nous savons que :

$$(x + \ln x)^2 = x^2 + 2x \ln x + \ln^2 x$$

(*) Les atomes d'une variable aléatoire sont par définition les points qu'elle charge. Ainsi, *no atom, no charge*, même combat !

et il est acquis depuis longtemps que les trois intégrales :

$$\int_0^1 x^2 dx \quad ; \quad \int_0^1 x \ln x dx \quad ; \quad \int_0^1 \ln^2 x dx$$

existent puisque cela est totalement évident pour la première — qui soit dit en passant vaut $1/3$ — et que les deux autres sont respectivement les intégrales $I_{1,1}$ et $I_{0,2}$ de la question 3. Il résulte alors du théorème de linéarité que la fonction T_1 possède(*) bel et bien un coût et qu'en outre :

$$C(T_1) = \frac{1}{3} + 2I_{1,1} + I_{0,2}$$

La question 3.b permet de finir le calcul en douceur et l'on trouve *finalmente* :

$$C(T_1) = \frac{11}{6}$$

— Nous pourrions nous réfugier derrière le magique *mutatis mutandis* mais ce serait peut-être exagérer *un poquitéin*. L'intégrale en jeu est ici :

$$\int_0^1 (x + \ln(1-x))^2 dx$$

et même si nous n'aimons pas trop cela, nous allons, pour une fois, user du délicat principe de changement de variable. La fonction affine :

$$u \mapsto 1 - u$$

réalise allègrement une bijection de classe \mathcal{C}^1 de l'ouvert $]0, 1[$ sur lui-même et du coup les deux intégrales :

$$\int_0^1 (x + \ln(1-x))^2 dx \quad \text{et} \quad \int_0^1 (1-u + \ln u)^2 du$$

sont de même nature et égales de surcroît si la même nature est l'existence. Comme dirait Pierre Albaladejo, les mouches changent donc d'âne et tous les regards se tournent maintenant vers :

$$\int_0^1 (1-u + \ln u)^2 du$$

Soit $u \in]0, 1[$, grâce à la formule du carré d'un trinôme, nous avons cette fois :

$$(1-u + \ln u)^2 = 1 + u^2 + \ln^2 u - 2u + 2 \ln u - 2u \ln u$$

et à partir de là, il n'est pas vraiment outreucidant de « *mutmuter* ». La fonction T_2 possède également un coup et l'on a :

$$C(T_2) = 1 + \frac{1}{3} + I_{0,2} - 1 + 2I_{0,1} - 2I_{1,1}$$

(*) Nous n'avons pas oublié que le théorème de transfert exige de la convergence *absolue* mais vu le signe de notre intégrande...

La question 3.b est de nouveau mise à contribution et l'on trouve alors aisément :

$$C(T_2) = \frac{5}{6}$$

No doubt, dans ces conditions, que l'on a :

$$C(T_2) < C(T_1)$$

c. Soit p un réel de l'ouvert $]0, 1[$ et μ un réel strictement positif. Selon la question précédente et avec l'appui de la question 2, nous savons par exemple(*) que :

$$1 + \lfloor \mu T_2(X) \rfloor \longleftrightarrow \mathcal{G}(1 - e^{-1/\mu})$$

Il suffira alors de tout faire pour réaliser l'égalité :

$$1 - e^{-1/\mu} = p$$

et le tour sera définitivement joué. À bien y regarder, le réel :

$$\mu = -\frac{1}{\ln q}$$

est l'homme de la situation, puisque le nombre $-\ln q$ est bel et bien au carrefour de la *stricte* positivité...

En bref, la fonction :

$$x \mapsto 1 + \left\lfloor -\frac{T_2(x)}{\ln q} \right\rfloor$$

transporte la variable aléatoire X vers la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.

† C'est ici que se confirme la faiblesse des dispositions de la question 2. Sans notre rectification musclée, il eut été impensable de « pécho » toutes les lois géométriques !

6. Nous savons que quoi qu'il arrive :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F_Y(x) = \int_{-\infty}^x f_Y(t) dt$$

et il est dit ici que la densité f_Y est continue sur \mathbb{R} tout entier. Dans ces conditions et selon un toulousain théorème, la fonction F_Y est une primitive sur \mathbb{R} de f_Y . Il en résulte en particulier que F_Y est dérivable sur \mathbb{R} et que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F'_Y(x) = f_Y(x)$$

a. D'après nos très récentes tergiversations, la répartition F_Y est *strictement* croissante sur \mathbb{R} puisqu'elle y est dérivable à dérivée *strictement* positive. Comme elle y est également

(*) Nous aurions pu tout aussi bien choisir T_1 mais, depuis peu, T_2 est un peu moins chère. So...

continue, le théorème de la bijection est formel. L'application F_Y « *bijecte* » allègrement la droite numérique \mathbb{R} sur l'ouvert :

$$\left] \lim_{-\infty} F_Y, \lim_{+\infty} F_Y \right[$$

et comme les limites des fonctions de répartition sont connues comme le *white wolf*...

b. Organisons-nous un petit peu.

– Fonction réciproque oblige, F_Y^{-1} est une application de $]0, 1[$ dans \mathbb{R} et la composition $F_Y^{-1}(X)$ applique donc bien Ω dans \mathbb{R} vu que, au risque de radoter, il a été précisé que :

$$X(\Omega) =]0, 1[$$

– Soit $x \in \mathbb{R}$. La croissance sur \mathbb{R} de F_Y et celle, congénitale, de sa réciproque sur l'ouvert $]0, 1[$, justifient de concert et par double inclusion l'égalité :

$$\left[F_Y^{-1}(X) \leq x \right] = \left[X \leq F_Y(x) \right]$$

Nous commençons à bien connaître les chants *tribaux*. Vu les origines ethniques, de la variable X il ne fait aucun doute que :

$$\left[X \leq F_Y(x) \right] \in \mathcal{A}$$

ce qui permet à l'application $F_Y^{-1}(X)$ de revendiquer son titre de variable aléatoire sur l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

– Nous sommes désormais autorisés à causer de probabilité et sans l'intention de ne blesser personne nous assénons que :

$$F_{F_Y^{-1}(X)}(x) = F_X(F_Y(x))$$

Oui mais voilà, le réel $F_Y(x)$ est assurément situé dans l'ouvert $]0, 1[$ et notre sympathique égalité (RX) transforme gentiment cela en :

$$F_{F_Y^{-1}(X)}(x) = F_Y(x)$$

Les deux variables aléatoires $F_Y^{-1}(X)$ et Y ont ainsi la même fonction de répartition et par conséquent la même loi de probabilité, chronique d'un transport *routinier* annoncé...

† Nous avons dit *routinier* car la chose est plutôt classique et bien connue des simulateurs de tous bords.

Le texte, sûrement pour simplifier la donne, s'est volontairement limité aux variables aléatoires Y dont la répartition est continue et strictement croissante sur \mathbb{R} , ce qui présente l'avantage non négligeable de disposer de la fonction réciproque F_Y^{-1} .

Il est cependant bon de savoir que, pour *n'importe quelle* variable aléatoire U définie sur notre $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, il existe une fonction Q_U appelée « fonction quantile » de U qui transporte remarquablement la variable uniforme X du texte vers la loi de U !

La conclusion de la question 5.c n'est donc plus vraiment surprenante. En réalité toutes les lois de la galaxie sont *quantilment* accessibles depuis $X \dots$

7. Curieux, n'est-il pas, de noter F_Y la fonction de Gauss notée Φ sous toutes les latitudes, et si personne n'y voit d'inconvénient, nous adopterons la notation planétaire. Nous rappelons aussi, une fois n'est pas coutume, que la répartition Φ possède une classe idyllique — la classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} — et que :

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad \Phi'(y) = \varphi(y) = \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$$

puisque le texte a traditionnellement et fort heureusement noté φ , celle des densités de Y qui a la bonté d'être *continue* sur \mathbb{R} tout entier.

Signalons enfin que φ est à valeurs strictement positives sur \mathbb{R} , ce qui nous place au cœur du contexte de la question précédente et nous pouvons alors attaquer.

a. Vu ce que nous venons de narrer, la fonction :

$$y \longmapsto y \Phi(y) \varphi(y)$$

est continue sur $] -\infty, +\infty[$ et l'intégrale proposée est impropre deux fois. Nous devons donc étudier séparément :

$$\int_0^{+\infty} y \Phi(y) \varphi(y) dy \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^0 y \Phi(y) \varphi(y) dy$$

– En ce qui concerne la première, puisque :

$$\Phi(y) \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} 1$$

nous faisons simplement valoir que :

$$y \Phi(y) \varphi(y) \underset{y \rightarrow +\infty}{\sim} y \varphi(y) \quad ; \quad \forall y \geq 0 \quad y \varphi(y) \geq 0$$

Les variables gaussiennes sont bien connues pour posséder tous les moments du monde, voilà donc qu'en particulier l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} y \varphi(y) dy$$

existe et nous disposons sur le marché d'un test dit d'équivalence en signe positif. Nous pouvons donc passer à la seconde.

– Nous savons bien sûr que :

$$\Phi(y) \xrightarrow{y \rightarrow -\infty} 0$$

et par conséquent nous avons cette fois :

$$y \Phi(y) \varphi(y) = o(|y| \varphi(y)) \quad ; \quad \forall y \leq 0 \quad |y| \varphi(y) \geq 0$$

les valuations étant ici présentes pour se prémunir des affres, parfois douloureuses, de la négativité. Il semble, il y a un *moment*, que nous avons rappelé pourquoi l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^0 |y| \varphi(y) dy$$

existe et sur le marché il y a également un test de prépondérance en signe positif. So...

Passons alors à la *integración por partes*. Nous considérons à cet effet les fonctions :

$$u : y \mapsto \Phi(y) \quad \text{et} \quad v : y \mapsto -\varphi(y)$$

Classe idyllique oblige, elles sont de classe C^1 sur \mathbb{R} et l'on a sans ambages :

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad u'(y) = \varphi(y) \quad \text{et} \quad v'(y) = y \varphi(y)$$

En outre, et sans aucune indétermination, le produit :

$$uv : y \mapsto -\Phi(y) \cdot \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$$

possède, en plus et en moins l'infini, la limite finie zéro. Il résulte alors du théorème d'intégration impropre(*) *by parts* que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y \Phi(y) \varphi(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2(y) dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy$$

À bien y regarder l'intégrale du *very right hand side* a quelque complicité avec la loi normale $\mathcal{N}(0, 1/2)$ et nul ne peut ainsi ignorer que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}$$

Le texte a donc bien raison ! Nous avons bel et bien :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y \Phi(y) \varphi(y) dy = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$$

b. Il s'agit d'une intégrale visiblement impropre que deux fois et nous allons procéder tranquillement par *segmentation*. Soit pour cela $y \in \mathbb{R}$. Le balbutiant *teenager* nous apprend que :

$$(y - \Phi(y))^2 \varphi(y) = y^2 \varphi(y) - 2y \Phi(y) \varphi(y) + \Phi^2(y) \varphi(y)$$

et nous faisons valoir que :

(*) Nous rappelons que l'impétrant n'a officiellement pas droit à cette pépite ! Il est condamné à une double partialisation...

– l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 \varphi(y) dy$$

existe depuis un bon *moment*, « même que(*) » elle vaut un, puisque Y est *centrée* et *réduite* ;

– nous venons à l'instant de justifier l'existence de :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y \Phi(y) \varphi(y) dy$$

et nous avons aussi exhibé sa valeur ;

– reste à causer de la troisième frangine, en l'occurrence :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi^2(y) \varphi(y) dy$$

La fonction intérieure admet une très providentielle primitive sur \mathbb{R} en la personne de :

$$y \mapsto \frac{\Phi^3(y)}{3}$$

et cette dernière admet, en plus l'infini et en moins l'infini, les gentilles limites finies respectives $1/3$ et 0 . Le test de la primitive est alors formel, la troisième *sister* existe et si l'on en croit Issac Barrow, elle vaut $1/3$.

Le théorème de linéarité ne fait plus qu'une bouchée de l'affaire. Notre intégrale existe fort bien et l'on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (y - \Phi(y))^2 \varphi(y) dy = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} - \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

la dernière égalité procédant d'une simple réduction au même dénominateur. Notons d'ailleurs qu'à la lecture de la question suivante, cela a un parfum plutôt agréable...

c. Nous commençons à avoir l'habitude. L'intégrale au cœur du débat est :

$$\int_0^1 (x - \Phi^{-1}(x))^2 dx$$

et nous allons encore une fois nous laisser tenter par le théorème du changement de variable. Étant donné que la fonction :

$$y \mapsto \Phi(y)$$

réalise une bijection de classe \mathcal{C}^1 de \mathbb{R} sur l'ouvert $]0, 1[$, nous ne pouvons pas ignorer que les deux intégrales :

$$\int_0^1 (x - \Phi^{-1}(x))^2 dx \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} (\Phi(y) - y)^2 \varphi(y) dy$$

(*) Comme on dit dans les cours de récré !

sont de même nature et fatalement égales en cas d'existence. Or, il se trouve que depuis peu, la seconde existe et vaut précisément :

$$\frac{4}{3} - \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

Nous pouvons donc définitivement changer de partie.

Partie 2

8.a. Soit k et ℓ deux éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Puisque les deux suites (d_i) et (a_i) sont croissantes, nous avons quoi qu'il arrive :

$$(d_\ell - d_k)(a_\ell - a_k) \geq 0$$

d'où il ressort immédiatement que :

$$d_\ell a_\ell + d_k a_k \geq d_k a_\ell + d_\ell a_k \quad (0)$$

ce qui est presque mieux, ou du moins la même chose, que ce qui nous est demandé.

† Les croissances *strictes* des suites (d_i) et (a_i) ne servent à rien dans cette première histoire et nous pensons que ce n'est pas fini.

† Dans le cas de deux suites (d_i) et (a_i) décroissantes larges, l'inégalité (0) reste d'actualité en l'état, mais en revanche, si nos de suites sont de monotonies larges opposées, l'inégalité reste encore d'actualité à la condition expresse qu'on la renverse, comme certaines crèmes parfois...

b. Soit (p_1, \dots, p_n) un *convecteur*(*) de \mathbb{R}^n , c'est-à-dire un de ces vecteur de \mathbb{R}_+^n vérifiant :

$$\sum_{k=1}^n p_k = 1$$

Soit également et à nouveau deux entiers k et ℓ appartenant à $\llbracket 1, n \rrbracket$ et repartons des conclusions de la précédente question selon lesquelles :

$$d_\ell a_\ell + d_k a_k \geq d_k a_\ell + d_\ell a_k$$

Mutiplions maintenant par le positif $p_k p_\ell$ ce qui nous amène à :

$$p_k p_\ell d_\ell a_\ell + p_k d_k a_k p_\ell \geq p_k d_k p_\ell a_\ell + p_\ell d_\ell p_k a_k$$

en ayant choisi de positionner efficacement les différents protagonistes. Ajoutons alors gaiement, les entiers k et ℓ se dandinant de 1 à n . La linéarité de la sommation autorise ainsi à en déduire que :

$$\left(\sum_{k=1}^n p_k \right) \sum_{\ell=1}^n p_\ell d_\ell a_\ell + \left(\sum_{\ell=1}^n p_\ell \right) \sum_{k=1}^n p_k d_k a_k \geq 2 \left(\sum_{k=1}^n p_k d_k \right) \left(\sum_{\ell=1}^n p_\ell a_\ell \right)$$

(*) Nous les appelons ainsi à cause du rôle crucial qu'ils jouent dans la théorie de la convexité.

le doublement du *right hand side* reposant sur l'évidente égalité :

$$\left(\sum_{\ell=1}^n p_{\ell} d_{\ell} \right) \left(\sum_{k=1}^n p_k a_k \right) = \left(\sum_{k=1}^n p_k d_k \right) \left(\sum_{\ell=1}^n p_{\ell} a_{\ell} \right)$$

le rôle virtuel des *ghosts* étant à maîtriser en toutes circonstances ! Comme il est dit en outre que :

$$\sum_{k=1}^n p_k = \sum_{\ell=1}^n p_{\ell} = 1$$

ça double également — et derechef de façon *ghostique* — sur le côté gauche, à telle enseigne que nous avons *finalmente* :

$$2 \sum_{k=1}^n p_k d_k a_k \geq 2 \left(\sum_{k=1}^n p_k d_k \right) \left(\sum_{\ell=1}^n p_{\ell} a_{\ell} \right)$$

et comme 2 est ici *strictement* positif(*), il s'en déduit effectivement que :

$$\sum_{k=1}^n p_k d_k a_k \geq \left(\sum_{k=1}^n p_k d_k \right) \left(\sum_{\ell=1}^n p_{\ell} a_{\ell} \right)$$

† Cette inégalité est due à Pafnuti Tchebycev, mais sans son compère Irénée-Jules pour une fois. Elle fonctionne en réalité, comme nous venons de le voir, pour deux suites (a_i) et (d_i) monotones *larges* de même sens. Lorsque l'on a affaire à deux suites monotones larges de sens opposés, il est facile de constater qu'elle ne fait que se renverser comme la crème *supra*.

9. Nous allons commencer par deux lemmes, le premier étant bien connu des *aficionados* des suites *strictement* croissantes d'*integers*.

LEMME CROISSANCE STRICTE D'ENTIERS :

Soit m un entier appartenant à $\llbracket 1, n \rrbracket$ et $(i_k)_{k \in \llbracket m, n \rrbracket}$ une suite strictement croissante d'entiers inférieurs ou égaux à n . On a alors :

$$\forall k \in \llbracket m, n \rrbracket \quad i_k \leq k$$

La preuve se fait assurément par récurrence descendante finie sur k , l'argument *intégralement* au cœur du débat étant le suivant. Lorsque k et h sont deux entiers quelconques, on a l'implication :

$$h < k \implies h \leq k - 1$$

implication dans laquelle, contrairement à ce que nous a fait le texte depuis le début, il est important de bien maîtriser le *strict vs large*. Nous laissons bien sûr à notre dévoué lecteur le soin de peaufiner les détails de cette très classique induction.

(*) Nous ne plaisantons pas ! Lors du sujet de l'année 2004 de la même école, 2 était nul, et je connais personnellement certains étudiants de l'époque qui ne s'en sont toujours pas remis...

LEMME À TRIBORD TOUTE :

Soit :

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

une suite finie de réels quelconques que l'on suppose triée en croissant. On a donc :

$$\alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_n$$

Soit m appartenant à $\llbracket 1, n \rrbracket$ et :

$$(\alpha_{i_m}, \dots, \alpha_{i_n})$$

une sous-suite de la liste α , ce qui, sous-liste oblige, impose par définition que :

$$1 \leq i_m < \dots < i_n \leq n$$

On a alors :

$$\alpha_{i_m} + \dots + \alpha_{i_n} \leq \alpha_m + \dots + \alpha_n$$

Autrement dit, parmi les sommes de $n - m + 1$ termes(*) issus de la liste α , la plus maousse costaud est celle qui est bloquée à la very droite c'est-à-dire à tribord toute !

LA PREUVE :

Vu ce que nous devons justifier, on peut raisonnablement avoir le sentiment d'enfoncer des portes déjà grandes ouvertes, mais comme certaines « évidences » peuvent parfois se révéler retorses, nous sommes prêts à consentir un petit effort.

Soit k appartenant à $\llbracket m, n \rrbracket$. Selon le premier lemme nous avons :

$$i_k \leq k$$

et comme la liste α est croissante, l'on a également :

$$\alpha_{i_k} \leq \alpha_k$$

Il ne reste alors plus qu'à ajouter membre à membre, l'entier k se dandinant de m à n .

† Notre perspicace lecteur n'aura aucun mal, ni à imaginer, ni à prouver un lemme du *babord toute*. Nous lui faisons confiance.

Il est maintenant temps de revenir à nos petits ovins.

a. Soit $m \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Nous commençons par trier en croissant la sous-liste :

$$(t(m), \dots, t(n))$$

L'on obtient ainsi une sous-liste de longueur $n - m + 1$ de la liste triée totale \hat{t} , sous liste que nous notons :

$$(\hat{t}(i_m), \dots, \hat{t}(i_n))$$

(*) Quand on se déplace de m à n , il y a $n - m + 1$ termes. C'est un émouvant souvenir d'arbres et d'intervalles...

où, comme nous l'avons déjà indiqué, l'on a bien sûr :

$$1 \leq i_m < \dots < i_n \leq n$$

Puisqu'il n'y a eu rien d'autre qu'un simple tri, il est bien sûr évident que :

$$\sum_{k=m}^n a_{t(k)} = \sum_{k=m}^n a_{\hat{t}(i_k)}$$

et la fin de l'histoire passe par l'application du deuxième lemme à la liste :

$$\alpha = (a_{\hat{t}(1)}, \dots, a_{\hat{t}(n)})$$

qui à bien y regarder, n'est autre que la composée :

$$\alpha = a \circ \hat{t}$$

et dont l'indispensable croissance résulte, sans souci, de celles des deux copines a et \hat{t} .

b. Puisque l'on a donné un sens à d_0 et d'après la formule d'inversion des sommations, nous pouvons écrire :

$$\sum_{m=1}^n (d_m - d_{m-1}) \sum_{k=m}^n a_{t(k)} = \sum_{k=1}^n a_{t(k)} \sum_{m=1}^k (d_m - d_{m-1})$$

la liaison de curseurs étant bien sûr tranquillement gérée, et un sympathique télescope vient alors à bout de l'affaire puisqu'il a été décrété que d_0 est nul.

c. Soit $m \in \llbracket 1, n \rrbracket$. La pénultième question a révélé que :

$$\sum_{k=m}^n a_{t(k)} \leq \sum_{k=m}^n a_{\hat{t}(k)}$$

et la nouvelle suite (d_i) — celle qui démarre à zéro — est tout aussi croissante que l'ancienne. On peut alors multiplier par le désormais positif $d_m - d_{m-1}$ et ajouter dans la foulée, l'entier m baguenodant de 1 à n . Il devrait ainsi rapidement s'ensuire que :

$$\sum_{m=1}^n (d_m - d_{m-1}) \sum_{k=m}^n a_{t(k)} \leq \sum_{m=1}^n (d_m - d_{m-1}) \sum_{k=m}^n a_{\hat{t}(k)}$$

Le *left hand side* est depuis peu égal à :

$$\sum_{m=1}^n d_n a_{t(n)}$$

Concernant le *right*, nous décidons d'appliquer le récent b après avoir pris soin, en toute légalité bien entendu, d'y remplacer l'application t par sa cousine \hat{t} et voilà ainsi que :

$$\sum_{m=1}^n (d_m - d_{m-1}) \sum_{k=m}^n a_{\hat{t}(k)} = \sum_{m=1}^n d_n a_{\hat{t}(n)}$$

Tout cela, du moins nous l'espérons, devrait satisfaire tout le monde !

† Nous observons encore une fois que les *strictes* croissances des suites (a_i) et (d_i) n'ont toujours aucune utilité...

† L'inégalité (2) est également une célébrité. Dans la littérature elle s'appelle « inégalité de réordonnement » ou « inégalité de réarrangement ».

10. Les ensembles de ce texte ont n éléments la plupart du temps. Nous sommes alors d'accord pour supposer, mais dans cette question uniquement, que l'on a :

$$a_1 < \dots < a_n \quad \text{et} \quad d_1 < \dots < d_n \quad (\text{BV})$$

à telle enseigne que l'on aura du coup :

$$|D| = |A| = n$$

Soit T un programme de transport. Le potache ressort ses identités remarquables, il linéarise un *chouïa* et voilà que :

$$C(T) = \sum_{k=1}^n d_k^2 - 2 \sum_{k=1}^n d_k T(d_k) + \sum_{k=1}^n T^2(d_k)$$

Comme T est une bijection de D sur A , il existe une application $t \in \mathcal{E}_n$ réalisant l'égalité de listes :

$$(T(d_1), \dots, T(d_n)) = (a_{t(1)}, \dots, a_{t(n)})$$

application t qui, grâce à notre bon vouloir (BV) *supra*, se trouve être ici une bijection dont la réordonnée \hat{t} n'est autre que l'identité. Il résulte alors de tout cela ainsi que de la récente question *c* que d'une part :

$$\sum_{k=1}^n T^2(d_k) = \sum_{k=1}^n a_{t(k)}^2 = \sum_{k=1}^n a_k^2 = \sum_{k=1}^n \hat{T}^2(d_k)$$

et que d'autre part :

$$\sum_{k=1}^n d_k T(k) = \sum_{k=1}^n d_k a_{t(k)} \leq \sum_{k=1}^n d_k a_{\hat{t}(k)} = \sum_{k=1}^n d_k a_k = \sum_{k=1}^n d_k \hat{T}(k)$$

et tout cela sans autre d'explication bien sûr puisque $\hat{t} = \text{Id}$.

Il s'ensuit alors très tranquillement que :

$$C(T) \geq \sum_{k=1}^n d_k^2 - 2 \sum_{k=1}^n d_k \hat{T}(d_k) + \sum_{k=1}^n \hat{T}^2(d_k)$$

C'est maintenant le moment de linéariser derechef et de réveiller le collégien de sa sieste pour effectivement revendiquer :

$$C(T) \geq C(\hat{T})$$

11. Soit X une variable aléatoire ne prenant qu'un nombre fini de valeurs. À la surprise générale nous noterons $n \geq 1$ ce nombre fini, nous noterons également x_1, \dots, x_n ces fameuses valeurs, tout en les supposant triées de telle sorte que :

$$x_1 < \dots < x_n$$

En outre, et pour parachever l'édifice, il sera décidé que, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, l'on ait :

$$p(X = x_k) = p_k$$

Signalons enfin que toutes les variables aléatoires que nous allons rencontrer ne vont prendre qu'un nombre fini de valeurs et ce ne sera donc pas la *moment* de trop se prendre la tête...

a. D'après le théorème de transfert, nous avons :

$$E(Xh(X)) = \sum_{k=1}^n p_k x_k h(x_k)$$

et nous mettons l'accent sur les réalités suivantes :

– il a déjà été précisé que :

$$x_1 < \dots < x_n$$

– comme h est croissante sur \mathbb{R} , nous avons également :

$$h(x_1) \leq \dots \leq h(x_n)$$

– loi de probabilité oblige, nous avons enfin :

$$(p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}_+^n \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^n p_k = 1$$

Tout est alors en place pour appliquer l'inégalité (1) de Pafnuti, en laissant au lecteur le soin de deviner les suites (a_i) et (d_i) que nous avons choisies. Il s'ensuit ainsi que :

$$E(Xh(X)) \geq \left(\sum_{k=1}^n p_k x_k \right) \left(\sum_{k=1}^n p_k h(x_k) \right)$$

ce qui s'écrit effectivement :

$$E(Xh(X)) \geq E(X)E(h(X))$$

† Cette inégalité est un cas très particulier d'une fameuse inégalité probabiliste appelée inégalité FKG du nom de ses auteurs Fortuin, Kasteleyn et Ginibre.

† La suite $(h(x_i))$ n'a aucune raison d'être *strictement* croissante et nous avons donc eu raison d'aménager un peu l'inégalité de Tchebycev. Tout cela est assez regrettable...

b. En ouvrant correctement les mirettes, l'inégalité précédente peut également s'écrire :

$$\text{cov}(X, h(X)) \geq 0$$

Du coup, si les variances de X et $h(X)$ sont non nulles, il s'en déduit(*) que :

$$\rho_{X, h(X)} \geq 0$$

c. Nous conservons bien entendu les notations mises en place dans notre chapeau du début de question, en y ajoutant ici que :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad x_k = k \quad \text{et} \quad p_k = \frac{1}{n}$$

Cependant, pour coller exactement au texte, nous ne remplacerons pas les x_k par leur vrai visage et nous écrirons donc :

$$\mathbb{E}(h(X)t(X)) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n h(x_k)x_{t(k)}$$

ainsi que :

$$\mathbb{E}(h(X)\hat{t}(X)) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n h(x_k)x_{\hat{t}(k)}$$

Vu que :

$$x_1 < \dots < x_n \quad \text{et} \quad h(x_1) \leq \dots \leq h(x_n)$$

et que t appartient à \mathcal{E}_n , la question 9.c et son inégalité (2) sont formelles. Nous avons bien :

$$\mathbb{E}(h(X)t(X)) \leq \mathbb{E}(h(X)\hat{t}(X))$$

et nous pouvons donc changer de partie.

Partie 3

12. Nous commençons par rappeler que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \lfloor 1 + x \rfloor = 1 + \lfloor x \rfloor$$

égalité qui montre que l'athermique réel 1 peut, au choix, se placer à l'intérieur ou à l'extérieur de la partie entière et nous aurons d'ailleurs tendance à le placer plutôt à l'extérieur. Poursuivons.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il est assez clair que X_n applique bien Ω dans \mathbb{R} et nous allons tout d'abord nous pencher sur les valeurs qu'elle veut bien prendre.

(*) Comme cochon !

Soit donc $\omega \in \Omega$. Facettes obligent, nous nous organisons en conséquence.

- Si $0 \leq U(\omega) < 1$, nous avons :

$$0 \leq nU(\omega) < n$$

et comme n est un *integer*, il ne fait aucun doute que :

$$0 \leq \lfloor nU(\omega) \rfloor \leq n - 1$$

Il s'avère donc, dans ce premier cas, que :

$$X_n(\omega) \in \llbracket 1, n \rrbracket$$

- Si $U(\omega) = 1$, il est dit que $X_n(\omega) = n$.

Nous pouvons ainsi conclure que l'application X_n prend ses valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ et nous pouvons alors véritablement attaquer.

a. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et organisons-nous à nouveau :

- si $k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$, nous avons tour à tour :

$$\lfloor X_n = k \rfloor = \lfloor \lfloor nU \rfloor = k - 1 \rfloor = \lfloor k - 1 \leq nU < k \rfloor = \left[\frac{k-1}{n} \leq U < \frac{k}{n} \right]$$

puisque nous maîtrisons totalement et *entièrement* la situation et que la facette basse de l'application X_n n'a pas ici droit de cité.

- si $k = n$, il y a en revanche, mais à l'évidence, deux *disjointes* possibilités se traduisant par les égalités :

$$\lfloor X_n = n \rfloor = \lfloor n - 1 \leq nU < n \rfloor \cup \lfloor U = 1 \rfloor = \left[\frac{n-1}{n} \leq U \leq 1 \right]$$

qui ne nécessitent aucune explication supplémentaire.

Comme U est une *genuine* variable aléatoire sur l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, nous devons savoir que les ensembles :

$$\left[\frac{k-1}{n} \leq U < \frac{k}{n} \right] \text{ où } k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket \quad \text{et} \quad \left[\frac{n-1}{n} \leq U \leq 1 \right]$$

appartiennent à la tribu \mathcal{A} et il en ressort que :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \lfloor X_n = k \rfloor \in \mathcal{A}$$

à telle enseigne que X_n est désormais une variable aléatoire sur notre espace. Il est désormais possible et fortement recommandé de passer aux probabilités.

Soit donc à nouveau $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Comme la variable aléatoire U ne charge personne sur son passage, nous nous permettons d'asséner que les deux cas précédents peuvent *probablement* se recoller et nous avons alors :

$$\mathbb{P}(X_n = k) = F_U\left(\frac{k}{n}\right) - F_U\left(\frac{k-1}{n}\right)$$

Les deux réels k/n et $(k-1)/n$ appartiennent à coup sûr au segment $[0, 1]$ et la fonction de répartition de U est exactement la même que celle de sa cousine germaine X rencontrée en début de texte et donc définie par la fameuse (RX) de l'époque. Autant dire alors que :

$$F_U\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{k}{n} \quad \text{et} \quad F_U\left(\frac{k-1}{n}\right) = \frac{k-1}{n}$$

et il en ressort *in fine* que :

$$p(X_n = k) = \frac{1}{n}$$

En bref, la variable aléatoire X_n suit la loi uniforme sur $[[1, n]]$, ce que nous résumons en :

$$X_n \longleftrightarrow \mathcal{U}_{[[1, n]]}$$

b. La fonction g étant de classe C^1 sur le segment $[0, 1]$, elle y est largement justiciable de l'inégalité des accroissements finis et nous pouvons alors tranquillement affirmer que :

$$\forall x \in [0, 1] \quad \forall y \in [0, 1] \quad |g(x) - g(y)| \leq \max_{[0,1]} |g'| \cdot |x - y|$$

inégalité que nous gardons précieusement sur le feu. Soit maintenant et à nouveau $n \in \mathbb{N}^*$ et $\omega \in \Omega$. Si l'on note :

$$X_n(\omega) = k$$

il résulte de nos tribulations précédentes que dans les deux cas, l'on a toujours :

$$\frac{k-1}{n} \leq U(\omega) \leq \frac{k}{n}$$

ce qui devrait impliquer que :

$$\left|U(\omega) - \frac{k}{n}\right| \leq \frac{1}{n}$$

ou encore :

$$\left|U(\omega) - \frac{X_n(\omega)}{n}\right| \leq \frac{1}{n}$$

Grâce à l'inégalité qui mijote et aux idylliques positions géographiques des uns et des autres nous pouvons revendiquer :

$$|Z(\omega) - Y_n(\omega)| \leq \max_{[0,1]} |g'| \cdot \left|U(\omega) - \frac{X_n(\omega)}{n}\right|$$

puisque :

$$g(U(\omega)) = Z(\omega) \quad \text{et} \quad g\left(\frac{X_n(\omega)}{n}\right) = Y_n(\omega)$$

et il en ressort transitivement et positivement que :

$$|Z(\omega) - Y_n(\omega)| \leq \max_{[0,1]} |g'| \cdot \frac{1}{n}$$

On propose alors :

$$\lambda = \max_{[0,1]} |g'| + 1$$

qui est bien un réel *strictement* positif indépendant de n et l'on a bien sûr :

$$|Z(\omega) - Y_n(\omega)| \leq \frac{\lambda}{n}$$

† Nous avons ajouté 1 au réel $\max |g'|$ pour obtenir un réel λ *strictement* positif puisque tel doit être le réel exigé par le texte. Reste à savoir si cette stricte positivité aura dans les minutes à venir un rôle crucial. Affaire à suivre...

c. Soit encore $n \in \mathbb{N}^*$ et $y \in \mathbb{R}$. La variable aléatoire Y étant à densité elle ne charge rien de rien et donc

$$F_Y\left(y - \frac{\lambda}{n}\right) = \mathbb{P}\left(Y < y - \frac{\lambda}{n}\right) = \mathbb{P}\left(Z + \frac{\lambda}{n} < y\right)$$

la dernière égalité profitant essentiellement de ce que la variable Z a par hypothèse la même loi que Y . Oui mais voilà, la précédente question nous a appris que :

$$|Z - Y_n| \leq \frac{\lambda}{n} \quad \text{i.e.} \quad -\frac{\lambda}{n} \leq Z - Y_n \leq \frac{\lambda}{n}$$

d'où il découle en particulier que :

$$Y_n \leq Z + \frac{\lambda}{n}$$

Il s'ensuit alors quasi mentalement que :

$$\left[Z + \frac{\lambda}{n} < y\right] \subset [Y_n < y]$$

et l'importante croissance de la probabilité termine allègrement l'affaire.

13. Soit *again* $n \in \mathbb{N}^*$. Comme :

$$X_n(\Omega) = [1, n]$$

les dispositions du texte, en l'occurrence :

$$\forall k \in [1, n] \quad t_n(k) = g\left(\frac{k}{n}\right)$$

font évidemment que :

$$Y_n(\Omega) = \left\{t_n(1), \dots, t_n(n)\right\}$$

où, une fois n'est pas coutume, il peut y avoir « de la répétition » entre les accolades. En outre, comme le chapeau ne fait que mettre de l'ordre, nous avons également :

$$Y_n(\Omega) = \left\{\hat{t}_n(1), \dots, \hat{t}_n(n)\right\}$$

et il existe bien sûr une *permutation* (i_1, \dots, i_n) des entiers de la liste $(1, \dots, n)$ telle que :

$$\forall r \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \hat{t}_n(r) = g\left(\frac{i_r}{n}\right)$$

a. Soit alors $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. L'inégalité de gauche provient immédiatement de la précédente en y choisissant :

$$y = \hat{t}_n(k)$$

Quant à celle de droite, elle repose sur la facile inclusion :

$$[Y_n < \hat{t}_n(k)] \subset [X_n \in \{i_1, \dots, i_{k-1}\}]$$

que nous justifions sur-le-champ.

Soit donc $\omega \in [Y_n < \hat{t}_n(k)]$ et supposons par l'absurde que :

$$X_n(\omega) \notin \{i_1, \dots, i_{k-1}\}$$

Il devrait alors exister un entier $r \in \llbracket k, n \rrbracket$ tel que $X_n(\omega) = i_r$ et l'on aurait du coup $Y_n(\omega) = \hat{t}_n(r)$ ce qui, puisque r est supérieur ou égal à k , impliquerait :

$$Y_n(\omega) \geq \hat{t}_n(k)$$

inégalité intolérable vu que, dès le départ, nous avons supposé :

$$Y_n(\omega) < \hat{t}_n(k)$$

Nous avons donc bien :

$$[Y_n < \hat{t}_n(k)] \subset [X_n \in \{i_1, \dots, i_{k-1}\}]$$

La croissance de la probabilité prend alors le relais en révélant que :

$$p(Y_n < \hat{t}_n(k)) \leq p\left(\bigcup_{r=1}^{k-1} [X_n = i_r]\right)$$

C'est alors l'inégalité de Boole(*) qui permet d'enchaîner, puisqu'elle affirme que :

$$p\left(\bigcup_{r=1}^{k-1} [X_n = i_r]\right) \leq \sum_{r=1}^{k-1} p(X_n = i_r)$$

et comme, uniformité oblige, les $p(X_n = i_r)$ sont tous égaux à $1/n$, il semble transitivement s'ensuire que :

$$p(Y_n < \hat{t}_n(k)) \leq \frac{k-1}{n}$$

(*) La probabilité d'une réunion d'événements est, quoi qu'il arrive, inférieure ou égale à la somme de leurs probabilités.

Nous avons donc assurément :

$$p(Y_n < \hat{t}_n(k)) < \frac{k}{n}$$

mais nous faisons la petite observation que voici.

↑ L'inégalité *stricte* entre Y_n et $\hat{t}_n(k)$ est de la plus haute importance et vraiment bien vue. En revanche la *stricte* entre $p(Y_n < \hat{t}_n(k))$ et k/n semble plutôt relever du gaspillage comme nous n'allons pas tarder à le constater. Le *strict versus large* continue donc à flotter sur la marmite et nous ne pouvons malheureusement que le déplorer...

b. Nous commençons, *as usual*, par apporter un peu d'eau fraîche à notre moulin. La densité f_Y est donnée *continue* sur le segment $[\alpha, \beta]$ et le théorème de Darboux est alors formel. La répartition F_Y est, sur notre segment, une primitive de f_Y , elle y est donc en particulier dérivable et l'on a :

$$\forall x \in [\alpha, \beta] \quad F'_Y(x) = f_Y(x) > 0$$

la stricte positivité finale faisant également partie des textuelles hypothèses. Nous sommes alors tenus de savoir que F_Y est continue et *strictement* croissante sur $[\alpha, \beta]$ et un important et *monotone* théorème assure ainsi qu'elle réalise une bijection de $[\alpha, \beta]$ sur le segment $[F_Y(\alpha), F_Y(\beta)]$. En outre et *because* f_Y est nulle en dehors de notre segment, nous revendiquons :

$$F_Y(\alpha) = \int_{-\infty}^{\alpha} f_Y(t) dt = 0$$

puis :

$$F_Y(\beta) = \int_{-\infty}^{\beta} f_Y(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(t) dt = 1$$

Bref, la *restriction* de la fonction F_Y au segment $[\alpha, \beta]$ est une bijection de ce dernier sur le segment $[0, 1]$ et nous tâcherons de nous en souvenir !

↑ Tout d'abord et pour alléger un peu, nous décidons de noter S le segment $[\alpha, \beta]$. Nous observons maintenant que le texte ose noter F_Y^{-1} la réciproque de notre restriction à S ce qui est totalement abusif et insidieux, pour nos amis candidats j'entends, pour la simple et bonne raison que F_Y^{-1} n'existe pas le moins du monde ! Du coup, et si cela ne dérange personne, nous noterons :

$$F_{Y|S}$$

la restriction en question et nous préférons noter Q sa réciproque d'autant que les initiés pourront aisément constater qu'il s'agit exactement de la fonction *quantile* de la variable aléatoire Y .

Nous résumons nos nouvelles dispositions en rappelant que schématiquement :

$$F_{Y|S} : [\alpha, \beta] \longrightarrow [0, 1] \quad \text{et} \quad Q : [0, 1] \longrightarrow [\alpha, \beta]$$

et que :

$$\forall u \in [0, 1] \quad F_{Y|S} \circ Q(u) = u \quad \text{et} \quad \forall x \in [\alpha, \beta] \quad Q \circ F_{Y|S}(x) = x$$

†† Le lecteur *réciroquement curieux* pourra, si cela l'amuse, découvrir cependant que :

$$\forall u \in [0, 1] \quad F_Y \circ Q(u) = u$$

alors que, généralement :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad Q \circ F_Y(x) \neq x$$

ce qui, s'il en était encore besoin, confirme que Q n'est pas l'immonde F_Y^{-1} et que l'amalgame entre F_Y et sa restriction $F_{Y|S}$ relevait plutôt du...

Revenons maintenant à nos affaires en annonçant, une dernière fois, $n \in \mathbb{N}^*$. Nous profitons tout d'abord de l'inégalité de réordonnement de la question 9.c qui affirme sans sourciller que :

$$\sum_{k=1}^n k t_n(k) \leq \sum_{k=1}^n k \hat{t}_n(k)$$

puisque la liste :

$$(1, 2, \dots, n)$$

est évidemment triée en croissant, et il en résulte alors immédiatement que :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} t_n(k) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \hat{t}_n(k)$$

Soit maintenant $k \in [1, n]$. Nous venons d'apprendre à l'instant que :

$$F_Y \left(\hat{t}_n(k) - \frac{\lambda}{n} \right) \leq \frac{k}{n}$$

puisque nous avons définitivement décidé de ne pas galvauder les inégalités strictes inutiles et nous pouvons même, *de visu*, ajouter qu'en réalité :

$$0 \leq F_Y \left(\hat{t}_n(k) - \frac{\lambda}{n} \right) \leq \frac{k}{n} \leq 1$$

Nous sommes alors en droit de composer à gauche par Q — nous avons justifié un peu plus haut sa parfaite définition sur $[0, 1]$ — ce qui devrait dans un premier temps nous amener à :

$$Q \circ F_Y \left(\hat{t}_n(k) - \frac{\lambda}{n} \right) \leq Q \left(\frac{k}{n} \right)$$

puisque nul ne peut ignorer qu'une fonction monotone bijective et sa réciproque ont le même sens de variation.

Mais attention, vu la très précise définition de la fonction Q — réciproque de la restriction à $[\alpha, \beta]$ de F_Y — il y a un léger souci en ce qui concerne la position géographique du réel :

$$\hat{t}_n(k) - \frac{\lambda}{n}$$

et nous nous en expliquons.

Comme il est dit que la fonction g est à valeurs dans le segment $[\alpha, \beta]$, les réels $t_n(k)$ et surtout son cousin $\hat{t}_n(k)$ sont situés entre α et β et comme λ est positif, le réel :

$$\hat{t}_n(k) - \frac{\lambda}{n}$$

est certainement et *a fortiori* inférieur ou égal à β . Oui mais voilà, et c'est là notre souci, rien, absolument rien ne dit qu'il soit supérieur ou égal à α d'où le déclenchement du plan suivant :

– Si l'on a :

$$\alpha \leq \hat{t}_n(k) - \frac{\lambda}{n} \leq \beta$$

nous avons :

$$Q \circ F_Y \left(\hat{t}_n(k) - \frac{\lambda}{n} \right) = Q \circ F_{Y|S} \left(\hat{t}_n(k) - \frac{\lambda}{n} \right) = \hat{t}_n(k) - \frac{\lambda}{n}$$

puisque le protagoniste clef est idéalement situé, ce qui nous amène gentiment à :

$$\hat{t}_n(k) - \frac{\lambda}{n} \leq F_Y^{-1} \left(\frac{k}{n} \right)$$

– Si maintenant :

$$\hat{t}_n(k) - \frac{\lambda}{n} < \alpha$$

l'inégalité :

$$\hat{t}_n(k) - \frac{\lambda}{n} \leq Q \left(\frac{k}{n} \right)$$

reste trivialement d'actualité puisque cette fois :

$$\hat{t}_n(k) - \frac{\lambda}{n} < \alpha \leq Q \left(\frac{k}{n} \right)$$

étant donné que, depuis des lustres, Q est à valeurs dans le segment $[\alpha, \beta]$.

Nous avons donc en bref et quoi qu'il arrive :

$$\hat{t}_n(k) \leq Q \left(\frac{k}{n} \right) + \frac{\lambda}{n}$$

L'on en déduit d'abord positivement puis par sommation, l'entier k se dandinant de 1 à n , que :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \hat{t}_n(k) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \left(Q \left(\frac{k}{n} \right) + \frac{\lambda}{n} \right)$$

et comme l'ordre jouit de la propriété de transitivité...

† Nous rappelons à notre lecteur que nous avons banni la dangereuse notation F_Y^{-1} et que nous lui avons préféré la notation *quantilienne* Q . Nous ne le redirons plus !

c. Au prix d'une bénigne linéarisation, nous venons à l'instant d'apprendre que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} g\left(\frac{k}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} Q\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{\lambda}{n^3} \sum_{k=1}^n k$$

ce que la plus célèbre des formules de Bernoulli-Faulhaber transforme en :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} g\left(\frac{k}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} Q\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{\lambda(n+1)}{2n^2} \quad (1)$$

et le *physio* n'aura sûrement pas manqué de reconnaître par ci, par là, d'authentiques sommes de Riemann. C'est à cet effet que nous mettons maintenant en avant les réalités suivantes.

– Puisqu'il est dit que la fonction g est continue sur le segment $[0, 1]$, il en est évidemment de même de l'application :

$$t \mapsto tg(t)$$

Vu la reconnaissance du *physio* et le magnifique théorème de Darboux-Riemann, nous asséons déjà que :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} g\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 tg(t)dt$$

– Nous sommes également supposés savoir — nous l'avons en réalité admis — que selon le théorème de continuité d'une réciproque, la fonction Q est continue sur le segment $[0, 1]$, tout comme d'ailleurs sa copine :

$$t \mapsto tQ(t)$$

et le même trio *physio-Darboux-Riemann* assure cette fois que :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} Q\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 tQ(t)dt$$

– Signalons enfin qu'à la générale surprise nous avons :

$$\frac{\lambda(n+1)}{2n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Tout est alors en place pour légaliser, puis effectuer, le passage à la limite dans la récente inégalité (1) lorsque l'entier n tend vers l'infini *and this yields* :

$$\int_0^1 tg(t)dt \leq \int_0^1 tQ(t)dt$$

ce qui, à la lumière de l'uniformité de la variable U et de l'incontournable théorème de transfert, s'écrit exactement :

$$E(Ug(U)) \leq E(UQ(U))$$

et nous n'allons sûrement pas nous en plaindre...

14. L'énoncé donne des signes de faiblesse en cette fin de parcours. Il aurait dû plus précisément parler de fonction de transport de U vers la loi de Y qui sont de classe C^1 sur $[0, 1]$ et à valeurs dans $[\alpha, \beta]$. Il s'agit donc exactement des applications que le texte a décidé de noter g depuis le tout début de la partie 3 et c'est tout naturellement que nous les appellerons transports en « première classe ».

a. Vu sa soudaine notoriété, nous avons la faiblesse de penser que Q pourrait être l'un des hommes que nous recherchons, à la condition *sine qua non* cependant, que la fonction Q soit un authentique transport en première. C'est donc la première chose qui va nous occuper — nous allons voir ce n'est pas la moindre ! — et nous y allons pas à pas...

– *Primo*, cela fait longtemps que nous savons qu'elle applique le segment $[0, 1]$ dans le segment $[\alpha, \beta]$ et c'est un bon début.

– *Deuzio*, primitive sur $[\alpha, \beta]$ de la fonction continue f_Y , la fonction F_Y y est de classe C^1 et nous avons déjà eu l'occasion de signaler que sa dérivée ne s'y annulait jamais, jamais. Une parfaite maîtrise du théorème de dérivabilité d'une réciproque(*) devrait alors révéler que Q est bel et bien de classe C^1 sur $[0, 1]$, chronique d'une place en première souhaitée.

– Il nous reste alors le *tertio*, à savoir que le *jet* assure bien la liaison entre U et la loi de la variable Y .

Soit à cet effet $x \in \mathbb{R}$, intéressons-nous de très très près à l'ensemble :

$$[Q(U) \leq x]$$

et planifions un *poquittin* en n'oubliant pas que Q prend ses valeurs entre les deux réels α et β .

– Si $x < \alpha$, nous avons bien sûr :

$$[Q(U) \leq x] = \emptyset$$

– À l'opposé, si $x > \beta$, nous avons cette fois :

$$[Q(U) \leq x] = \Omega$$

– Supposons, pour finir, que $\alpha \leq x \leq \beta$. Une simple double inclusion permet d'établir que :

$$[Q(U) \leq x] = [U \leq F_Y(x)]$$

(*) Nous sommes conscients qu'il s'agit d'un théorème délicat, voire très souvent mal aimé, mais nous n'avons pas vraiment le choix...

les raisons essentielles étant les croissances respectives de $F_{Y|S}$ sur $[\alpha, \beta]$ et de Q sur le segment $[0, 1]$, le philosophique « non changement d'action » grâce auquel :

$$F_{Y|S}(x) = F_Y(x)$$

ainsi bien sûr que l'inéluctable :

$$Q = (F_{Y|S})^{-1}$$

En résumé :

$$[Q(U) \leq x] = \begin{cases} \emptyset & \text{si } x < \alpha \\ [U \leq F_Y(x)] & \text{si } \alpha \leq x \leq \beta \\ \Omega & \text{si } x > \beta \end{cases}$$

L'ensemble vide et la partie pleine appartiennent évidemment à la tribu \mathcal{A} et c'est également le cas de l'ensemble :

$$[U \leq F_Y(x)]$$

puisque le texte stipule que U est un *genuine* aléa numérique sur (Ω, \mathcal{A}, p) . Ainsi et pour tous les réels x du monde, nous avons :

$$[Q(U) \leq x] \in \mathcal{A}$$

ce qui montre que $Q(U)$ est également une variable aléatoire sur (Ω, \mathcal{A}, p) , et qui, à bien y regarder, devait aussi faire partie du *deal*. Nous pouvons maintenant nous occuper de probabilités et nous espérons ne blesser personne en clamant haut et fort que :

$$F_{Q(U)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \alpha \\ F_U(F_Y(x)) & \text{si } \alpha \leq x \leq \beta \\ 1 & \text{si } x > \beta \end{cases}$$

Oui mais voilà, comme les valeurs de F_Y se *répartissent* inéluctablement entre 0 et 1 et vu ce que nous sommes supposés connaître par cœur de la fonction F_U la facette centrale va gentiment se transformer et *boum badaboum un !*

$$F_{Q(U)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \alpha \\ F_Y(x) & \text{si } \alpha \leq x \leq \beta \\ 1 & \text{si } x > \beta \end{cases}$$

Ensuite et parce que nous connaissons *farpaitement* la fonction F_Y les trois facettes vont docilement se recoller et *boum badaboum deux !*

$$F_{Q(U)}(x) = F_Y(x)$$

Bien entendu, cela vaut pour tous les réels x et l'on a donc carrément :

$$F_{Q(U)} = F_Y$$

chronique d'un transport annoncé depuis bien longtemps...

Soit maintenant g un de nos transports de première classe. Le coût de ce transport est donc :

$$\mathcal{C}(g) = \mathbb{E}(U - g(U))^2$$

puisque les évidentes *bornitudes* des variables U et $g(U)$ assurent l'existence des nombreux moments qui nous intéressent. Après avoir développé et linéarisé, ce coût devient :

$$\mathcal{C}(g) = \mathbb{E}(U^2) - 2\mathbb{E}(Ug(U)) + \mathbb{E}(g^2(U)) = \mathbb{E}(U^2) - 2\mathbb{E}(Ug(U)) + \mathbb{E}(Y^2)$$

la dernière égalité profitant de ce que — transport oblige — la variable $g(U)$ a la même loi que sa copine Y et ainsi le même moment d'ordre deux.

Maintenant que nous sommes vaillamment battus pour établir que Q est également un transport en première classe ce qui vient de valoir pour g vaut du même coup pour Q et *par séquent con*(*) :

$$\mathcal{C}(Q) = \mathbb{E}(U^2) - 2\mathbb{E}(UQ(U)) + \mathbb{E}(Y^2)$$

Après une tranquille différence membre à membre et quelques sympathiques simplifications, voilà que :

$$\mathcal{C}(g) - \mathcal{C}(Q) = 2[\mathbb{E}(UQ(U)) - \mathbb{E}(Ug(U))]$$

quantité qui, si l'on en croit la précédente question, devrait être assurément positive. Nous apprenons ainsi que :

$$\mathcal{C}(Q) \leq \mathcal{C}(g)$$

et, comme nous en avons eu l'intuition depuis le début, le coût du *transporteur* Q est bel et bien minimal parmi les coûts de tous les transports en première. Reste donc à proposer :

$$T^* = Q$$

and Bob's your uncle!

† Le texte n'aborde pas la problématique d'unicité d'un tel transporteur *low cost*, nous en sommes navrés ! Une autre fois peut-être...

b. Une officielle stabilité uniforme, très rapidement schématisée en :

$$U \hookrightarrow \mathcal{U}_{[0,1]} \iff a + (b-a)U \hookrightarrow \mathcal{U}_{[a,b]}$$

fait déjà que :

$$4U - 2 \hookrightarrow \mathcal{U}_{[-2,2]}$$

(*) Dédectif toulousain par excellence !

et une autre, certes un peu moins officielle, mais cependant aisée, cette fois schématisée en :

$$V \hookrightarrow \mathcal{U}_{[-a,a]} \implies |V| \hookrightarrow \mathcal{U}_{[0,a]}$$

font, au bout du compte, que :

$$Y \hookrightarrow \mathcal{U}_{[0,2]}$$

Il semble alors que l'on soit en droit de choisir :

$$\alpha = 0 \quad ; \quad \beta = 2 \quad ; \quad S = [0, 2]$$

puisque, loi uniforme sur $[0, 2]$ oblige, la densité officielle f_Y est nulle en dehors du segment S et sa restriction à ce segment est continue et strictement positive puisqu'elle y est constamment égale à $1/2$. Tout est alors impeccablement dans les clous !

Nous avons appris en classe que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{2} & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

et du coup la fameuse restriction à S n'est autre que l'application :

$$F_{Y|S} : [0, 2] \longrightarrow [0, 1]$$

$$x \longmapsto \frac{x}{2}$$

La fonction réciproque Q — notre belle *quantile* — de cette application se débusque très tranquillement. Il s'agit bien sûr de :

$$Q : [0, 1] \longrightarrow [0, 2]$$

$$u \longmapsto 2u$$

L'un de nos *transporters low cost* est donc :

$$T^* : [0, 1] \longrightarrow [0, 2]$$

$$u \longmapsto 2u$$

et son coût est :

$$\mathcal{C}(T^*) = \mathbb{E} \left[(T^*(U) - U)^2 \right] = \mathbb{E}(U^2)$$

la dernière égalité se passant allègrement de tout commentaire. On trouve alors et pour finir que :

$$\mathcal{C}(T^*) = \frac{1}{3}$$

MATHÉMATIQUES II

DURÉE : 4 HEURES.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

SUJET

Dans tout le problème, k désigne un entier supérieur ou égal à 2.

Notations algébriques

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices-colonnes à n lignes à coefficients réels et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes à coefficients réels. On identifie les ensembles $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et \mathbb{R} en assimilant une matrice de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ à son unique coefficient.
- La base canonique de $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$ est notée $C_k = (e_1, e_2, \dots, e_k)$ et l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$ est muni de sa structure euclidienne usuelle pour laquelle la base C_k est orthonormale. On note $\langle u, v \rangle$ le produit scalaire de deux vecteurs u et v de $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$ et $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$ la norme du vecteur u .
- Pour toute matrice-colonne d de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de composantes d_1, d_2, \dots, d_n , on note $\text{Diag}(d)$ la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\text{Diag}(d) = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}.$$

- La transposée d'une matrice M est notée tM et I_k désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$.

Notations probabilistes

- Toutes les variables aléatoires et tous les vecteurs aléatoires qui interviennent dans ce problème sont définis sur un même espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) .
- On dit qu'un vecteur aléatoire discret (Y_1, Y_2, \dots, Y_k) , à valeurs dans \mathbb{R}^k , admet une espérance lorsque chacune de ses composantes en admet une.

On note Y la matrice-colonne de $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$ de composantes Y_1, Y_2, \dots, Y_k et $\mathcal{E}(Y)$ la matrice-colonne de $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$ dont les composantes sont les espérances $E(Y_1), E(Y_2), \dots, E(Y_k)$.

Lorsque chacune des composantes Y_i ($i \in [1, k]$) admet une variance, on appelle matrice de variance-covariance de Y , notée $\mathcal{V}(Y)$, la matrice symétrique de $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont les variances $V(Y_i)$ et les coefficients non diagonaux les covariances $\text{Cov}(Y_i, Y_j)$ pour tout $(i, j) \in [1, k]^2$ avec $i \neq j$.

En résumé, on pose sous réserve d'existence :

$$\mathcal{E}(Y) = \begin{pmatrix} E(Y_1) \\ E(Y_2) \\ \vdots \\ E(Y_k) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{V}(Y) = \begin{pmatrix} V(Y_1) & \text{Cov}(Y_1, Y_2) & \cdots & \text{Cov}(Y_1, Y_k) \\ \text{Cov}(Y_2, Y_1) & V(Y_2) & \cdots & \text{Cov}(Y_2, Y_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Cov}(Y_k, Y_1) & \text{Cov}(Y_k, Y_2) & \cdots & V(Y_k) \end{pmatrix}.$$

- Dans tout le problème, on note $p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_k \end{pmatrix}$ une matrice-colonne de $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$ vérifiant $\sum_{i=1}^k p_i = 1$ et pour tout $i \in [1, k]$, $p_i \geq 0$.

L'objet du problème est l'étude des propriétés des matrices de variance-covariance en liaison avec la loi des vecteurs aléatoires correspondants.

Partie I. Loix généralisées de Bernoulli

Dans cette partie, on note u la matrice-colonne de $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

1. Soit $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix}$ une matrice-colonne non nulle de $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$ et $\alpha = \sum_{i=1}^k a_i$. On pose : $M = a^t u$.

- a) Calculer la matrice M et préciser son rang.
- b) Calculer la matrice Ma et en déduire une valeur propre de M .
- c) Montrer que $M^2 = \alpha M$. Que peut-on en déduire sur les valeurs propres de M ?
- d) Montrer que M est diagonalisable si et seulement si $\alpha \neq 0$.
- e) Pour quelles valeurs de α la matrice $I_k - M$ est-elle inversible ?
- f) On suppose que $\alpha = 1$. Montrer que M est la matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^k d'un projecteur dont on précisera l'image et le noyau. Dans quel cas ce projecteur est-il orthogonal ?

On dit qu'un vecteur aléatoire (X_1, X_2, \dots, X_k) suit la loi généralisée de Bernoulli de paramètre p , notée $\mathcal{B}_k(p)$, si on a :

$$\forall i \in [1, k], P(\{X = e_i\}) = p_i, \quad \text{avec} \quad X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_k \end{pmatrix}.$$

2. Soit (X_1, X_2, \dots, X_k) un vecteur aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}_k(p)$.
 - a) Pour $i \in [1, k]$, comparer les événements $\{X = e_i\}$ et $\{X_i = 1\}$; en déduire que chaque variable aléatoire X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre p_i et écrire la matrice $\mathcal{E}(X)$.
 - b) Quelle est la loi de la variable aléatoire $X_1 + X_2$?
 - c) Montrer que $\text{Cov}(X_1, X_2) = -p_1 p_2$.
 - d) Écrire la matrice $\mathcal{V}(X)$.
3. Soit $M(p)$ la matrice de $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ définie par : $M(p) = p^t u$.
 - a) Vérifier l'égalité : $\mathcal{V}(X) = (I_k - M(p)) \text{Diag}(p)$.
 - b) Montrer que si p_1, p_2, \dots, p_k sont différents de 0, le rang de $\mathcal{V}(X)$ est égal à $k - 1$.
 - c) Soit σ une permutation de $[1, k]$ et p_σ la matrice-colonne de $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$ de composantes $p_{\sigma(1)}, p_{\sigma(2)}, \dots, p_{\sigma(k)}$. Montrer que $\mathcal{V}(X)$ est semblable à $(I_k - p_\sigma^t u) \text{Diag}(p_\sigma)$.

d) Exprimer le rang de $\mathcal{V}(X)$ en fonction du nombre d'éléments i de $[1, k]$ pour lesquels on a $p_i \neq 0$.

Partie II. Tirages avec remise dans une population stratifiée

Dans cette partie, on suppose que pour tout $i \in [1, k]$, on a $p_i > 0$ et que p_1, p_2, \dots, p_k sont les proportions d'individus appartenant aux diverses catégories d'une population statistique scindée en k catégories distinctes. Pour modéliser une suite illimitée de tirages équiprobables avec remise effectués dans cette population, on utilise des variables aléatoires $X_i^{(n)}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall i \in [1, k], X_i^{(n)} = \begin{cases} 1 & \text{si l'individu extrait au } n\text{-ième tirage appartient à la } i\text{-ème catégorie} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On suppose que les vecteurs aléatoires $(X_1^{(n)}, X_2^{(n)}, \dots, X_k^{(n)})$ ($n \in \mathbb{N}^*$) suivent chacun la loi $\mathcal{B}_k(p)$ (partie I) et sont mutuellement indépendants. Cette indépendance mutuelle signifie que pour tout entier $n \geq 2$ et pour toutes fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ définies sur \mathbb{R}^k à valeurs réelles, les variables aléatoires $\varphi_1(X_1^{(1)}, X_2^{(1)}, \dots, X_k^{(1)})$, $\varphi_2(X_1^{(2)}, X_2^{(2)}, \dots, X_k^{(2)})$, \dots , $\varphi_n(X_1^{(n)}, X_2^{(n)}, \dots, X_k^{(n)})$ sont indépendantes.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $X^{(n)}$ la matrice-colonne de $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$ de composantes $X_1^{(n)}, X_2^{(n)}, \dots, X_k^{(n)}$ et $S^{(n)}$ la matrice-colonne de $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$ de composantes $S_1^{(n)}, S_2^{(n)}, \dots, S_k^{(n)}$, où pour tout $i \in [1, k]$, on a $S_i^{(n)} = \sum_{j=1}^n X_i^{(j)}$.

- 4.a) Préciser l'ensemble N_n des matrices-colonnes s de $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$ pour lesquelles on a $P(\{S^{(n)} = s\}) > 0$.
- b) Déterminer les lois respectives des deux variables aléatoires $S_1^{(n)}$ et $S_1^{(n)} + S_2^{(n)}$. Sont-elles indépendantes ?
- c) Montrer que $\mathcal{V}(S^{(n)}) = n \mathcal{V}(X^{(1)})$.

5. Soit H un élément de \mathcal{A} vérifiant $0 < P(H) < 1$, \bar{H} l'événement contraire de H et W une variable aléatoire discrète admettant une variance.

- a) Justifier l'existence de $E(W^2|H)$, espérance de W^2 pour la probabilité conditionnelle P_H .
- b) On pose : $V(W|H) = E(W^2|H) - (E(W|H))^2$ (variance de W pour la probabilité conditionnelle P_H).
En utilisant le système complet d'événements (H, \bar{H}) et la formule de l'espérance totale pour W et W^2 , établir l'inégalité : $V(W) \geq P(H) V(W|H)$.

6. Pour tout $i \in [1, k]$, on note T_i le temps d'attente du premier tirage d'un individu de la i -ème catégorie et on note T la matrice-colonne de $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$ de composantes T_1, T_2, \dots, T_k .

- a) Soit $i \in [1, k]$. Justifier que la probabilité que T_i soit infini est nulle. Quelle est la loi de T_i ?
- b) On pose : $H_k = \bigcap_{i=1}^{k-1} [T_i = i]$. Calculer $P(H_k)$. Préciser la loi conditionnelle de $T_k - (k - 1)$ sachant H_k .
En déduire $E(T_k|H_k)$ et $V(T_k|H_k)$.
- c) En exploitant le résultat de la question 5.b), établir pour tout vecteur $v = (v_1, v_2, \dots, v_k)$ de \mathbb{R}^k , l'inégalité :

$$V\left(\sum_{i=1}^k v_i T_i\right) \geq \frac{v_k^2(1-p_k)}{p_k^2} \times \prod_{i=1}^{k-1} p_i.$$

- d) Montrer plus généralement que pour tout $j \in [1, k]$, on a : $V\left(\sum_{i=1}^k v_i T_i\right) \geq \frac{v_j^2(1-p_j)}{p_j^2} \times \prod_{\substack{i \in [1, k] \\ i \neq j}} p_i$.

Partie III. Support et rang stochastiques d'un vecteur aléatoire

Dans toute cette partie, (Y_1, Y_2, \dots, Y_k) désigne un vecteur aléatoire discret, à valeurs dans \mathbb{R}^k , dont chaque composante admet une espérance et une variance. On rappelle que Y est la matrice-colonne de $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$ de composantes Y_1, Y_2, \dots, Y_k .

7. On appelle *support vectoriel* de Y , tout sous-espace vectoriel F de $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$ tel que $P(\{Y - E(Y) \in F\}) = 1$. On note $\mathcal{S}(Y)$ l'ensemble des supports vectoriels de Y .

- a) Justifier l'existence d'un plus petit élément de l'ensemble des dimensions des éléments de $\mathcal{S}(Y)$.
Ce plus petit élément est appelé le *rang stochastique* de Y et noté $R_s(Y)$.
- b) Dans quels cas le rang stochastique $R_s(Y)$ est-il nul ?
- c) Montrer que l'intersection de deux supports vectoriels F_1 et F_2 de Y est un support vectoriel de Y .
- d) En déduire l'existence d'un unique élément F de $\mathcal{S}(Y)$ tel que la dimension de F soit égale à $R_s(Y)$.
L'espace vectoriel F est appelé le *support stochastique* de Y .
8. Soit u une matrice-colonne de $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$ de composantes u_1, u_2, \dots, u_k .
- a) Montrer que la variable aléatoire $\sum_{i=1}^k u_i Y_i$ admet une variance, égale à ${}^t u \mathcal{V}(Y) u$.
- b) Établir l'existence d'un unique vecteur $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ de \mathbb{R}^k tel que $\mathcal{V}(Y)$ soit semblable à la matrice $\text{Diag}(\lambda)$ et pour lequel $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k \geq 0$ (on note $\text{Diag}(\lambda)$ la matrice diagonale de $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ de coefficients diagonaux $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$).
- c) On pose : $\|Y - \mathcal{E}(Y)\|^2 = \sum_{i=1}^k (Y_i - \mathcal{E}(Y_i))^2$. Montrer que $E(\|Y - \mathcal{E}(Y)\|^2) = \sum_{i=1}^k \lambda_i$.
9. Soit $q \in [1, k]$, F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$ de dimension q et $(f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(q)})$ une base orthonormale de F .
- a) Soit $\omega \in \Omega$. Justifier l'existence de $Q_F(\omega) = \inf\{\|Y(\omega) - \mathcal{E}(Y) - x\|^2; x \in F\}$ et montrer que :
- $$\|Y(\omega) - \mathcal{E}(Y)\|^2 = Q_F(\omega) + \sum_{j=1}^q (Y(\omega) - \mathcal{E}(Y), f^{(j)})^2.$$
- b) À l'aide de la question 8, établir l'égalité : $E(Q_F) = \sum_{i=1}^k \lambda_i - \sum_{j=1}^q {}^t f^{(j)} \mathcal{V}(Y) f^{(j)}$.
- c) Que devient l'égalité précédente lorsque $F = \mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$?
- 10.a) Montrer que pour toute matrice-colonne f de $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$ vérifiant $\|f\| = 1$, on a : ${}^t f \mathcal{V}(Y) f \leq \lambda_1$.
- b) En déduire la borne inférieure de $E(Q_F)$ lorsque F décrit l'ensemble des droites vectorielles de $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$.
- c) Dans cette question, on suppose que (Y_1, Y_2, \dots, Y_k) suit la loi $\mathcal{B}_k(p)$, où pour tout $i \in [1, k]$, on a $p_i = \frac{1}{k}$.
Calculer les valeurs propres de $\mathcal{V}(Y)$ et la borne inférieure de $E(Q_F)$ pour l'ensemble des droites vectorielles F de $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$, puis préciser pour quelle(s) droite(s) cette borne est atteinte.
11. On suppose que le rang r de $\mathcal{V}(Y)$ est non nul. On note F_0 la somme des sous-espaces propres associés aux valeurs propres non nulles de $\mathcal{V}(Y)$ et F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$ tel que $F \subset F_0$ et $F \neq F_0$.
- a) Calculer $E(Q_{F_0})$ et en déduire que F_0 est un support vectoriel de Y .
- b) Justifier l'existence d'un vecteur $f^{(r)}$ de F_0 , orthogonal à F et de norme 1.
- c) Montrer que ${}^t f^{(r)} \mathcal{V}(Y) f^{(r)} > 0$ et en déduire que $E(Q_F) \neq 0$.
- d) Montrer que le rang stochastique $R_s(Y)$ de Y est égal à r .
12. Dans cette question, on reprend les définitions et notations de la question 6.
- a) À l'aide de la question 6.d), montrer que le rang stochastique $R_s(T)$ de T est égal à k .
- b) Montrer que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on a : $E(T_1 T_2 | T_1 = i] \cap [T_2 > i]) = i \left(i + \frac{1}{p_2} \right)$.
- c) Établir la relation : $E(T_1 T_2) = \frac{1}{p_1 p_2} - \frac{1}{p_1 + p_2}$.
- d) On note $\Pi = (\pi_{i,j})_{1 \leq i, j \leq k}$ la matrice de $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ définie par : $\pi_{i,j} = \begin{cases} \frac{1-p_i}{p_i^2} & \text{si } i = j \\ -\frac{1}{p_i + p_j} & \text{si } i \neq j \end{cases}$.
- Montrer que la matrice Π est inversible.

CORRIGÉ

Par Francis Raccaglia, professeur au lycée Thiers à Marseille.

Partie I - Lois de Bernoulli généralisées

1.a) Par définition $M = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix} (1 \dots 1)$. D'où M est la matrice carrée d'ordre k d'élément générique $m_{i,j} = a_i$

. Toutes les colonnes de M sont donc égales à a ce qui implique que $\text{rg}(M) = 1$.

b) $Ma = (a^t u)a = a(^t u a)$. Or ${}^t u a = \sum_{i=1}^k a_i$, d'où $Ma = \left(\sum_{i=1}^k a_i \right) a$. On a donc $Ma = \alpha a$ et a n'étant pas la matrice nulle cela montre que α est une valeur propre de M et a un vecteur propre associé à cette valeur propre.

c) Par définition $M^2 = (a^t u)(a^t u) = a(^t u a)^t u$. ${}^t u a$ étant un réel on peut le permuter avec la matrice a :

$$M^2 = \left(\sum_{i=1}^k a_i \right) {}^t u a = \alpha M.$$

Le polynôme $X^2 - \alpha X$ est un polynôme annulateur de M , il a α et 0 comme racines, donc d'après le cours

si λ est une valeur propre de M alors $\lambda = \alpha$ ou $\lambda = 0$.

d) Si $\alpha = 0$, M possède 0 comme unique valeur propre, étant de rang 1 , M n'est pas la matrice nulle donc M n'est pas diagonalisable.

Si $\alpha \neq 0$, puisque $\text{rg}(M) = 1$, le noyau de M est de dimension $k - 1$ (théorème du rang) donc 0 est une valeur propre de M et le sous espace propre associé est de dimension $k - 1$. α est une autre valeur propre de M dont le sous espace propre associé est au moins de dimension 1 . On a donc d'après les résultats du cours :

$$k \leq \dim(E_0(M)) + \dim(E_\alpha(M)) \leq k$$

d'où l'égalité, ce qui prouve que M est diagonalisable.

e) $I_k - M$ est inversible si et seulement si 1 n'est pas valeur propre de M i.e. si et seulement si $\alpha \neq 1$.

f) Si $\alpha = 1$, M vérifie $M^2 = M$ et ainsi on peut affirmer que M est la matrice canonique associée à un projecteur de \mathbb{R}^k . D'après l'écriture de M ,

l'image de ce projecteur est engendrée par le vecteur (a_1, \dots, a_k) .

De plus si X est la matrice colonne associée à un vecteur $x = (x_1, \dots, x_k)$ de \mathbb{R}^k dans la base canonique, $MX = 0$ si et seulement si, pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $a_i \sum_{j=1}^k x_j = 0$. Les a_i n'étant pas tous nuls, cela équivaut à $\sum_{j=1}^k x_j = 0$.

Le noyau est donc composé des $x = (x_1, \dots, x_k)$ tels que $\sum_{j=1}^k x_j = 0$.

Ce projecteur est orthogonal si et seulement si l'image et le noyau sont orthogonaux. Or l'orthogonal du noyau est la droite engendrée par le vecteur dont toutes les composantes valent 1. D'où ce projecteur sera orthogonal uniquement lorsque tous les a_i seront égaux.

2.a) Il est évident que si $[X = e_i]$ est réalisé alors $[X_i = 1]$ l'est aussi. Par contre on n'a pas forcément $[X_i = 1] \subset [X = e_i]$. En effet d'après l'énoncé, le vecteur aléatoire X est presque sûrement à valeurs dans $\{e_1, \dots, e_k\}$, ce qui ne l'empêche pas de prendre éventuellement la valeur $e_1 + \dots + e_k$ avec la probabilité 0.

Ainsi on peut affirmer que : $p_i \leq P([X_i = 1])$ (1). Et aussi que : $\bigcup_{j \neq i} [X = e_j] \subset [X_i = 0]$. En passant aux probabilités, $1 - p_i \leq P([X_i = 0])$ (2).

On obtient alors que : $1 \leq P([X_i = 0]) + P([X_i = 1])$. Cette somme étant majorée par 1 par incompatibilité, elle vaut 1 et les inégalités (1) et (2) sont des égalités.

X_i suit bien une loi de Bernoulli de paramètre p_i .

D'où

$$\mathcal{E}(X) = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_k \end{pmatrix}.$$

Pour éviter de compliquer les raisonnements qui suivent, on considèrera que $X(\Omega) = \{e_1, \dots, e_k\}$, ce qui en termes probabilistes ne change rien à la suite de cette partie.

b) A priori, $X_1 + X_2$ peut prendre les valeurs 0, 1, 2. Mais les événements $[X_1 = 1]$ et $[X_2 = 1]$ sont incompatibles, donc $X_1 + X_2$ ne peut prendre que les valeurs 0 et 1. Ainsi :

$X_1 + X_2$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $E(X_1 + X_2) = p_1 + p_2$.

c) Posons pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $q_i = 1 - p_i$. On a $V(X_1) = p_1 q_1$, $V(X_2) = p_2 q_2$. D'où $\text{Cov}(X_1, X_2)$ existe et $\text{Cov}(X_1, X_2) = \frac{1}{2}(V(X_1 + X_2) - V(X_1) - V(X_2)) = \frac{1}{2}((p_1 + p_2)(1 - p_1 - p_2) - p_1(1 - p_1) - p_2(1 - p_2))$. Après développements et simplifications, il ne reste que $-p_1 p_2$ i.e.

$$\text{Cov}(X_1, X_2) = -p_1 p_2.$$

d) Par analogie, on a pour tout couple $(i, j) \in \llbracket 1, k \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$, $\text{Cov}(X_i, X_j) = -p_i p_j$. D'où

$$\mathcal{V}(X) = \begin{pmatrix} p_1 q_1 & -p_1 p_2 & \cdots & \cdots & -p_1 p_k \\ -p_2 p_1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -p_{k-1} p_k \\ -p_k p_1 & \cdots & \cdots & -p_k p_{k-1} & p_k q_k \end{pmatrix}$$

3.a) De manière générale, si A est une matrice, notons $A_{i,j}$ le coefficient se trouvant sur la ligne i et la colonne j . On notera dans cette question plus simplement M à la place de $M(p)$.

D'après la définition du produit matriciel, $((I_k - M)\text{Diag}(p))_{i,j} = \sum_{r=1}^k (I_k - M)_{i,r} \text{Diag}(p)_{r,j} = (I_k - M)_{i,j} p_j$. Or

$$M_{i,j} = p_i, \text{ d'où } ((I_k - M)\text{Diag}(p))_{i,j} = \begin{cases} (1 - p_i) p_i & \text{si } i = j \\ -p_i p_j & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a bien l'égalité annoncée.

b) Puisque les p_i sont non nuls, $\text{Diag}(p)$ est inversible. D'où le rang de $\mathcal{V}(X)$ est égal au rang de $I_k - M(p)$. Or d'après la question 1, $M(p)$ est la matrice d'un projecteur de rang 1, d'où le rang de $I_k - M(p)$ vaut $k - 1$ puisque son noyau est l'image de $M(p)$.

Finalement, on a bien $\text{rg}(\mathcal{V}(X)) = k - 1$.

c) Soit v l'endomorphisme de \mathbb{R}^k associé à $\mathcal{V}(X)$ dans la base canonique. Considérons la base (e'_1, \dots, e'_k) avec pour tout

$$i, e'_i = e_{\sigma(i)}. \text{ On a alors : } v(e'_i) = v(e_{\sigma(i)}) = p_{\sigma(i)} q_{\sigma(i)} e_{\sigma(i)} - \sum_{r=1, r \neq \sigma(i)}^k p_r p_{\sigma(i)} e_r.$$

$$\text{Or } \sum_{r=1, r \neq \sigma(i)}^k p_r p_{\sigma(i)} e_r = \sum_{s=1, s \neq i}^k p_{\sigma(s)} p_{\sigma(i)} e_{\sigma(s)} = p_{\sigma(i)} q_{\sigma(i)} e'_i - \sum_{s=1, s \neq i}^k p_{\sigma(s)} p_{\sigma(i)} e'_s.$$

Ceci démontre que la matrice de v dans la base (e'_1, \dots, e'_k) a pour éléments diagonaux les réels $p_{\sigma(i)} q_{\sigma(i)}$ et pour éléments non diagonaux les réels $-p_{\sigma(i)} p_{\sigma(j)}$, c'est à dire que la matrice de v dans la base (e'_1, \dots, e'_k) est $(I_k - p_{\sigma} \text{@@}^t u) \text{Diag}(p_{\sigma})$.

Les matrices $\mathcal{V}(X)$ et $(I_k - p_{\sigma}^t u) \text{Diag}(p_{\sigma})$ représentent le même endomorphisme de \mathbb{R}^k , elles sont donc semblables.

d) Soit r le nombre de p_i non nuls. Soit σ une permutation de $\llbracket 1, k \rrbracket$ telle que $p_{\sigma(1)} \neq 0, \dots, p_{\sigma(r)} \neq 0, p_{\sigma(r+1)} = 0, \dots, p_{\sigma(k)} = 0$.

La matrice $(I_k - p_{\sigma}^t u) \text{Diag}(p_{\sigma})$ n'a que des coefficients nuls sur les lignes et les colonnes d'indices strictement supérieur à r . De plus le bloc formé par les coefficients dont les indices de ligne et de colonne sont inférieurs à r correspond à une matrice de la forme $(I_r - a^t v) \text{Diag}(a)$ où a est la matrice colonne de coefficients $p_{\sigma(1)}, \dots, p_{\sigma(r)}$ et v la matrice colonne d'ordre r dont tous les coefficients valent 1. D'après les résultats des questions qui précèdent, on peut dire que son rang est $r - 1$.

On peut donc en conclure que le rang de $\mathcal{V}(X)$ vaut $r - 1$ où r est le nombre de $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ pour lesquels $p_i \neq 0$.

Partie II - Tirages avec remise dans une population stratifiée

4.a) Posons $s = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_k \end{pmatrix}$. $[S^{(n)} = s]$ est réalisé si et seulement si, pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, s_i tirages exactement ont donné un

individu de la i -ème catégorie. Donc, cet événement est réalisable si et seulement si, pour tout i , $s_i \in \mathbb{N}$ et $\sum_{i=1}^k s_i = n$.

De plus, grâce à l'indépendance, si s vérifie ces conditions, la probabilité est non nulle. En effet on peut par exemple la minorer par $p_1^{s_1} \dots p_k^{s_k}$ qui correspond à la probabilité de tirer s_1 fois un individu de la catégorie 1, puis s_2 fois un individu de la catégorie 2, ..., et enfin s_k fois un individu de la catégorie k . D'où :

$$P([S^{(n)} = s]) > 0 \text{ si et seulement si les coefficients de } s \text{ sont des entiers naturels dont la somme vaut } n.$$

b) $S_1^{(n)}$ est la variable aléatoire réelle égale au nombre de fois où l'on a tiré un individu de la catégorie 1. Classiquement,

$$S_1^{(n)} \text{ suit la loi binomiale } \mathcal{B}(n, p_1)$$

Pour $S_1^{(n)} + S_2^{(n)}$ on raisonne de même en « fusionnant les catégories 1 et 2 » .

D'où $S_1^{(n)} + S_2^{(n)}$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p_1 + p_2)$.

Ces variables ne sont pas indépendantes puisque par exemple $P_{[S_1=1]}([S_1^{(n)} + S_2^{(n)} = 0]) = 0$ et $P([S_1^{(n)} + S_2^{(n)} = 0]) \neq 0$.

c) On généralise les résultats précédents sans difficulté : $S_i^{(n)}$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p_i)$ et si $i \neq j$, $S_i^{(n)} + S_j^{(n)}$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p_i + p_j)$. D'où,

$$V(S_i^{(n)}) = np_i(1 - p_i) \text{ et } \text{Cov}(S_i^{(n)}, S_j^{(n)}) = \frac{1}{2} [V(S_i^{(n)} + S_j^{(n)}) - V(S_i^{(n)}) - V(S_j^{(n)})]$$

Or

$$V(S_i^{(n)} + S_j^{(n)}) = n(p_i + p_j)(1 - p_i - p_j), V(S_i^{(n)}) = np_i(1 - p_i), V(S_j^{(n)}) = np_j(1 - p_j)$$

ce qui donne $\text{Cov}(S_i^{(n)}, S_j^{(n)}) = -np_i p_j$. On obtient bien $\mathcal{V}(S^{(n)}) = n\mathcal{V}(X^{(1)})$.

5.a) Notons $W(\Omega) = \{w_i / i \in I\}$ où I est un ensemble fini ou indexable par les entiers naturels.

Pour tout $i \in I$, $P_H([W = w_i]) = \frac{P([W_i = w_i] \cap H)}{P(H)}$, d'où $P_H([W = w_i]) \leq \frac{P([W = w_i])}{P(H)}$. On en déduit que $0 \leq w_i^2 P_H([W = w_i]) \leq w_i^2 P([W = w_i])$.

Or $E(W^2)$ existe, donc le théorème de transfert montre que $\sum w_i^2 P([W = w_i])$ converge et par le théorème de convergence des séries à termes positifs par comparaison, $\sum w_i^2 P_H([W = w_i])$ converge. Ceci prouve l'existence de $E(W^2|H)$.

b) Les propriétés de la variance sont bien entendu vraies pour la variance associée à la probabilité conditionnelle P_H ! Notons m l'espérance de W . On a donc $V(W) = E((W - m)^2)$. On applique la formule de l'espérance totale (les « existences » étant assurées par le résultat de la question précédente) :

$$V(W) = E((W - m)^2|H)P(H) + E((W - m)^2|\bar{H})P(\bar{H})$$

d'où

$$V(W) \geq E((W - m)^2 | H) P(H)$$

La formule de Huyghens montre que :

$$E((W - m)^2 | H) = V(W - m | H) + (E(W - m | H))^2 = V(W | H) + (E(W - m | H))^2$$

d'où $E((W - m)^2 | H) \geq V(W | H)$ puis l'inégalité demandée :

$$V(W) \geq V(W | H) P(H)$$

6.a) On cherche la probabilité de l'événement $A = \bigcap_{k=1}^{+\infty} [T_i \geq k]$. Or la suite d'événements associée à l'intersection précédente est décroissante d'où d'après le cours $P(A) = \lim_{k \rightarrow +\infty} P([T_i \geq k])$.

De plus par indépendance, $P([T_i \geq k]) = (1 - p_i)^{k-1}$ et $0 < 1 - p_i < 1$, d'où $\lim_{k \rightarrow +\infty} (1 - p_i)^{k-1} = 0$.

Classiquement, T_i suit la loi géométrique de paramètre p_i puisque les tirages s'effectuent avec remise.

b) On a : $H_k = \bigcap_{i=1}^{k-1} [X_i^{(i)} = 1]$. Par hypothèse $X_1^{(1)}, \dots, X_{k-1}^{(k-1)}$ sont indépendantes, d'où $P(H_k) = \prod_{i=1}^{k-1} P([X_i^{(i)} = 1])$ et

ainsi
$$P(H_k) = \prod_{i=1}^{k-1} p_i$$

Si l'on pose que H_k est réalisé, $T_k - (k - 1)$ est la variable aléatoire égale au nombre de tirages qu'il a fallu réaliser en plus des $k - 1$ premiers pour obtenir un individu de la k -ième catégorie.

La loi conditionnelle de cette variable est la loi géométrique de paramètre p_k .

D'où, d'après le cours, $E(T_k - (k - 1) | H_k) = \frac{1}{p_k}$ et $V(T_k - (k - 1) | H_k) = \frac{1 - p_k}{p_k^2}$, ce qui induit :

$$E(T_k | H_k) = k - 1 + \frac{1}{p_k} \text{ et } V(T_k | H_k) = \frac{1 - p_k}{p_k^2}$$

c) Posons $W = \sum_{i=1}^k v_i T_i$. Les T_i admettant une variance, W aussi et on peut appliquer l'inégalité du 5.b) avec l'événement

$$H_k \text{ qui vérifie bien les hypothèses : } V(W) \geq V(W | H_k) \prod_{i=1}^{k-1} p_i$$

Or $V(W | H_k) = V(v_k T_k + \sum_{i=1}^{k-1} v_i T_i | H_k) = V(v_k T_k | H_k) = v_k^2 V(T_k | H_k)$ d'après les propriétés de la variance. On n'a plus qu'à remplacer $V(T_k | H_k)$ par $\frac{1 - p_k}{p_k^2}$:

$$V\left(\sum_{i=1}^k v_i T_i\right) \geq v_k^2 \frac{1 - p_k}{p_k^2} \prod_{i=1}^{k-1} p_i$$

d) On raisonne de même, la catégorie j jouant le rôle que joue la catégorie k dans les questions précédentes.

Partie III - Support et rang stochastique d'un vecteur aléatoire

7.a) $\mathcal{S}(Y)$ contient \mathbb{R}^k . Notons : $\mathcal{D}(Y)$ l'ensemble des dimensions des supports de Y . Cet ensemble est un sous ensemble non vide ($k \in \mathcal{D}(Y)$) de \mathbb{N} , il admet donc un plus petit élément.

b) Le rang stochastique est nul si et seulement si le sous-espace réduit au vecteur nul est un support de Y i.e. si et seulement si $P(Y - E(Y) = 0) = 1$, c'est à dire lorsque Y est quasi-constante.

c) Soit F_1 et F_2 deux supports. $[Y - E(Y) \in F_1 \cap F_2] = [Y - E(Y) \in F_1] \cap [Y - E(Y) \in F_2]$ d'où d'après la formule du crible au rang 2 :

$$P([Y - E(Y) \in F_1 \cap F_2]) = \underbrace{P([Y - E(Y) \in F_1]) + P([Y - E(Y) \in F_2])}_{=2} - \underbrace{P([Y - E(Y) \in F_1] \cup [Y - E(Y) \in F_2])}_{\leq 1}$$

d'où $P([Y - E(Y) \in F_1 \cap F_2]) \geq 1$ et comme c'est une probabilité elle vaut 1 ce qui prouve que $F_1 \cap F_2$ est un support.

d) Supposons que F_1 et F_2 sont des supports de dimension $R_s(Y)$. Alors $F_1 \cap F_2$ est aussi un support de Y d'où sa dimension est supérieure à $R_s(Y)$, étant un sous espace vectoriel de F_1 sa dimension est alors égale à $R_s(Y)$. On a donc $\dim(F_1 \cap F_2) = \dim(F_1) = \dim(F_2)$ et $F_1 \cap F_2$ étant un sous espace vectoriel de F_1 et de F_2 , on a les égalités $F_1 \cap F_2 = F_1$ et $F_1 \cap F_2 = F_2$ d'où $F_1 = F_2$.

Il existe bien un unique F de $\mathcal{S}(Y)$ tel que $\dim(F) = R_s(Y)$.

8.a) On sait d'après le cours qu'une variable aléatoire réelle combinaison linéaire de variables aléatoires admettant une variance admet une variance. De plus :

$$V\left(\sum_{i=1}^k u_i Y_i\right) = \text{Cov}\left(\sum_{i=1}^k u_i Y_i, \sum_{j=1}^k u_j Y_j\right)$$

Or par bilinéarité de la covariance $\text{Cov}\left(\sum_{i=1}^k u_i Y_i, \sum_{j=1}^k u_j Y_j\right) = \sum_{i=1}^k u_i \left(\sum_{j=1}^k \text{Cov}(Y_i, Y_j) u_j\right) = {}^t u \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^k \text{Cov}(Y_1, Y_j) u_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^k \text{Cov}(Y_k, Y_j) u_j \end{pmatrix}$

et
$$\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^k \text{Cov}(Y_1, Y_j) u_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^k \text{Cov}(Y_k, Y_j) u_j \end{pmatrix} = \mathcal{V}(X)u$$
 ce qui permet de conclure :
$$V\left(\sum_{i=1}^k u_i Y_i\right) = {}^t u \mathcal{V}(X) u$$
.

b) On sait que la matrice de variance-covariance $\mathcal{V}(Y)$ est symétrique réelle donc diagonalisable dans une base orthonormée. De plus ses valeurs propres sont positives.

En effet, si u est un vecteur propre de composantes u_1, \dots, u_k , associé à la valeur propre λ , ${}^t u \mathcal{V}(X) u = \lambda \|u\|^2$ d'où

$$\lambda = \frac{V\left(\sum_{i=1}^k u_i Y_i\right)}{\|u\|^2}$$
. Les valeurs propres de la matrice de variance-covariance de Y sont bien positives.

Pour l'existence, il suffit de prendre une base de vecteurs propres de l'endomorphisme v canoniquement associées à $\mathcal{V}(X)$ et de réordonner si nécessaire cette base dans l'ordre décroissant des valeurs propres associées, en une nouvelle base. La matrice diagonale dans cette base de v vérifie la propriété demandée et est semblable à $\mathcal{V}(X)$.

Montrons l'unicité. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ et (μ_1, \dots, μ_k) deux vecteurs qui conviennent. Il sont associés à deux bases de vecteurs propres de v , (e'_1, \dots, e'_k) et (e''_1, \dots, e''_k) . On note $E_\lambda(v)$ le sous espace propre de v associé à λ et $Sp(v)$ son spectre.

Supposons par l'absurde qu'il existe j tel que $\lambda_j > \mu_j$. Alors d'une part,

$$\dim\left(\bigoplus_{\lambda \in Sp(v)/\lambda \geq \lambda_j} E_\lambda(v)\right) \geq \dim(\text{Vect}(e'_1, \dots, e'_j)) \text{ i.e. } \dim\left(\bigoplus_{\lambda \in Sp(v)/\lambda \geq \lambda_j} E_\lambda(v)\right) \geq j$$

et d'autre part,

$$\dim\left(\bigoplus_{\lambda \in Sp(v)/\lambda < \lambda_j} E_\lambda(v)\right) \geq \dim(\text{Vect}(e''_j, \dots, e''_k)) \text{ i.e. } \dim\left(\bigoplus_{\lambda \in Sp(v)/\lambda < \lambda_j} E_\lambda(v)\right) \geq k - j + 1$$

Or $\dim\left(\bigoplus_{\lambda \in Sp(v)} E_\lambda(v)\right) = k$ d'où puisque les sous espaces propres sont en somme directe :

$$\dim\left(\bigoplus_{\lambda \in Sp(v)/\lambda \geq \lambda_j} E_\lambda(v)\right) + \dim\left(\bigoplus_{\lambda \in Sp(v)/\lambda < \lambda_j} E_\lambda(v)\right) = k$$

ce qui est en contradiction avec les deux inégalités qui précèdent. Il y a donc bien unicité d'un tel vecteur.

c) On a l'existence de cette espérance par linéarité de l'espérance et le fait que les variables aléatoires Y_i admettent des variances. De plus $E(\|Y - E(Y)\|^2) = \sum_{i=1}^k V(Y_i)$. On obtient la somme des éléments diagonaux de $\mathcal{V}(X)$ qui est la même

pour deux matrices semblables d'après les propriétés de la trace. D'où, on a bien :
$$E(\|Y - E(Y)\|^2) = \sum_{i=1}^k \lambda_i$$
.

Remarque. Il me semble que l'on dépasse ici le cadre du programme mais il y a peut-être une idée lumineuse qui évite le recours aux propriétés de la trace!

9.a) $\{\|Y(\omega) - \mathcal{E}(Y) - x\|^2; x \in \mathbb{R}\}$ est un sous ensemble non vide de \mathbb{R} , il est minoré par 0 et ainsi il possède une borne inférieure. Posons $y = Y(\omega) - \mathcal{E}(Y)$. On sait d'après le cours d'algèbre bilinéaire que le minimum de $\|y - x\|$ lorsque x décrit le sous espace vectoriel F est atteint lorsque x est le projeté orthogonal de y sur F . Notons alors z ce projeté orthogonal, $y - z$ appartient à F^\perp . On a donc en utilisant Pythagore : $\|y\|^2 = \|y - z\|^2 + \|z\|^2$. Or puisque $(f^{(1)}, \dots, f^{(k)})$ est une base orthonormale, $z = \sum_{j=1}^k \langle y, f^{(j)} \rangle f^{(j)}$ d'où $\|z\|^2 = \sum_{j=1}^k \langle y, f^{(j)} \rangle^2$. On a donc bien :

$$\|Y(\omega) - \mathcal{E}(Y)\|^2 = Q_F(\omega) + \sum_{j=1}^k \langle Y(\omega) - \mathcal{E}(Y), f^{(j)} \rangle^2$$

b) Par définition, pour tout $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $\langle Y(\omega) - \mathcal{E}(Y), f^{(j)} \rangle^2 = {}^t f^{(j)} (Y(\omega) - \mathcal{E}(Y)) {}^t (Y(\omega) - \mathcal{E}(Y)) f^{(j)}$. D'après les résultats de la première question de la partie I, la matrice $(Y(\omega) - \mathcal{E}(Y)) {}^t (Y(\omega) - \mathcal{E}(Y))$ a pour élément générique $(Y_i(\omega) - \mathcal{E}(Y_i))(Y_j(\omega) - \mathcal{E}(Y_j))$.

D'où $E((Y - \mathcal{E}(Y)) {}^t (Y - \mathcal{E}(Y))) = \mathcal{V}(Y)$.

On remarque par linéarité de l'espérance, les $f^{(j)}$ ne dépendant pas de ω , que $E({}^t f^{(j)} (Y - \mathcal{E}(Y)) {}^t (Y - \mathcal{E}(Y)) f^{(j)})$ existe et :

$$E({}^t f^{(j)} (Y - \mathcal{E}(Y)) {}^t (Y - \mathcal{E}(Y)) f^{(j)}) = {}^t f^{(j)} E((Y - \mathcal{E}(Y)) {}^t (Y - \mathcal{E}(Y))) f^{(j)} = {}^t f^{(j)} \mathcal{V}(Y) f^{(j)}$$

Or pour tout ω , $Q_F(\omega) = \|Y(\omega) - \mathcal{E}(Y)\|^2 - \sum_{j=1}^q \langle Y(\omega) - \mathcal{E}(Y), f^{(j)} \rangle^2$, d'où par linéarité de l'espérance $E(Q_F)$ existe et :

$$E(Q_F) = E(\|Y - \mathcal{E}(Y)\|^2) - \sum_{i=1}^q {}^t f^{(i)} \mathcal{V}(Y) f^{(i)} = \sum_{i=1}^k \lambda_i - \sum_{i=1}^q {}^t f^{(i)} \mathcal{V}(Y) f^{(i)}$$

c) Si $F = \mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$, $E(Q_F)$ vaut 0, d'où $\sum_{i=1}^k \lambda_i = \sum_{i=1}^q {}^t f^{(i)} \mathcal{V}(Y) f^{(i)}$.

10.a) Décomposons f dans une base (e'_1, \dots, e'_k) associée aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. $f = \sum_{i=1}^k x_i e'_i$.

On a alors $\mathcal{V}(Y)f = \sum_{i=1}^k x_i \mathcal{V}(Y)e'_i = \sum_{i=1}^k x_i \lambda_i e'_i$ et puisque la base choisie est orthonormée, ${}^t f \mathcal{V}(Y) f = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i^2$.

Or pour tout i , $\lambda_i x_i^2 \leq \lambda_1 x_i^2$ d'où ${}^t f \mathcal{V}(Y) f \leq \lambda_1 \sum_{i=1}^k x_i^2$ et puisque $\sum_{i=1}^k x_i^2 = \|f\|^2$, on obtient l'inégalité : ${}^t f \mathcal{V}(Y) f \leq \lambda_1 \cdot \|f\|^2$.

b) Si F est une droite vectorielle, choisissons un vecteur normé f de cette droite. D'après le 9.b) :

$$E(Q_F) = \sum_{i=1}^k \lambda_i - {}^t f \mathcal{V}(Y) f$$

d'où $E(Q_F) \geq \sum_{i=2}^k \lambda_i$ et cette valeur est atteinte lorsque f est un vecteur propre associé à λ_1 .

c) Dans le cas proposé $\mathcal{V}(Y) = \frac{1}{k}I_k - \frac{1}{k^2}J$ où J est la matrice carrée d'ordre k dont tous les coefficients valent 1. On montre facilement que les valeurs propres de J sont 0 et k d'où l'on déduit que les valeurs propres de $\mathcal{V}(Y)$ sont $\frac{1}{k}$ et 0.

Dans ce cas $\sum_{i=1}^k \lambda_i = \frac{k-1}{k}$ et on a alors : $E(Q_F) = \frac{k-2}{k}$.

Les vecteurs propres associés à la valeur propre $\frac{1}{k}$ engendrent les droites qui réalisent le minimum. On voit que les vecteurs de ce sous espace propre sont les vecteurs (x_1, \dots, x_k) qui vérifient $x_1 + \dots + x_k = 0$.

11.a) En notant q la dimension de F_0 et $(f^{(1)}, \dots, f^{(q)})$ une base orthonormée de ce sous espace vectoriel formé de vecteurs propres de $\mathcal{V}(Y)$, on a alors $\sum_{i=1}^q {}^t f^{(j)} \mathcal{V}(Y) f^{(i)} = \sum_{i=1}^q \lambda_i$ i.e. $E(Q_{F_0}) = 0$. Or la variable aléatoire Q_{F_0} est à valeur positives et d'espérance nulle est donc presque sûrement nulle. Mais $Q_{F_0}(\omega) = 0$ si et seulement si $Y(\omega) - E(Y)$ appartient à F_0 . On peut donc en conclure que $P(Y - E(Y) \in F_0) = 1$, cqfd.

b) On peut, par exemple, compléter une base orthonormée de F en une base orthonormée de F_0 . Alors tout vecteur que l'on rajoute satisfait aux conditions imposées.

c) $f^{(r)}$ est un vecteur non nul combinaison linéaire de vecteurs propres associées à des valeurs propres strictement positives, d'où en décomposant $f^{(r)}$ dans une base orthonormée de F_0 formées de vecteurs propres, on voit que ${}^t f^{(r)} \mathcal{V}(Y) f^{(r)} > 0$.

Soit alors s la dimension de F et $(f^{(1)}, \dots, f^{(s)})$ une base orthonormée de F . On pose $G = \text{Vect}(f^{(1)}, \dots, f^{(s)}, f^{(r)})$ alors $E(Q_G) \geq 0$ et $E(Q_G) = E(Q_F) - {}^t f^{(r)} \mathcal{V}(Y) f^{(r)}$, d'où $E(Q_F) > 0$.

d) F_0 est un support vectoriel de Y d'où $R_s(Y) \geq r$.

Supposons par l'absurde que $R_s(Y) < r$ et soit F un support vectoriel de Y de dimension $R_s(Y)$.

On a forcément $F \subset F_0$ car sinon, $F \cap F_0$ est un support vectoriel de Y de dimension strictement inférieure à $R_s(Y)$ ce qui est absurde.

Donc, $F \subset F_0$ et $F \neq F_0$, d'où $E(Q_F) \neq 0$. Ceci prouve que Q_F n'est pas presque sûrement nulle, ce qui est toujours le cas lorsque F est un support vectoriel de Y . On a donc établi une contradiction.

Finalement, on peut affirmer que $R_s(Y) = r$.

12.a) Raisonnons par l'absurde.

Supposons que $R_s(T) < k$. Alors il existe un sous espace vectoriel F de \mathbb{R}^k de dimension strictement inférieure à k tel que $P(T - E(T) \in F) = 1$.

Soit alors (v_1, \dots, v_k) un vecteur non nul orthogonal à F :

$$P\left(\sum_{i=1}^k v_i(T_i - E(T_i)) = 0\right) = 1 \text{ i.e. } P\left(\sum_{i=1}^k v_i T_i = \sum_{i=1}^k v_i E(T_i)\right) = 1.$$

La variable aléatoire $\sum_{i=1}^k v_i T_i$ est quasi-constante donc sa variance est nulle ce qui est contraire à au moins une des

inégalités du 6.d) puisqu'il existe j tel que $v_j \neq 0$ et donc $\left(v_j^2 \frac{1-p_j}{p_j^2} \prod_{i=1, i \neq j}^k p_i\right) \neq 0$. D'où $R_S(T) = k$.

b) La variable aléatoire $T_1 T_2$ suit la même loi conditionnelle sachant $[T_1 = i] \cap [T_2 > i]$ que $i T_2$.

Or $E(T_2)$ existe d'où $E(T_2|[T_1 = i] \cap [T_2 > i])$ aussi et encore $E(i T_2|[T_1 = i] \cap [T_2 > i])$.

De plus la propriété d'absence de mémoire de la loi géométrique montre que $E(T_2|[T_1 = i] \cap [T_2 > i]) = i + \frac{1}{p_2}$.

Finalement $E(T_1 T_2|[T_1 = i] \cap [T_2 > i]) = i \left(i + \frac{1}{p_2}\right)$.

c) Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $E(T_1 T_2|[T_1 > i] \cap [T_2 = i]) = i \left(i + \frac{1}{p_1}\right)$ comme précédemment.

Les événements $([T_1 > i] \cap [T_2 = i])_{i \in \mathbb{N}^*}, ([T_1 = i] \cap [T_2 > i])_{i \in \mathbb{N}^*}$ forment un système complet d'événements.

On a de plus :

$$P([T_1 > i] \cap [T_2 = i]) = (1 - p_1 - p_2)^{i-1} p_2$$

puisque'il s'agit d'obtenir un individu d'une catégorie autre que 1 et 2 pour les $i - 1$ premiers tirages et un individu de la catégorie 2 au i -ème tirage.

On applique la formule de l'espérance totale :

$$E(T_1 T_2) = \sum_{i=1}^{+\infty} i \left(i + \frac{1}{p_1}\right) (1 - p_1 - p_2)^{i-1} p_2 + \sum_{i=1}^{+\infty} i \left(i + \frac{1}{p_1}\right) (1 - p_1 - p_2)^{i-1} p_1$$

sous réserve de convergence des deux séries qui précédent.

On se ramène à :

$$E(T_1 T_2) = \sum_{i=1}^{+\infty} i^2 (1 - p_1 - p_2)^{i-1} (p_1 + p_2) + \left(\frac{p_1}{p_2} + \frac{p_2}{p_1}\right) \sum_{i=1}^{+\infty} i (1 - p_1 - p_2)^{i-1}$$

toujours avec la réserve de convergence.

Établissons la convergence de ces séries. On reconnaît $E(X^2)$ lorsque X suit la loi géométrique de paramètre $p_1 + p_2$ et une série « dérivée » de série géométrique.

Or $E(X^2)$ existe et $E(X^2) = V(X) + (E(X))^2 = \frac{1 - p_1 - p_2}{(p_1 + p_2)^2} + \frac{1}{(p_1 + p_2)^2}$.

Et puisque $0 < p_1 + p_2 \leq 1$,

$$\sum_{i=1}^{+\infty} i (1 - p_1 - p_2)^{i-1} \text{ converge et } \sum_{i=1}^{+\infty} i (1 - p_1 - p_2)^{i-1} = \frac{1}{(p_1 + p_2)^2}.$$

D'où la réserve de convergence est levée et $E(T_1 T_2) = \frac{p_1 p_2 (2 - p_1 - p_2) + p_1^2 + p_2^2}{p_1 p_2 (p_1 + p_2)^2} = \frac{(p_1 + p_2)^2 - p_1 p_2 (p_1 + p_2)}{p_1 p_2 (p_1 + p_2)^2}$

i.e.
$$E(T_1 T_2) = \frac{1}{p_1 p_2} - \frac{1}{p_1 + p_2}.$$

d) D'après la question c), $\text{Cov}(T_1, T_2) = E(T_1 T_2) - \frac{1}{p_1} \frac{1}{p_2} = -\frac{1}{p_1 + p_2}$. On a donc plus généralement pour $i \neq j$, $\text{Cov}(T_i, T_j) = -\frac{1}{p_i + p_j}$. Ceci prouve que la matrice Π est la matrice de variance-covariance du vecteur aléatoire T .

Soit un vecteur $v = (v_1, \dots, v_k)$ tel que $\Pi v = 0$ et posons $X = \sum_{i=1}^k v_i T_i$. Alors d'après la question 8.a), $V(X) = {}^t v \Pi v$ donc $V(X) = 0$. Avec le résultat de la question 6.d), on en déduit que pour tout $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $v_j = 0$. On a donc établi

que Π est inversible .

ANALYSE ÉCONOMIQUE ET HISTORIQUE DES SOCIÉTÉS CONTEMPORAINES

DURÉE : 4 HEURES.

Tout verbiage doit être évité et il est expressément recommandé de ne pas dépasser huit pages, sauf justification par la qualité du résultat.

Il sera tenu compte des qualités de plan et d'exposition, ainsi que de la correction de la langue.

Il n'est fait usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

ESCP-
EUROPE

SUJET

**EXISTE-T-IL UNE FISCALITÉ OPTIMALE
POUR ASSURER LA CROISSANCE ÉCONOMIQUE ?
VOUS POUVEZ ILLUSTRER VOTRE PROPOS
PAR DES EXEMPLES HISTORIQUES TIRÉS DES
PÉRIODES COUVERTES PAR LE PROGRAMME.**

CORRIGÉ

Par Jean-Luc Dagut, professeur à Ipecom.

Introduction

Choc fiscal, écotaxes, « ras-le-bol » fiscal, « fiscal cliff », dumping fiscal, paradis fiscaux, exode des fortunes et des bases taxables, ébauches de lutte contre l'optimisation fiscale, taxe sur les transactions financières, pacte de compétitivité, puis de responsabilité... La fiscalité est décidément au cœur de l'actualité.

Sujet sensible, source toujours de mécontentements, reflet des divergences d'opinions et d'intérêts, jugée excessive par les uns, mal répartie pour les autres, la fiscalité représente certainement un enjeu majeur de société.

Au XIX^e siècle, des taux d'imposition de 10 à 12 % du revenu national étaient jugés comme des maximums, spoliateurs et contre-productifs au-delà. En 1974, le président V. Giscard d'Estaing déclarait que des taux de prélèvements obligatoires supérieurs à 40 % du PIB feraient basculer la France dans un système socialiste et une économie de pénurie. Ces taux atteignent 46 % en 2014, plaçant notre pays au deuxième rang des PDEM, après le Danemark, alors que la moyenne européenne s'établit autour 38 % et celle de l'OCDE à 35 %.

La question du « bon taux » d'imposition pour une économie, qui soit à la fois supportable et non désincitatif pour les agents, et suffisant pour permettre aux pouvoirs publics d'assurer leurs grandes missions, paraît donc essentielle. La structure du système est par ailleurs stratégique : quels types d'impôts choisir, et comment les répartir entre les différentes classes de contribuables. La « matière fiscale » est

large et les assiettes variées : revenus du travail, du capital, de l'épargne, l'habitat, les patrimoines, les mutations de propriété, la consommation, les permis et droits, les importations... Comment pondérer les assiettes et quel mode de calcul appliquer : impôt forfaitaire, proportionnel, progressif ?

Le choix d'un système fiscal (assiettes, taux) a certainement de fortes implications économiques. La question de savoir s'il peut exister un « système fiscal optimal » doit être examinée avec plus de précision.

La réponse à une telle question dépend évidemment des points de vue et des contextes. Les arguments d'inspiration libérale en faveur d'une modération de l'impôt, qui conditionne dans cette perspective le bon fonctionnement et la prospérité d'une économie de marché, doivent être rappelés tout d'abord (I). Nous verrons pourtant dans un second temps que des hausses d'impôts ne sont pas toujours contraires à la croissance. Elles ne l'ont pas été pendant une bonne partie du xx^e siècle. Une fiscalité redistributive frappant les plus hauts revenus et exonérant les plus faibles peut être également efficace dans certaines conditions (II). Il apparaît enfin que la mondialisation contemporaine rebat les cartes fiscales et contraint à des réadaptations majeures (III).

I. Les arguments clés de la théorie libérale : la croissance requiert une fiscalité faible, (A) stable (B), exonérant largement les facteurs de production et les comportements d'offre (C).

A. Depuis le démarrage de la croissance au début du xix^e siècle, les économistes (libéraux) ont plaidé pour un impôt minimum. « Le meilleur des impôts est le dernier en importance », résume David Ricardo dans *Principes de l'économie politique et de l'impôt* (1817). Celui-ci est alors assez largement perçu comme une spoliation, et l'Etat, improductif par nature, et mauvais dans tous ses usages, doit circonscrire au minimum ses prélèvements et ses interventions. « Un impôt exagéré détruit la base sur laquelle il repose ». Cette formule de J.-B. Say (1803) exprime déjà l'idée que « trop d'impôt tue l'impôt ». En décourageant les comportements d'offre, en amputant la capacité des consommateurs à acheter, en favorisant la fraude et l'économie clandestine, un impôt excessif affaiblit l'activité économique. Comment stimuler les comportements productifs si un impôt progressif confisque une large fraction des revenus supplémentaires résultant d'efforts supplémentaires ? A. Laffer et la supply side economics ont remis ces idées au goût du jour dans les années 1970-80, expliquant que la chute de la croissance aux EU et dans les PDEM provenait d'une fiscalité excessive. La courbe de Laffer montre qu'une hausse des taux d'imposition produit deux effets en fonction de son importance. Si elle est modérée, elle accroît dans un premier temps les recettes fiscales, et tend à avoir un effet positif sur l'activité, les agents accentuant leurs efforts *via* des « effets-revenu » afin de gagner plus pour compenser l'alourdissement de la ponction fiscale. Dans un second temps, si les taux d'imposition progressent encore au-delà d'un seuil de « supportabilité », ces « effets-revenu » font place à des « effets de substitution ». Les agents se découragent et substituent du loisir au travail, dans l'impossibilité de compenser les hausses d'impôts par des revenus supplémentaires. Les effets désincitatifs de l'impôt se généralisent à l'ensemble des comportements d'offre : offre de travail, offre de production, offre de capitaux, propensions à entreprendre, à innover, à épargner, à s'éduquer. L'économie ploie sous un effet de découragement, tandis que se développent les activités souterraines. L'Etat est lui-même victime de sa cupidité. Les recettes fiscales s'évaporent. Un taux d'imposition

théorique de 100 % produirait une recette fiscale nulle. La question consisterait donc ici à déterminer quel pourrait être le taux d'imposition optimal, qui maximiserait à la fois la croissance, les revenus privés et les recettes de l'Etat. Celui-ci semble difficile à évaluer concrètement. Certains pays manifestent une plus ou moins grande tolérance à l'impôt. La politique de baisse d'impôts suivie par le gouvernement Reagan dans les années 1980 s'est soldée par un accroissement important du déficit budgétaire. Le pari d'accroître les recettes fiscales par des baisses de taux ne semble pas avoir été validé. En apparence toutefois, car le creusement du déficit a été dû surtout à un accroissement considérable des dépenses militaires au cours de cette période. L'économiste J. Pisany-Ferry avait calculé qu'un sixième seulement des baisses d'impôts consenties avait pu être récupéré lors des années suivantes par des recettes fiscales supplémentaires résultant d'un regain de croissance lié aux dégrèvements fiscaux. Ces calculs sont toutefois sujets à caution. La croissance est bien revenue aux EU, grâce certes à un ensemble de facteurs, dont il est toujours difficile de faire la part exacte. L'assouplissement de l'environnement fiscal y aura vraisemblablement participé.

B. Dans le prolongement de ces idées, Finn E. Kydland et Edward Prescott (Prix Nobel 2004) ont expliqué qu'une fiscalité optimale doit être non seulement modérée, mais aussi et surtout stable, pour être crédible et efficace. Ce qui doit être le cas d'ailleurs pour toutes les politiques économiques. Leur efficacité dépend de leur stabilité, qui fonde leur crédibilité (« Rules rather than discretion: the inconsistency of optimal plans », *Journal of Economic Policy*, 1977). Pour ces représentants de la Nouvelle Economie Classique (NEC), tout dépend en effet des anticipations rationnelles des individus. Ceux-ci modifient leurs comportements en fonction des changements de politiques. Leurs décisions s'inscrivent dans une cohérence temporelle de moyen terme, en réponse à l'instabilité des politiques discrétionnaires de court terme. En matière de fiscalité, une baisse ponctuelle des impôts provoquant des déficits publics a des chances de susciter chez les agents des comportements d'épargne plutôt que de dépense, en prévision des réajustements fiscaux à venir. Les effets espérés de relance par la demande sont alors compromis. Une hausse des impôts, en sens inverse, tend à exercer des effets désincitatifs à moyen terme sur l'offre, et créer un « choc d'offre » négatif. Dans un entretien au journal « *Les Échos* » consacré à « L'audit de la France 2007 », E. Kydland déclarait que l'économie française était en bonne santé, mais « pouvait encore progresser en réduisant sa pression fiscale ». Si selon lui, la France ramenait ses taux d'imposition au niveau américain, le produit des impôts n'en souffrirait pas, car, après une période de transition, la production serait de 40 % plus élevée ! Selon ses calculs, publiés dans *l'Americain Economic Review* (mars 2002), la hausse de 40 % de la production entraînerait une hausse du pouvoir d'achat de 18 %, car les Français travailleraient davantage. Bref, une forte hausse de la production est possible si les Français acceptent de réduire leurs loisirs, qui sont aussi par ailleurs un temps auquel ils doivent une partie de leur bien-être. L'importance de règles stables est souvent rappelée par ailleurs par les dirigeants d'entreprises eux-mêmes. Il est risqué d'investir et d'engager des projets de long terme dans un environnement fiscal et réglementaire mouvant. L'instabilité fiscale affecte la rentabilité des projets et tend à inhiber l'initiative.

C. De façon plus précise, quel type d'imposition paraît économiquement le moins nuisible dans une logique générale d'économie de l'offre ? L'impératif est ici de minorer la charge fiscale pesant sur les entreprises, et sur les facteurs de production. Le dynamisme de l'économie dépend des investissements et de la profitabilité.

Des taxes sur le capital productif ou sur l'EBE paraissent donc économiquement absurdes. L'imposition des bénéfices (IS) doit rester modérée, et il paraît pertinent de la réduire lorsque ceux-ci sont réinvestis. De même, un régime bonifié d'IS peut s'appliquer aux PME et TPE, dont la rentabilité est souvent plus fragile. L'avantage fiscal procuré par la méthode de l'amortissement dégressif peut être élargi pour favoriser l'investissement. Les impôts sur la détention d'actions et sur les dividendes doivent rester raisonnables également. Les actionnaires, qui apportent leur capital aux entreprises, jouent un rôle économique clé, et prennent un risque financier. Des mesures de défiscalisation des revenus de l'épargne placée en actions, telles que celles qui existent en France (PEA, PEA-PME, Assurances vie en unités de compte) sont opportunes pour orienter celle-ci vers l'investissement productif. Certaines « niches fiscales » peuvent de même être créées pour encourager certains investissements (immobilier, PME, Outre-Mer). F.V. Hayek considérait de son côté qu'il ne fallait pas taxer les héritages lorsque ceux-ci concernaient des entreprises familiales, car leur développement s'étale sur plusieurs générations et le paiement de droits de succession élevés peut contraindre à leur dissolution. Concernant le facteur travail, les impôts doivent de même demeurer strictement limités. Au niveau des entreprises pour ne pas pénaliser l'embauche et la rentabilité, et au niveau des salariés eux-mêmes pour ne pas désinciter à l'effort. Les impôts doivent être proportionnels (flat tax). Ce que préconisait d'ailleurs, si l'on se souvient, la Déclaration des Droits de l'homme de 1789 (article 19) : « chaque citoyen doit contribuer à hauteur de ses facultés ». Autrement dit en proportion de celles-ci (soit de façon croissante en valeur absolue), et non de façon exponentielle (dans un système progressif, l'impôt augmente plus vite que le revenu. Dans le système français par exemple, peu équitable au regard de la Déclaration des Droits, 1,5 % des foyers fiscaux paient 42 % de l'IR, et près de la moitié en sont exonérés...). Ainsi peuvent se dessiner les grands traits d'une « fiscalité optimale » pour la croissance économique. Minorer les impôts directs sur les revenus des facteurs, les revenus d'activité, et sur le capital productif lui-même, pour encourager son accumulation. La fiscalité, puisqu'il en faut bien, devrait être alors à dominante indirecte (impôts sur les produits, TVA). Celle-ci est réputée plus injuste, parce que d'incidence dégressive. Mais un système fiscal tendu vers l'efficacité économique peut servir indirectement l'équité sociale, s'il concourt à la consolidation d'une économie dynamique, dont les retombées profitent à tous (théorie du trickle down), et améliorent notamment le sort des plus démunis (J. Rawls).

II. La croissance dans l'histoire s'est pourtant accompagnée d'une hausse générale de la pression fiscale (A). Des hausses d'impôts concernant les plus hauts revenus et patrimoines ne sont pas non plus forcément contre-productives (B), tandis que des baisses d'impôts visant à soutenir la consommation ont pu paraître efficaces (C).

A. Pendant une période significative de l'histoire moderne, l'alourdissement de la pression fiscale et parafiscale est allé de pair avec une accélération de la croissance. Les taux de prélèvements obligatoires et de dépenses publiques, relativement au PIB, ont quadruplé environ en Europe entre le ^{xix}e siècle et la fin du ^{xx}e siècle. Cela, en vertu « d'effets de déplacement » liés aux guerres et aux crises selon Peacock-Wiseman, ou bien de façon plus structurelle selon la loi de Wagner, en liaison avec le développement socio-économique. L'essor des dépenses publiques au cours des trente glorieuses a constitué sans doute l'un des piliers de la croissance. En France, les taux de prélèvements obligatoires destinés à les financer ont quasiment doublé entre 1945 et 1985, passant de 23 % à 45 % du PIB,

tandis que celui-ci a quadruplé. Ces progressions ont été plus fortes encore dans les pays scandinaves. Des « modèles de capitalisme » se sont formés, plus ou moins interventionnistes ou libéraux : modèle rhénan, modèle anglo-saxon selon M. Albert (*Capitalisme contre capitalisme*, 1991) ; économies libérales de marché (ELM), économies coordonnées de marché (ECM) selon P. Hall et D. Soskice (*Varieties of Capitalism*, 2001) ; ou encore les cinq modèles de capitalisme décrits par B. Amable (*Les cinq capitalismes*, 2005). Il est impossible de trouver par conséquent une corrélation universelle et éternelle entre la fiscalité et la croissance. Chaque société et époque invente son propre modèle. Selon P. Rosanvallon, la question du seuil de tolérance à l'impôt est avant tout culturelle. Des prélèvements jugés confiscatoires dans certaines sociétés à certaines époques peuvent être très bien acceptés dans d'autres. Cependant, comme nous le verrons dans la III^e partie, l'ouverture des frontières est aujourd'hui créatrice de contraintes compétitives pour tous les pays, érodant la singularité des modèles historiques nationaux. La compétition économique induit une concurrence fiscale, et une tendance au nivellement par le bas.

B. Une fiscalité redistributive peut concourir à la croissance, dans une certaine mesure, et de différentes façons. Si tout d'abord une « croissance optimale » va de pair avec une optimisation du revenu du plus grand nombre, il paraît légitime de faire intervenir la fiscalité pour y parvenir. C'est ce que tentait de démontrer notamment A.-C Pigou (*The Economy of Welfare*, 1920). Si les revenus sont soumis selon lui à la règle de décroissance de l'utilité marginale, ponctionner une fraction de son revenu à « un riche » pour la redistribuer à « un pauvre », augmente davantage le bien-être du pauvre que cela ne réduit celui du riche. Le bien-être collectif s'en trouve ainsi augmenté. Il convient donc d'appliquer, chaque fois que cela est possible, la « règle potentielle de Pareto ». L'Etat, selon celle-ci, est fondé à intervenir si son action permet d'améliorer la situation d'un individu davantage qu'elle ne détériore celle d'un autre. Exception donc au principe de l'optimum de Pareto, et organisation d'un « optimum non parétien ». L'intervention fiscale de l'Etat doit viser aussi par ailleurs selon Pigou à internaliser les externalités. Des « taxes pigouviennes », appliquées aux producteurs d'externalités négatives et aux bénéficiaires d'externalités positives, et reversées aux victimes d'externalités négatives et aux producteurs d'externalités positives, concourent à corriger les défaillances du marché, et œuvrent à une meilleure allocation des ressources. Plus récemment, l'économiste T. Picketty a montré dans une vaste étude (*Le capital au XXI^e siècle*, 2014) que les revenus du capital (r) tendent à progresser plus vite à long terme que les revenus du travail, approximativement indexés sur la croissance économique (g). Au-delà des conséquences inégalitaires de cette évolution, la croissance elle-même peut en pâtir, car une grande partie des très hauts revenus issus du capital provient de phénomènes de rentes. Celles-ci peuvent s'avérer parasites si elles accaparent une fraction excessive du revenu national au détriment d'autres usages qui seraient plus productifs (rentes immobilières, financières...). Ricardo avait montré en son temps que le gonflement de la rente foncière pouvait ruiner les profits industriels et la croissance. Le retour des rentes dans les sociétés du XXI^e siècle pourrait avoir selon Picketty le même type de conséquence. Pour y parer, l'auteur plaide pour l'adoption d'un « impôt mondial sur le capital », et une accentuation de la progressivité de l'IR sur le centile et le millième supérieur (la progressivité ne s'appliquant dans le système français d'IR qu'aux revenus inférieurs à 150 000 € par an, exception faite de la taxe exceptionnelle à 75 % sur les revenus supérieurs au million, redevable par les entreprises). Par ailleurs, une redistribution partielle des revenus *via* la fiscalité peut être source d'un meilleur consensus social, et peut-être

aussi, d'une meilleure efficacité économique à travers cela. Il n'est pas impossible que celle-ci dépende en partie, dans des sociétés démocratiques, d'une certaine équité fiscale, ou du moins de la perception que les citoyens en ont. Une étude récente du FMI (*Redistribution, Inequality and Growth*, 2014), portant sur 150 pays durant un demi-siècle, montre qu'une inégalité plus forte est corrélée empiriquement à une croissance plus faible. Répartir plus équitablement les revenus *via* un impôt partiellement redistributif pourrait permettre de sortir du « dilemme d'Okun » (*Equality and Efficiency: the Big Tradeoff*, 1975), le sentiment d'une plus grande justice sociale alimentant l'effort collectif. Là réside peut-être le fondement de la réussite des sociétés scandinaves. Tout ceci d'autant plus que la finalité de l'impôt est de financer certaines dépenses d'utilité publique et indispensables à la croissance. R. Barro lui-même a démontré la contribution positive des dépenses publiques au processus de croissance endogène. On a pu observer à cet égard que les politiques de baisses d'impôts décidées depuis les années 1980 dans les pays les plus libéraux se sont souvent soldées par une dégradation sensible des équipements et des services publics, dommageable à l'efficacité globale. De même, et plus gravement, l'une des causes essentielles du sous-développement tient souvent au faible rendement du système fiscal, qui bloque la réalisation de certains investissements indispensables au développement des activités.

C. Ces arguments tendent à s'articuler avec la logique keynésienne. Dans l'optique de la demande privilégiée par celle-ci, les politiques fiscales ont un rôle à jouer. Face à la « loi psychologique fondamentale », selon laquelle la propension à dépenser s'affaiblit historiquement avec la hausse du revenu par tête, transférer progressivement la charge fiscale sur les hauts revenus à forte propension à épargner, et alléger celle des classes populaires à forte propension à consommer serait de nature à soutenir la demande et la croissance, et éviter la stationnarité. Le welfare state béveridgien devrait avoir cette fonction redistributive et macroéconomique. A plus court terme, la relance de l'économie par la consommation peut justifier en sens inverse des coupes d'impôts (tax cuts), mais qui doivent de même être précisément ciblées sur les catégories à forte propension à dépenser. Des baisses d'impôts, en augmentant le revenu disponible, nourrissent la demande, et déclenchent un effet multiplicateur. L'accroissement du PIB qui en résulte, *via* le jeu du multiplicateur fiscal ($k = -c / 1 - c$), amène de nouvelles recettes fiscales propres à rééquilibrer le budget. Des baisses de taux d'imposition permettraient donc là aussi d'augmenter les rentrées fiscales, mais par le truchement ici de la stimulation de la demande. L'application d'un policy mix, combinant des mesures budgétaires, monétaires, et fiscales, avait permis à l'économie américaine d'atteindre la croissance potentielle (optimale) dans les années 1960, et résorber le gap d'Okun. Ces principes de l'économie keynésienne doivent être nuancés. Des baisses d'impôts sur le revenu peuvent donner lieu à un accroissement de l'épargne plutôt que de la dépense, surtout en période de crise. Des allègements d'impôts indirects (TVA) par ailleurs, ne sont pas forcément répercutés dans les prix. Et dans le cas le plus favorable, si une stimulation de la consommation s'opère, elle profitera notamment aux biens de consommation durables importés, avec des effets négatifs sur l'équilibre extérieur.

III. La mondialisation rebat les cartes fiscales. La souveraineté et l'indépendance des Etats sont remises en cause dans ces domaines traditionnellement régaliens (A). Optimiser la croissance dans ce cadre grâce à des outils fiscaux consiste avant tout à ne pas faire plus mal que les voisins, et ne pas pénaliser la compétitivité de l'offre nationale (B). Le système français paraît mal adapté à cet égard (C).

A. La mondialisation met les Etats en échec fiscal. Les firmes s'implantent, lorsque les contraintes économiques le permettent, là où la pression socio-fiscale est la moindre. Une partie de la fuite de la croissance dans certains PDEM, et des transferts internationaux d'activités, tient certainement aux écarts de pression socio-fiscale entre les pays. Les FMN de surcroît adoptent des stratégies d'optimisation fiscale visant à ramener leurs impôts à peu de chose. En consolidant ou déconsolidant leurs bénéficiers, elles transfèrent ceux-ci comptablement dans les sociétés du groupe situées dans les pays qui imposent le moins. La technique des prix de transferts permet également de sur ou de sous-facturer certains biens et services dans les échanges entre filiales du groupe afin d'annuler les bénéfices de celles installées dans des pays à forte imposition et gonfler ceux de celles présentes dans les pays fiscalement les plus cléments. Les techniques d'évasion fiscale peuvent aller plus loin, *via* des envois de fausses factures, des « carrousels de TVA », des paiements de redevances artificielles (cf. Google, Amazon et les autres géants de l'économie numérique), ou l'émigration directe des sièges sociaux vers des paradis fiscaux. Ces pratiques profitent beaucoup plus aux grands groupes multinationaux qu'aux PME. C'est ainsi que les sociétés du CAC 40 n'acquittent en France qu'environ 8 % de leurs bénéfices en IS, et les grands groupes en général 5 à 6 % selon le rapport Bocquet (2013). Face à ces pratiques de contournement, la fiscalité la plus bénéfique pour la croissance ne peut être dès lors que minimale, susceptible d'attirer et de retenir les grands groupes et leurs précieux IDE. Une « course au moins-disant » fiscal s'est ainsi engagée entre les Etats. En Europe même, comme l'a montré notamment le rapport de J. Le Cacheux et C. Saint Etienne (2005), une forte concurrence fiscale s'est développée, faussant les rapports de compétitivité et nourrissant des détournements de trafic et de localisation. Entre l'Irlande, Chypre, certains PECO, et la France, les taux d'imposition officiels sur les sociétés vont du simple au triple. Les assiettes taxables ne sont pas les mêmes. Les deux tiers des entreprises ne paient pas d'impôts sur les bénéfices ainsi en Irlande. Le Luxembourg doit une large partie de sa prospérité à une longue tradition d'accueil de sociétés écrans et de capitaux d'origine trouble protégés par le secret bancaire. L'harmonisation fiscale au sein de l'union, condition indispensable à une concurrence non faussée, représente un chemin improbable et lourdement pavé d'embûches. Significativement, en dépit des aides européennes massives accordées à l'Irlande et Chypre notamment pour faire face à la crise, ces pays n'ont nullement consenti en contrepartie à une « normalisation » de leur fiscalité appliquée aux entreprises. Le Royaume-Uni s'est fait fort par ailleurs d'offrir un « tapis rouge » pour accueillir les candidats à l'exil fiscal victimes de matraquage en France.

B. Dans ce contexte, la fiscalité doit évoluer. Les instruments efficaces hier ne le sont plus aujourd'hui. D'un point historique très général, certains économistes ont montré que les caractéristiques des systèmes fiscaux ont suivi globalement et logiquement les grandes étapes de la croissance économique. En suivant le cheminement décrit par W. Rostow, la phase pré-industrielle et celle du take off ont été caractérisées par une faible pression fiscale, correspondant à un faible niveau de développement, et consistant en des impôts directs sur le foncier, source principale de richesse, et des impôts indirects sur les produits. La « marche vers la maturité » s'est accompagnée d'une montée des impôts à la production, et de prélèvements sur le foncier et l'agriculture pour financer l'accumulation primitive du capital industriel. L'avènement de la société d'abondance s'est traduit par l'essor des impôts sur le revenu et sur la consommation de masse. Dans la

nouvelle phase historique du capitalisme mondialisé où nous sommes entrés, le système fiscal doit à nouveau être amendé. La charge fiscale doit être abaissée, mais surtout répartie en sorte de ne pas gêner les entreprises et l'emploi face à la concurrence internationale. L'économiste P. Aghion, dans un article récent, vantait à cet égard les vertus de l'équation scandinave. Les pays nordiques ont su préserver à la fois leur dynamisme économique et une grande partie de leur Etat-providence. La recette : de faibles impôts à la production, sur le capital, l'emploi, et les bénéficiaires, en sorte d'entretenir l'esprit d'entreprise, et une forte imposition des revenus et de la consommation pour financer le modèle social. Surtout, un financement du système social par des impôts et non par des cotisations. Un système béveridgien est à cet égard bien préférable à un système bismarckien. C'est, dans ce système, l'impôt général, à large assiette, qui finance la protection sociale, et non les seules cotisations assises sur l'emploi. Celles-ci grèvent le coût du travail, et fragilisent les embauches et la compétitivité. La « TVA sociale » paraît être le mode de financement le plus approprié, permettant un financement du système par les consommateurs plutôt que par les travailleurs. La TVA perçue sur les produits importés, c'est-à-dire sur le travail et la valeur ajoutée étrangère, concourt de surcroît au financement du système social national. Les taux de TVA sont ainsi de 25 % dans les pays scandinaves, soit les plus hauts d'Europe, contre 20 % pour le taux normal dans notre pays, remonté récemment dans la moyenne européenne (mais 10 % pour le taux intermédiaire, 5,5 % pour le taux réduit, et 2,1 % pour le taux super réduit). L'Espagne offre un autre exemple intéressant. En 2014, l'impôt sur les sociétés et l'impôt sur le revenu des tranches inférieures doivent être réduits, ainsi que, à hauteur de 75 %, les cotisations sociales payées par les employeurs cette année pour les nouvelles embauches. Ce plan de « dévaluation fiscale », l'Espagne membre de la zone euro ne pouvant dévaluer sa monnaie, doit être contrebalancé par un alignement des taux réduits de TVA sur certains produits, de 4 % et 10 %, sur le taux normal de 21 %. Dans une étude publiée en 2013, la banque espagnole BBVA avait calculé qu'une réduction de 3,5 points des cotisations sociales conjuguée à une hausse de deux points de la TVA pourrait générer 0,74 point de croissance et créer plus de 200 000 emplois en deux ans. Un effet équivalent à celui d'une dépréciation d'environ 10 % du taux de change. Le gouvernement italien de Mattéo Renzi a décidé de même des mesures assez voisines de baisses d'impôts sur les revenus et sur les sociétés.

C. Dans ce contexte, la France paraît en mauvaise posture et en retard d'une réforme. La « remise à plat » nécessaire ne sera sans doute pas « le grand soir fiscal » espéré par T. Picketty, J. Généreux et d'autres, mais devrait plutôt consister en des réformes qui libèrent les forces productives. Des mesures telles que le crédit-impôt-recherche, adopté sous le gouvernement précédent, va certainement dans le sens souhaité. Le nouveau crédit d'impôt compétitivité-emploi (CICE) également, bien que mêlant de façon confuse un objectif d'emploi à un objectif de compétitivité. Le pacte de responsabilité adopté en 2014, qui retire des charges patronales les cotisations pour la famille, pour une trentaine de milliards, est enfin bienvenu, mais ne doit pas être assorti de « contreparties », car loin de s'apparenter à un « cadeau au patronat », il s'agit plutôt de rendre une partie du « trop perçu », les marges des entreprises étant au plus bas dans un pays où le « coin social » reste le plus haut du monde (selon l'OCDE, les cotisations patronales représentent en France 11,3 % du PIB, soit deux fois plus que la moyenne OCDE, et 6,7 % en Allemagne, 3,8 % au RU). En mars 2014, se sont tenues « Les Assises de la fiscalité », voulues par le gouvernement et à la demande

surtout des entreprises (MEDEF, CGPME...), en vue de définir les modalités d'une atténuation supplémentaire de la fiscalité qui leur est appliquée. Les pouvoirs publics semblent avoir enfin pris conscience de l'urgence d'améliorer leur rentabilité afin de les aider à survivre, devenir plus compétitives et créer des emplois. La rentabilité des entreprises françaises est en effet tombée à un niveau critique. L'ENE (Excédent Net d'Exploitation) ne représente plus que 13 % de la valeur ajoutée, contre plus de 20 % au Royaume-Uni, et près de 25 % en Allemagne. L'EBE est tombé à 27 % de la VAB, et à 21 % dans l'industrie, contre 33 % dans l'industrie allemande. Cette faiblesse de la rentabilité affecte les recettes mêmes de l'Etat. En France, les recettes de l'IS ne représentent que 2,3 % du PIB en 2012, contre 2,8 % en Allemagne, et 2,9 % au RU. Et pourtant le taux de l'IS français est l'un des plus élevés d'Europe, et du monde : 33,33 %, et 38 % pour les grandes entreprises ayant un chiffre d'affaires supérieur à 250 millions d'€. Avec de moindres taux d'imposition, nos concurrents européens parviennent à prélever une recette fiscale plus importante, car la profitabilité de leurs entreprises, moins taxées, est meilleure. En 2012, les prélèvements opérés sur les entreprises françaises se sont élevés, selon les chiffres du Trésor public, à 286 Mds d'€, soit 14,5 % du PIB : 178 Mds de cotisations patronales, 65 Mds d'impôts sur les facteurs de production, 47 Mds d'impôts sur le revenu et le patrimoine des entreprises (dont l'IS). Particularité française, les impôts sur les facteurs de production (C3S, CVAE...), supportés notamment par les grandes entreprises, sont les plus hauts d'Europe : 3,2 % du PIB, contre 1,4 % en Europe et 0,4 % en Allemagne. A cela s'ajoute une multitude de petites taxes pesant sur les entreprises : 179 ont un rendement inférieur à 100 millions d'€, contre 3 en Allemagne et zéro en GB, et 150 coûtent plus à prélever qu'elles ne rapportent... Améliorer la rentabilité des entreprises françaises, et renforcer l'attractivité du territoire pour les IDE, devrait passer en priorité par une baisse rapide du taux de l'IS à 25 %, qui serait proche de la moyenne européenne (mais encore très supérieur à celui des pays du dumping fiscal : 12,5 % en Irlande, et parfois moins dans certains PECO). Toutes les entreprises ne font pas, loin s'en faut, de l'optimisation fiscale, *via* des paradis fiscaux. Et les PME et TPE très peu. Négociations en cours...

Conclusion

L'examen de ces arguments montre qu'il n'existe pas de système fiscal optimal qui transcende les époques et les lieux. Un système d'imposition qui frappe la richesse est toujours le fruit de rapports de force entre groupes économiques et sociaux aux intérêts différents. Sur le plan économique, un bon système, ou le moins mauvais, doit être adapté à l'environnement.

La croissance historique des PDEM au xx^e siècle a pu s'accompagner d'une pression fiscale croissante, dans le cadre d'économies encore relativement fermées. La contrepartie de ces prélèvements sous forme de dépenses publiques paraît avoir soutenu plutôt efficacement la dynamique économique, dans une logique keynésiano-wagnérienne. Les niveaux de prélèvements atteints aux alentours des années 1980 ont commencé toutefois à être jugés dirimants, cela d'autant plus que le taux d'ouverture des économies avait sensiblement progressé. La concurrence entre les firmes est devenue de plus en plus une concurrence entre les nations, dont une composante significative s'est révélée liée désormais aux écarts de coûts socio-fiscaux. Une course au « moins-disant » fiscal s'est engagée au nom de la compétitivité, celle-ci étant présentée comme le socle désormais incontournable de la croissance nationale.

La crise actuelle a amené un retour partiel des Etats dans la régulation économique. Le creusement des dettes publiques les contraint à chercher de nouvelles ressources. Un écart de plus en plus injuste s'est creusé entre les contribuables nationaux et les firmes et banques nomades capables de délocaliser leurs bases taxables. Depuis 2009, les réunions du G20 ont mis à l'ordre du jour les questions relatives à la fraude et à l'évasion fiscales. Le coût est considérable. Le montant des pertes fiscales des Etats membres de l'UE est estimé à 1 000 Milliards d'€ en 2012 par la Commission européenne, soit 6 % du PIB de l'Union (en France, Bercy évalue le manque à gagner annuel autour de 80 milliards, soit 40 % des recettes fiscales). L'OCDE a ainsi dressé une liste noire des paradis fiscaux et des « Etats non coopératifs ». Des échanges d'informations entre services fiscaux sont devenus obligatoires depuis l'adoption du FACTA (Foreign Account Tax Compliance Act) par les Etats-Unis en 2010, et d'une directive européenne sur la coopération fiscale en 2011 (applicable à compter de 2015). Suite aux amendes historiques infligées par les EU aux banques UBS et Crédit Suisse pour incitation à la fraude fiscale, la Suisse, puis le Luxembourg notamment, l'Autriche, Singapour..., ont accepté de lever le secret bancaire. Des rapatriements de fortunes ont amené des recettes exceptionnelles au Trésor public des grands PDEM. Ces efforts de « normalisation » toutefois ont essentiellement concerné les particuliers. Les grandes entreprises restent encore assez largement épargnées. Chaque Etat, craignant de les affaiblir dans la compétition internationale, ou de les faire fuir, tend à fermer les yeux sur certaines pratiques. Il est remarquable que les amendements proposés par la commission Berger afin de contrôler l'optimisation fiscale aient été annulés par le Conseil Constitutionnel en 2014, comme étant hostiles à la liberté d'entreprise. Il en est de même pour la régulation financière, et l'échec du projet de taxation des transactions financières, repoussé par les grands Etats et adopté *a minima* à des taux symboliques par seulement onze pays de l'UE pour plaire à leurs opinions publiques.

Quel pourrait être en conséquence un système fiscal optimal dans le cadre d'une économie mondialisée ? Selon le FMI, face à la mondialisation des firmes, qui rabaisse les Etats à se livrer une guerre fiscale mercantiliste et délétère, la seule solution consisterait à créer un impôt sur les bénéfices mondiaux, les systèmes de prélèvement nationaux étant irrémédiablement dépassés.

Enfin, bien sûr, une imposition raisonnable qui n'altère pas trop l'efficacité économique exige une maîtrise réelle des dépenses publiques. Moins dépenser pour mieux dépenser. Optimiser la dépense plutôt que la recette. Comme le résumait l'humoriste Alphonse Allais, « demander plus à l'impôt, et moins au contribuable... »

ANALYSE ÉCONOMIQUE ET HISTORIQUE DES SOCIÉTÉS CONTEMPORAINES

DURÉE : 4 HEURES.

Il est recommandé de ne pas dépasser dix pages.

Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

ESSEC

SUJET

LE PROTECTIONNISME A-T-IL DE L'AVENIR DANS UNE ÉCONOMIE DE PLUS EN PLUS INTERNATIONALISÉE ?

CORRIGÉ

Par Frédéric Besset, professeur à Intégrale, à Paris.

Introduction

Le protectionnisme est l'ensemble des stratégies de protection de la production nationale visant à renchérir, décourager voire interdire les importations de matières premières (20 % du commerce de marchandises) – en général agricoles – ou de produits manufacturés (80 % du commerce de marchandises) voire de services (20 % des échanges totaux).

Le protectionnisme a longtemps été la règle dans le commerce international, théorisé notamment par les auteurs mercantilistes du ^{xvi}^e au ^{xviii}^e siècles. Son démantèlement *via* l'instauration du libre-échange, d'abord par la seule Grande-Bretagne (abolition des *corn laws* en 1846 par Robert Peel), puis par l'ensemble des pays industrialisés voire émergents après 1945, a été le moteur de la mondialisation contemporaine. Depuis 1945 les seules exportations de marchandises ont été multipliées par près de 200 en valeur ; elles ont toujours crû à un rythme supérieur à celui de la production mondiale.

Dans sa dimension économique la mondialisation peut être décrite comme une internationalisation des échanges par la création d'un marché mondial des biens et des services mais aussi du capital et du travail. Son socle idéologique est le libéralisme qui depuis la première formulation par David Ricardo de la théorie des avantages comparatifs en 1817 – tout pays a intérêt au libre-échange, même s'il n'a d'avantage absolu nulle part, ou même s'il a un avantage absolu partout – prescrit l'abolition de toutes les barrières aux échanges et la non-intervention de l'Etat entre autres dans le régime des importations : il en résulterait une allocation optimale des facteurs de production à l'échelle mondiale qui favoriserait la croissance et le développement.

Dès lors le protectionnisme apparaît en première analyse comme incompatible avec l'internationalisation de l'économie puisque c'est son démantèlement qui a catalysé celle-ci.

Au demeurant, le libre-échange n'engendre-t-il pas des contradictions, soit des externalités négatives – des coûts cachés – comme des tensions socio-politiques susceptibles de donner au protectionnisme un « avenir » c'est-à-dire un nouvel attrait voire une nouvelle légitimité, mais sous des formes peut-être différentes de celles historiquement dominantes ?

I. L'internationalisation de l'économie est à première vue la conséquence d'un abandon apparemment irréversible des différentes formes de protectionnisme

A/ Certes à la Belle Epoque dans un contexte de fort protectionnisme l'économie mondiale était déjà en quelque sorte internationalisée

1. *L'internationalisation financière est déjà une réalité qui précède la libéralisation du commerce* : elle est rendue possible par la généralisation du Gold Standard (adopté en 1897 par le Japon ou la Russie, en 1900 par les Etats-Unis) ainsi que par l'abondance des investissements européens à destination des pays neufs (Etats-Unis), des colonies (Egypte) ou semi-colonies (Empire Ottoman). Barry Eichengreen évoque une courbe en U des marchés financiers : pris dans leur dimension financière, les marchés semblaient plus intégrés vers 1880 que vers 1980.

2. *L'internationalisation passe aussi par la migration des actifs notamment de l'Europe vers les Nouveaux mondes américain et océanien* : entre 1880 et 1914, l'Irlande, la Suède et l'Italie – alors des pays à bas salaire – perdent plus de 10 % de leur population en dépit d'une forte fécondité. La grande migration transatlantique des Européens fait baisser les coûts salariaux aux Etats-Unis et pousse à une revalorisation des rémunérations sur le Vieux continent. A noter cependant que ces mouvements d'actifs sont limités à l'Occident : les Chinois par exemple sont précocement bannis de l'eldorado américain (Chinese exclusion act de 1882).

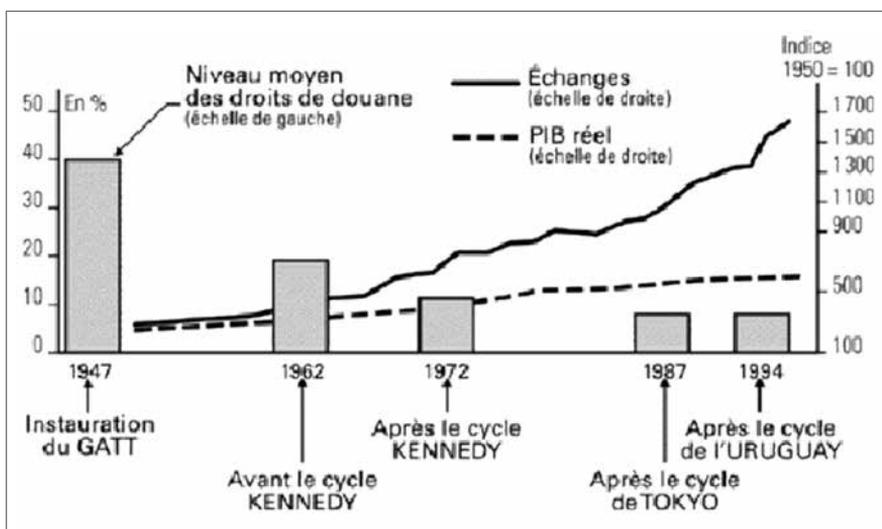
3. *Le protectionnisme (tarif Méline de 1892 en France (de 15 à 30 % ad valorem), Dingley aux Etats-Unis en 1897) souvent inspiré par le modèle dit « éducateur » de Friedrich List (Allemagne, Etats-Unis) n'empêche pas une hausse du taux d'ouverture des économies* : entre 1870 et 1914 les exportations passent de 9 % à 16 % du PIB mondial. Les matières premières, agricoles en particulier (la France de 1900 importe du blé russe), circulent largement ce qui permet une première convergence des prix mondiaux : en 1870, le blé est vendu 57,6 % plus cher à Liverpool qu'à Chicago ; en 1913, l'écart n'était plus que de 15,6 %. Les premières entreprises multinationales comme Siemens disposent de réseaux commerciaux mondiaux qui écoulent leurs marchandises – des locomotives, de l'acier... – sur différents marchés.

B/ Mais l'internationalisation dans sa dimension proprement marchande doit attendre le nouveau paradigme libre-échangiste de la seconde moitié du xx^e siècle

1. *Après 1945, les Etats-Unis en situation de quasi monopole ricardien pour l'ensemble des biens industriels promeuvent un désarmement douanier*. Le cadre en est l'Accord général sur les droits de douane et le commerce (AGETAC ou GATT) créé le 30 octobre 1947 et seul en lice après l'échec de l'Organisation Internationale du Commerce en 1950. Huit « rounds » ou cycles de négociation entre 1947

et 1994 permettent d'abaisser les droits de douane de 40 % en moyenne à la création de l'OMC à 4 % en 1995. Par ailleurs le nombre de signataires n'a cessé de s'étendre, passant de 23 pays en 1947 à 128 en 1995 et 160 en 2014. L'ensemble de la planète souscrit à l'observation formulée par Vilfredo Pareto (1848-1923) : « La protection ne crée pas la richesse, au contraire elle la détruit. Ce qu'elle donne aux uns ne saurait donc qu'être enlevé aux autres et c'est une absurdité de croire que tout le monde pourra recevoir quelque chose sans que personne ait rien à payer ».

2. A ce cadre multilatéral s'ajoute la création d'organisations régionales commerciales (ORC) pratiquant en interne un libre-échange plus ou moins poussé : CEE (1958), ALENA (1994), MERCOSUR (1995), AFTA (2002) pour les plus connus, BENELUX (1948), CAN (1969), CARICOM (1973), SADC (1992), UEMOA (1994) pour de plus confidentielles... La CEE/UE est allée le plus loin en faisant disparaître outre les droits de douane entre ses membres (1968 : naissance du Marché commun) les obstacles non tarifaires par le principe de réciprocité des normes qui régit le Marché unique depuis 1993.

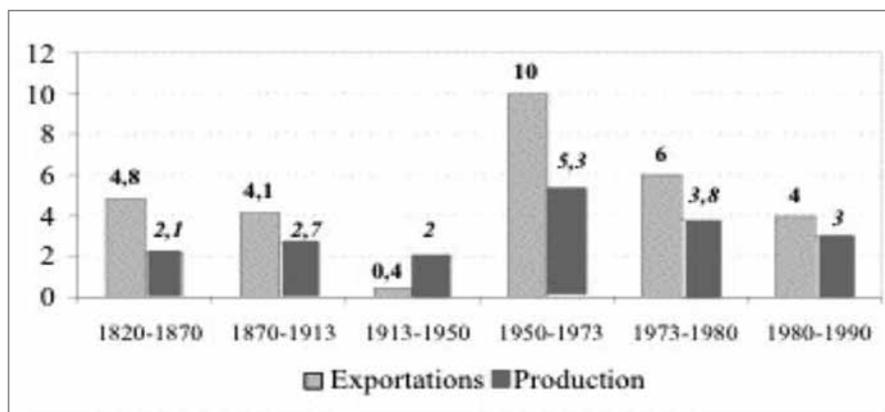


3. Le désarmement tarifaire depuis 1945 a connu deux séquences historiques : de 1945 à 1980 tout d'abord, le paradigme keynésien globalement en vigueur maintient des barrières douanières importantes en dépit des progrès des négociations commerciales multilatérales (NCM) du GATT telles le Kennedy round portant sur les produits industriels ou le Tokyo round (1973-1979) dédié au démantèlement des obstacles non tarifaires. A partir de 1980 cependant, la vague néo-libérale contribue à l'invalidation intellectuelle et au démantèlement du protectionnisme. Le consensus de Washington force l'ouverture des marchés des pays en voie de développement (PED) jusque-là adeptes du modèle ISI (industrialisation par substitution des importations) théorisé par l'économisme argentin Raoul Prebisch dans le cadre du « désarollisme ». La chute du Mur élargit l'aire du marché mondial à l'ancien bloc communiste : la Chine (2001) ou la Russie (2012) finissent même par intégrer l'OMC. En 2012, la Chine réalise 11 % des exportations mondiales soit plus que les EU (8,5 %) la même année mais moins que la Grande-Bretagne en 1913 (18,5 % !).

C/ Différents leviers contribuent à l'internationalisation de l'économie contemporaine, pas tous liés à la croissance du commerce mondial

1. Certes l'internationalisation passe par une croissance des échanges plus rapides que celle de la production mais principalement en raison d'une nouvelle organisation de celle-ci. Durant les Trente glorieuses les échanges croissent presque deux fois plus vite que la production. La crise de 1973 ne se traduit pas du tout par un repli des échanges commerciaux. En 2012 les échanges de biens et services pèsent un tiers du PIB mondial contre moins de 20 % en 1985. Ces chiffres sont en partie un trompe-l'œil. A partir des années 1970 se met en place une Nouvelle division internationale du processus productif (NDIPP) qui tire les conséquences du théorème HOS (Heckscher-Ohlin-Samuelson) et multiplie les échanges « intra-firmes » réalisés entre des entreprises dépendant d'une même firme. Plus des deux tiers des échanges mondiaux sont réalisés à présent au sein des quelque 82 000 entreprises multinationales (contrôlant 810 000 filiales) ou entre elles et leurs fournisseurs. La segmentation de la production en fonction d'un gradient de coût du travail le long d'une « chaîne de valeur » (Porter, 1986) mondiale est ainsi en soi à l'origine d'une augmentation des flux marchands. Notons que la baisse des coûts qu'autorise la NDIPP conduit mécaniquement les industriels à une préférence pour le libre-échange.

Taux de croissance moyen annuel pour la production et les exportations mondiales (pourcentage) Source : OMC séries longues



2. Mais l'internationalisation a pour principal moteur la multiplication des flux financiers davantage encore que le commerce international. La déréglementation facilite les mouvements de capitaux : en 2014, 90 % des échanges mondiaux sont des échanges de capitaux, les biens et services ne représentant plus que 10 % des échanges. Dès lors un éventuel retour au protectionnisme n'affecterait guère l'internationalisation de l'économie à l'ère de la globalisation financière. Sauf à considérer que des droits de douane plus élevés réduiraient les flux d'IDE manufacturiers, mais ceux-ci ne représentent qu'un faible pourcentage des échanges de capitaux : le volume des transactions sur le seul marché des changes (des devises) représente en 2013 5000 milliards de dollars par jour, soit deux fois la valeur annuelle des flux d'import-export de la RFA et 40 fois la valeur des IDE reçus par la Chine...

3. *L'internationalisation plus encore qu'une réalité est devenue une conviction quasiment idéologique que partage l'ensemble des élites politiques et du monde des affaires.* Entre mille exemples, les classements des écoles de management et de gestion publiés chaque année depuis 1999 par le *Financial Times* accordent une place essentielle à ce credo : internationalisation du corps professoral, mobilité internationale des anciens élèves, etc. L'aspiration à l'internationalisation est devenue un mantra de la modernité et déborde le seul domaine commercial. A l'inverse, l'entre-soi national et le protectionnisme sont politiquement connotés : ils renvoient aux funestes souvenirs des années Trente et ont pour principaux promoteurs des partis extrémistes aux relents xénophobes.

II. Pour autant le protectionnisme non seulement n'a pas disparu – il a muté – mais il peut revenir d'actualité si s'aggravent les déséquilibres créés par l'internationalisation des échanges

A/ Le protectionnisme est protéiforme et ses différents visages ne se sont pas effacés de la même façon du paysage économique

1. *Les pays émergents et en voie de développement restent globalement plus protectionnistes que les PDEM.* Si les EU, l'UE et le Japon appliquent des droits de douane moyens en dessous de la moyenne mondiale de 4 % (respectivement de 2,3 %, 3,1 %, 3,9 %) les pays émergents sont autour de 10 % (Chine 8,3 %, Brésil 10,4 %) voire bien au-dessus : l'Inde applique un tarif moyen de 15 %. Mais ces chiffres varient eux-mêmes en fonction des exportateurs plus ou moins favorisés par un même pays importateur : l'UE en vertu de l'accord TSA (« tout sauf les armes ») traite les PMA soumis à un droit moyen de 0,8 % bien mieux que ne le font les EU (droits moyens de 5 %) et surtout le Japon (31,6 %) qui applique des droits élevés sur les produits intensifs en main-d'œuvre. Enfin les variations sont considérables en fonction de la nature des produits : les produits agricoles sont beaucoup plus taxés que les produits manufacturés (l'UE leur applique des droits de 17,9 %, le Japon de 35 % dont 400 % sur le riz) ; parmi les produits manufacturés le textile-habillement est le secteur le plus taxé (9,4 % aux EU vs 1,1 % pour l'ensemble des biens manufacturés).

2. *Il existe par ailleurs de nombreux obstacles non tarifaires aux échanges. Ceux-ci consistent d'abord en limitations quantitatives : licence d'importation, contingents, quotas.* De 1974 à 2005 (2008 pour la Chine) les Accords multifibres ont offert une protection relative à la filière textile des pays du Nord tout en garantissant à certains producteurs du Sud comme la Tunisie ou l'île Maurice un certain accès à leurs marchés. D'autres systèmes de quotas existent : le Japon en impose sur les chaussures en cuir et certains produits chimiques et pharmaceutiques ; les EU sur les produits laitiers ; la Chine en 2014 a autorisé l'importation de 34 films hollywoodiens, pas un de plus. Plus radicaux sont les prohibitions et embargos : la Russie en août 2014 décrète un embargo sur les produits agricoles en provenance de l'UE en riposte au gel des avoirs bancaires de certains dirigeants russes dans le cadre de la crise ukrainienne. Enfin les stratégies dites de « dumping monétaire » consistent à organiser ou laisser s'opérer une dépréciation de la devise locale pour doper la compétitivité prix des produits exportés et renchérir le coût des produits importés. Les pays de l'Europe du Sud y avaient couramment recours avant l'euro. La Chine avec son yuan notablement sous-évalué en est adepte aujourd'hui, mais les Etats-Unis, le Royaume-Uni ou le Japon n'y répugnent pas.

3. Plus couramment encore, les obstacles dits non tarifaires s'identifient à des normes contraignantes et coûteuses : formalités administratives, réglementations sanitaires, vétérinaires, techniques visant à protéger le consommateur mais aussi les producteurs nationaux. Ainsi l'Union européenne impose-t-elle depuis 1993 aux producteurs de biens manufacturés importés de s'engager à respecter les normes européennes en apposant le logo CE. Mais celui-ci n'est qu'une déclaration : les contrôles se font *a posteriori* et seulement en cas de litiges déclenchés par des concurrents ou des associations de consommateurs. Aussi certains marchés exigent des normes plus sévères validées par des organismes indépendants : c'est le cas de la norme CB (certified body) reconnue par près de 50 pays industriels et délivrée par la firme de Cologne à la réputation mondiale, TÜV Rheinland. Mais l'UE n'est pas le seul « empire de la norme » (Zaki Laïdi) : le Japon impose des règles très spécifiques *via* le Japanese Industrial Standards Committee (JISC) interdisant par exemples certains cosmétiques sans aucune justification scientifique mais pour le plus grand profit du champion national, Shiseido. Quant aux Etats-Unis les normes fédérales y sont draconiennes, notamment en matière d'étiquetage et d'emballage, et doublées par celles des Etats et des municipalités – soit 2700 instances au total ! – imposant le recours à des sociétés d'import-export locales familières de ce labyrinthe.

B/ L'accroissement continu des échanges se heurtent à certains obstacles susceptibles de réactiver le protectionnisme

1. *Le glissement de l'activité industrielle vers le Sud et plus particulièrement vers l'Asie participe à un évident manufacturier de l'Occident avec de multiples conséquences en termes de chômage et de perte de savoir-faire.* La part des actifs employés dans le secteur secondaire en France a ainsi été divisée par deux entre 1980 et 2010 passant de 24 à 12 % ; l'industrie automobile américaine qui a employé jusqu'à 1,4 million de personnes en 1977 n'offre plus que 1 million de postes en 2007. Or les emplois industriels qui disparaissent sont en moyenne plus qualifiés que les emplois de service moins exposés aux délocalisations et à la concurrence des produits importés ; d'autre part chaque poste dans l'industrie commande trois emplois tertiaires induits... Aussi la tentation protectionniste, notamment en période de crise reparaît : en 2009 alors qu'un pneu sur six vendus aux EU est d'origine chinoise (contre un sur vingt en 2004), Barak Obama impose aux pneumatiques chinois une surtaxe de 35 % qui vient s'ajouter au droit de douane ordinaire de 4 %. Pas moins de 120 mesures protectionnistes majeures ont été prises dans le monde durant l'année qui a suivi l'éclatement de la crise des subprimes en octobre 2008. Certains auteurs évoquent, pour s'en réjouir une « démondialisation » (François Lenglet, *La fin de la mondialisation* ou Hervé Juvin, *La grande séparation, pour une écologie des civilisations*) en cours. Mais globalement la course au tarif douanier n'est pas d'actualité. Les pays émergents disposent désormais de moyens de rétorsion dont la taille même de leur marché : la Chine est le premier marché mondial de l'automobile et seul un quart des acheteurs y choisissent un modèle chinois !

2. *La contrainte écologique sert cependant de catalyseur ou de prétexte politiquement correct à un regain de protectionnisme* : en imposant des normes anti-pollution de plus en plus drastiques les pays développés éliminent de leur marché les produits d'importation qui ne les respectent pas ou bien contraignent les producteurs étrangers à s'adapter ce qui accroît leurs coûts. Ainsi l'UE en 2014 abaisse à 95 g/km les émissions de CO₂ autorisées pour les voitures particulières en 2020.

Par ailleurs chemine l'idée d'une taxation douanière écologique – *ad carbonem* plutôt qu'*ad valorem* – pour lutter contre le dumping environnemental des producteurs du Sud qui ne sont pas soumis aux mêmes législations que les producteurs du Nord ce qui crée des distorsions de concurrence.

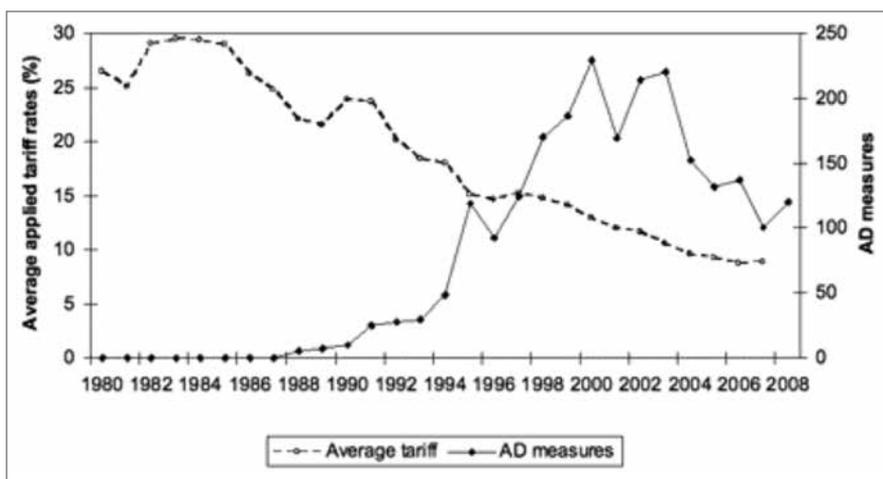
3. *L'échec du dernier cycle de l'OMC est patent.* Il n'a réalisé que 10 % de ses objectifs depuis son début en 2001, révélant ce que l'ancien directeur de l'OMC Pascal Lamy, prédécesseur de Roberto Azevêdo, appelle un « épaissement des frontières », en clair un blocage du multilatéralisme. Tandis que les pays du Nord refusent le démantèlement de leurs subventions agricoles (400 MDS de dollars annuels pour les pays de la Triade) les pays du Sud refusent d'ouvrir leurs marchés des services : en Inde par exemple aucune grande enseigne de distribution occidentale ne peut s'implanter. Cependant se multiplient des accords bilatéraux entre deux Etats ou entre une organisation régionale commerciale et un Etat : EU-Chili (2004), Japon-Singapour (2010), UE-Maroc (ALECA en cours de négociation en 2014), EU-UE avec le Transatlantic Trade and Investment Partnership (TTIP) en cours de négociation. Le seul Maroc a ainsi signé depuis 1996 neuf traités de libre-échange. D'où le syndrome du « plat de spaghettis » (Jagdish Bhagwati, ancien conseiller au GATT) : ces accords forment des bulles commerciales sur la base de conditions préférentielles entre partenaires mais le nombre croissant d'accords de libre-échange complique leur application pour les entreprises. Il en résulte des coûts de transaction et d'information : l'entrelacement des accords de libre-échange freine l'échange !

C/ Ce néo-protectionnisme est cependant appelé à revêtir des formes spécifiques ou furtives

1. *La mise en avant de « l'intérêt national » lors des appels d'offres pour les marchés publics.* Elle s'impose dans le domaine du matériel militaire mais aussi de certaines activités liées à la souveraineté nationale : organismes portuaires et aéroportuaires, production et distribution d'énergie en particulier d'origine nucléaire... En 2005, GW Bush a invoqué la sécurité nationale pour bloquer la vente de la firme de raffinage californienne UNOCAL au géant chinois CNOOC. En 2006, Dubai Ports World a dû renoncer à la prise de contrôle très controversée de six ports américains (New York, Newark, Baltimore, Philadelphie, Miami, Nouvelle-Orléans). Mais la sécurité nationale n'est pas toujours en cause et les appels d'offre peuvent être réservés hors secteurs stratégiques. Ainsi en Chine la construction des routes et de nombreux ouvrages de génie civil n'est pas ouverte aux entreprises étrangères de BTP. Aux Etats-Unis, le Small Business Administration Act de 1953 permet de réserver les marchés publics d'un certain montant aux PME locales même si elles ne sont pas moins-disantes que les grandes entreprises nationales ou étrangères...

2. *L'essor des mesures anti-dumping et des règles d'origine.* Les accords de l'OMC comportent un certain nombre d'exceptions. En particulier, les signataires ont la possibilité de mettre en place des mesures antidumping en cas de concurrence déloyale. On parlera de dumping si une entreprise applique à ses produits un prix plus faible à l'exportation que pour le marché local. Depuis 1989 et surtout 2009 ces mesures se sont multipliées et « compensent » la baisse des droits de douane. L'UE a largement recours à ces droits dits compensateurs par exemple sur les vitrages solaires, les câbles en acier, les céramiques de table importés de Chine. Les règles d'origine, quant à elles, permettent d'attribuer une origine à un produit

dont la fabrication ou les composants sont issus d'autres pays que le pays de provenance. Pour être considérées comme originaires d'un pays, les marchandises doivent avoir été obtenues dans ce pays soit entièrement, soit par « transformation suffisante » de produits non originaires de ce pays. La notion de transformation suffisante est différente d'un produit à un autre voire d'un accord à l'autre ! Ainsi des transformateurs électriques assemblés en UE à partir de composants asiatiques sont exportés au Mexique : ces produits, normalement taxés à 10 % de droits de douane, sont exemptés s'ils sont d'origine préférentielle UE. Pour emporter l'origine préférentielle, la règle de l'accord UE/Mexique exige que les matières non originaires ne doivent pas excéder 40 % du prix de vente départ usine du produit... Evolution des tarifs douaniers et des mesures antidumping (OMC)



3. *La résistance à la libéralisation des échanges de services.* Un service a cinq fois moins de chance d'être exporté qu'un bien matériel. L'annexe 1B des accords de Marrakech instituant l'Organisation mondiale du commerce (OMC) est l'Accord Général sur le Commerce des Services (AGCS). Celui-ci est relativement restrictif : un pays membre de l'OMC n'est tenu de libéraliser que les activités de services sur lesquels il a explicitement donné son accord, en les inscrivant sur une « liste positive ». Un certain nombre de services publics comme l'éducation ou la santé n'ont pas dans ce cadre vocation à être ouverts à la concurrence internationale. Il existe cependant un projet d'accord dit TISA (Trade in Service Agreement ou ACS en français) négocié discrètement par les « Très bons amis des services », un sous-groupe de 48 pays membres de l'OMC et inversant cette logique : seuls les secteurs cités explicitement dans les accords ne seront pas libéralisables. Mais depuis que l'ONG Wikileaks a donné en 2014 connaissance de ces négociations secrètes, celles-ci soulèvent de vigoureuses oppositions à la fois au sein des opinions publiques en Europe et sur la scène internationale où les émergents voient dans TISA un cheval de Troie pour conquérir leur marché intérieur de la banque ou de la distribution d'eau. Il est vrai que le commerce des services, plus encore que celui des marchandises touche à l'identité culturelle et revêt une forte dimension politique. L'audiovisuel reste par exemple fortement encadré dans un pays comme la France par les règles de « chronologie des medias » (un film ne peut ainsi être diffusé sur les différents supports vidéos que 4 mois après sa sortie en salle).

Depuis 1945, le libre-échange a accompagné la croissance mondiale et plus encore son imaginaire. Il n'a cependant pas révoqué toutes les formes de protectionnisme. D'une part, les pays émergents – à commencer par le premier d'entre eux historiquement, le Japon – ont largement appuyé leur développement sur une version actualisée du protectionnisme éducateur du ^{xix}^e siècle. D'autre part, les pays développés eux-mêmes ont sophistiqué les instruments du protectionnisme, notamment les instruments non-tarifaires comme les normes ou les règles d'origine. Plus subtilement au protectionnisme défensif traditionnel est venu s'ajouter un protectionnisme offensif fait de subventions publiques et de commandes d'Etat aux « champions domestiques ». La nouvelle vulnérabilité des pays du Nord révélée par la crise des subprimes mais aussi une sensibilité nouvelle à la question sociale au Nord (26 millions de chômeurs en UE en 2014...) comme au Sud (cf. les 1200 morts de l'immeuble du Rana Plaza de Dacca en 2013), l'enjeu environnemental mondial enfin pourraient donner une nouvelle carrière à des formes plus explicites encore de protectionnisme. Certains économistes, certes un peu en marge, comme Jean-Luc Gréau ou Jacques Sapir l'appellent de leurs vœux. Même les grands pays émergents, attentifs à développer le moteur de leur demande intérieure plutôt que de continuer à dépendre de clients étrangers plus ou moins solvables, pourraient y trouver à terme leur intérêt.

MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 HEURES.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

SUJET

EXERCICE 1

On considère l'application $\varphi :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto e^x - x e^{\frac{1}{x}}$. On admet : $2 < e < 3$.

Partie I : Étude de la fonction φ

1. Montrer que φ est de classe C^3 sur $]0; +\infty[$, calculer, pour tout x de $]0; +\infty[$, $\varphi'(x)$ et $\varphi''(x)$, et montrer : $\forall x \in]0; +\infty[$, $\varphi'''(x) = e^x + \frac{3x+1}{x^5} e^{\frac{1}{x}}$.
2. Étudier le sens de variation de φ'' et calculer $\varphi''(1)$.
En déduire le sens de variations de φ' , et montrer :
$$\forall x \in]0; +\infty[$$
, $\varphi'(x) \geq e$.
3. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement positives.
4. Déterminer la limite de $\frac{\varphi(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$, et la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
5. On admet : $15 < \varphi(3) < 16$. Montrer : $\forall x \in [3; +\infty[$, $\varphi(x) \geq ex$.

On note C la courbe représentative de φ .

6. Montrer que C admet un unique point d'inflexion, déterminer les coordonnées de celui-ci et une équation de la tangente en ce point.
7. Dresser le tableau de variations de φ , avec les limites en 0 et en $+\infty$, et la valeur en 1.
Tracer l'allure de C et faire apparaître la tangente au point d'inflexion.
On précisera la nature de la branche infinie au voisinage de 0 et la nature de la branche infinie au voisinage de $+\infty$.

Partie II : Étude d'extremum pour une fonction réelle de deux variables réelles

On note $U = \mathbb{R} \times]0; +\infty[$ et on considère l'application

$$f : U \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto xy - e^x \ln y.$$

8. Représenter graphiquement l'ensemble U .
9. Montrer que f est de classe C^2 sur l'ouvert U et calculer, pour tout (x, y) de U , les dérivées partielles premières et les dérivées partielles secondes de f au point (x, y) .
10. Établir que, pour tout (x, y) de U , (x, y) est un point critique de f si et seulement si :
$$x > 0 \quad \text{et} \quad y = e^{\frac{1}{x}} \quad \text{et} \quad \varphi(x) = 0.$$
11. En déduire que f admet un point critique et un seul, et qu'il s'agit de $(1, e)$.
12. Est-ce que f admet un extremum local en $(1, e)$?
13. Est-ce que f admet un extremum local sur U ?

Partie III : Étude d'une suite et d'une série

On considère la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 3$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \varphi(u_n)$.

14. Montrer que, pour tout n de \mathbb{N} , u_n existe et $u_n \geq 3e^n$. (On pourra utiliser des résultats de la partie I).
15. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante et que u_n tend vers $+\infty$ lorsque l'entier n tend vers l'infini.
16. Écrire un programme en Turbo-Pascal qui calcule et affiche le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geq 10^3$.
17. Quelle est nature de la série de terme général $\frac{1}{u_n}$?

EXERCICE 2

On considère l'espace vectoriel $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.

On définit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}; (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

1. Montrer que \mathcal{E} est un espace vectoriel et que (A, B, C) est une base de \mathcal{E} .
Quelle est la dimension de \mathcal{E} ?
2. Établir que \mathcal{E} est stable par multiplication, c'est-à-dire :
 $\forall (M, N) \in \mathcal{E}^2, MN \in \mathcal{E}$.
3. Montrer que, pour toute matrice M de \mathcal{E} , si M est inversible, alors $M^{-1} \in \mathcal{E}$.

Pour toute matrice M de \mathcal{E} , on note $f(M) = TMT$.

4. Montrer que f est un endomorphisme de \mathcal{E} .
 5. Vérifier que T est inversible et démontrer que f est un automorphisme de \mathcal{E} .
 6. Est-ce que T est diagonalisable ?
- On note F la matrice de f dans la base (A, B, C) de \mathcal{E} .
7. Calculer $f(A), f(B), f(C)$ en fonction de (A, B, C) et en déduire F .
 8. Montrer que f admet une valeur propre et une seule et déterminer celle-ci, puis déterminer une base et la dimension du sous-espace propre pour f associé à cette valeur propre.
 9. Est-ce que f est diagonalisable ?
 10. Soit λ un réel différent de 1. Résoudre l'équation $f(M) = \lambda M$, d'inconnue $M \in \mathcal{E}$.

On note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

11. Calculer H^2 , puis, pour tout a de \mathbb{R} et tout n de \mathbb{N} , $(I + aH)^n$.
12. Calculer, pour tout n de \mathbb{N} , F^n .
13. Trouver une matrice G de $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $G^3 = F$.
Existe-t-il un endomorphisme g de \mathcal{E} tel que $g \circ g \circ g = f$?

EXERCICE 3

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n , dans laquelle on effectue une succession de $(n + 1)$ tirages d'une boule avec remise et l'on note X_n la variable aléatoire égale au numéro du tirage où, pour la première fois, on a obtenu un numéro supérieur ou égal au numéro précédent.

Ainsi, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, la variable aléatoire X_n prend ses valeurs dans $\llbracket 2; n + 1 \rrbracket$.

Par exemple, si $n = 5$ et si les tirages amènent successivement les numéros 5, 3, 2, 2, 6, 3, alors $X_5 = 4$.

Pour tout k de $\llbracket 1; n + 1 \rrbracket$, on note N_k la variable aléatoire égale au numéro obtenu au k -ième tirage.

Partie I : Étude du cas $n = 3$

On suppose dans cette partie **uniquement** que $n = 3$. L'urne contient donc les boules numérotées 1, 2, 3.

1. a. Exprimer l'événement $(X_3 = 4)$ à l'aide d'événements faisant intervenir les variables aléatoires N_1, N_2, N_3 . En déduire $\mathbf{P}(X_3 = 4)$.
 b. Montrer que $\mathbf{P}(X_3 = 2) = \frac{2}{3}$, et en déduire $\mathbf{P}(X_3 = 3)$.
2. Calculer l'espérance de X_3 .

Partie II : Cas général

Dans toute cette partie, n est un entier fixé supérieur ou égal à 2.

3. Pour tout k de $\llbracket 1; n + 1 \rrbracket$, reconnaître la loi de N_k et rappeler son espérance et sa variance.
4. Calculer $\mathbf{P}(X_n = n + 1)$.
5. Montrer, pour tout i de $\llbracket 1; n \rrbracket$: $\mathbf{P}_{(N_1=i)}(X_n = 2) = \frac{n - i + 1}{n}$.
6. En déduire une expression simple de $\mathbf{P}(X_n = 2)$.
7. Soit $k \in \llbracket 2; n \rrbracket$. Justifier l'égalité d'événements suivante : $(X_n > k) = (N_1 > N_2 > \dots > N_k)$.
 En déduire : $\mathbf{P}(X_n > k) = \frac{1}{n^k} \binom{n}{k}$.
 Vérifier que cette dernière égalité reste valable pour $k = 0$ et pour $k = 1$.
8. Exprimer, pour tout $k \in \llbracket 2; n + 1 \rrbracket$, $\mathbf{P}(X_n = k)$ à l'aide de $\mathbf{P}(X_n > k - 1)$ et de $\mathbf{P}(X_n > k)$.
9. En déduire : $\mathbf{E}(X_n) = \sum_{k=0}^n \mathbf{P}(X_n > k)$. Calculer ensuite $\mathbf{E}(X_n)$.
10. Montrer : $\forall k \in \llbracket 2; n + 1 \rrbracket, \mathbf{P}(X_n = k) = \frac{k - 1}{n^k} \binom{n + 1}{k}$.

Partie III : Une convergence en loi

On s'intéresse dans cette partie à la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \geq 2}$.

11. Soit k un entier fixé supérieur ou égal à 2. Montrer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(X_n = k) = \frac{k - 1}{k!}$.
12. Montrer que la série $\sum_{k \geq 2} \frac{k - 1}{k!}$ converge et calculer sa somme.

On admet qu'il existe une variable aléatoire Z à valeurs dans $\llbracket 2; +\infty \llbracket$ telle que :

$$\forall k \in \llbracket 2; +\infty \llbracket, \mathbf{P}(Z = k) = \frac{k - 1}{k!}.$$

13. Montrer que Z admet une espérance et la calculer.
 Comparer $\mathbf{E}(Z)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{E}(X_n)$.

CORRIGÉ

Par Bénédicte Bourgeois, professeur agrégé de mathématiques au lycée Notre-Dame-du-Grandchamp à Versailles.

EXERCICE 1

Partie I : Etude de la fonction φ .

1. D'après les opérations usuelles sur les fonctions de classe C^3 , φ est de classe C^3 sur $]0; +\infty[$.

$$\forall x > 0, \varphi'(x) = e^x - e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}.$$

$$\forall x > 0, \varphi''(x) = e^x - \frac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x}}.$$

$$\forall x > 0, \varphi'''(x) = e^x + \frac{3x+1}{x^5}e^{\frac{1}{x}}.$$

2. Comme $x > 0$, on a clairement :

$$\forall x > 0, \varphi'''(x) > 0.$$

On en déduit que la fonction φ'' est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Or $\varphi''(1) = 0$; par suite, on peut en conclure que, si $0 < x < 1$, $\varphi''(x) < 0$ et si $x > 1$, $\varphi''(x) > 0$.

On obtient ainsi le sens de variation de la fonction φ' : elle est strictement décroissante sur $]0, 1[$ et strictement croissante sur $]1, +\infty[$ et elle présente un minimum en 1 tel que $\varphi'(1) = e$.

$$\forall x > 0, \varphi'(x) \geq \varphi'(1); \varphi'(x) \geq e.$$

3. Pour déterminer la limite de φ en 0^+ , on procède à une modification d'écriture.

$$\forall x > 0, \varphi(x) = e^x - \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, on a, par croissance comparée, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = -\infty.$$

- 4.

$$\forall x > 0, \frac{\varphi(x)}{x} = \frac{e^x}{x} - e^{\frac{1}{x}}.$$

Par prépondérance classique, il vient :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = +\infty.$$

On peut alors remarquer que :

$$\forall x > 0, \varphi(x) = \frac{\varphi(x)}{x} \cdot x.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty.$$

5. Différentes méthodes sont possibles pour résoudre cette question : on peut utiliser l'inégalité des accroissements finis ou une fonction auxiliaire.

On pose, pour tout $x > 0$, $g(x) = \varphi(x) - ex$.

La fonction g est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $\forall x > 0, g'(x) = \varphi'(x) - e$.

En utilisant le résultat de la question 2, on peut affirmer que, pour tout $x > 0$, $\varphi'(x) \geq 0$ et donc la fonction g est croissante sur $]3; +\infty[$.

Or $g(3) = \varphi(3) - 3e$. En utilisant la valeur approchée proposée, on a $g(3) \geq 0$ donc :

$$\boxed{\forall x \geq 3, \varphi(x) \geq ex.}$$

6. On a vu à la question 2 que φ'' s'annule et change de signe en 1.
On en déduit que la fonction φ admet un unique point d'inflexion.

C admet comme unique point d'inflexion le point de coordonnées $(1, 0)$.

Une équation de la tangente en ce point est $y = e(x - 1)$.

7. Nous laissons au lecteur le soin de tracer le tableau de variations et la représentation graphique de la fonction.

On précise que, comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = -\infty$, la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale en 0 à C .

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = +\infty$, la courbe C admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction (Oy) .

Partie II : Etude d'extremum pour une fonction réelle de deux variables réelles.

8. L'ensemble U (qui est un ouvert de \mathbb{R}^2) est constitué du demi plan ouvert de frontière l'axe des abscisses, situé au dessus de cet axe.
9. La fonction f est de classe C^2 sur l'ouvert U d'après les opérations usuelles sur les fonctions de classe C^2 (produit, somme).
Elle admet donc des dérivées partielles d'ordre 1 par rapport à x et à y .

$$\boxed{\forall (x, y) \in U, \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y - e^x \ln y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x - \frac{e^x}{y}.}$$

Comme la fonction f est de classe C^2 sur U , elle admet des dérivées partielles d'ordre 2 et de plus, d'après le théorème de Schwarz, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

On a alors :

$$\boxed{\forall (x, y) \in U, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{e^x}{y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -e^x \ln y; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 1 - \frac{e^x}{y}.}$$

10. La fonction f étant de classe C^1 sur l'ouvert U , pour tout couple $(x, y) \in U$, (x, y) est un point critique de f si et seulement si :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - e^x \ln y = 0 \\ x - \frac{e^x}{y} = 0 \end{cases}$$

Par hypothèse, pour tout couple $(x, y) \in U$, $y > 0$; par suite, comme $x = \frac{e^x}{y}$, $x > 0$.

On a donc

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y = e^x \ln y \\ xy = e^x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \ln y = 1 \\ xy = e^x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y = e^{\frac{1}{x}} \\ xy = e^x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y = e^{\frac{1}{x}} \\ \varphi(x) = 0 \end{cases}$$

11. D'après la partie I, on sait que la fonction φ est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$; elle définit donc une bijection de $]0; +\infty[$ sur $\varphi(]0; +\infty[) = \mathbb{R}$.

Par suite, l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution.

Comme $\varphi(1) = 0$, on peut en conclure que $\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

On a alors d'après le système de la question 10, $y = e$.

La fonction f admet un point critique et un seul, le point de coordonnées $(1, e)$.

12. On étudie la nature du point critique de f à l'aide des notations de Monge :

$$r = -e; \quad s = 0; \quad t = \frac{1}{e}.$$

On peut alors calculer $s^2 - rt = 1$ qui est strictement positif et permet de conclure d'après le cours :

La fonction f n'admet pas d'extremum local en $(1, e)$.

13. Puisque la fonction f est de classe C^1 sur l'ouvert U , si f admet un extremum, alors c'est un point critique. Donc f ne peut admettre un extremum qu'en $(1, e)$.

On peut donc conclure d'après la question 12 :

La fonction f n'admet pas d'extremum local sur U .

Partie III : Etude d'une suite et d'une série.

14. Soit n un entier naturel, on pose P_n : « u_n existe et $u_n \geq 3e^n$ ».

Pour $n = 0$, on sait que $u_0 = 3$ donc $u_0 \geq 3e^0$ qui établit P_0 .

Soit n un entier naturel tel que P_n .

Sachant P_n , u_n existe et $u_n \geq 3e^n$ donc u_n appartient à l'ensemble de définition de la fonction φ ; par suite, $\varphi(u_n)$ existe donc u_{n+1} existe.

Par hypothèse de récurrence $u_n \geq 3e^n$ donc par croissance de la fonction φ sur $]0; +\infty[$,

$$\varphi(u_n) \geq \varphi(3e^n)$$

On peut alors appliquer le résultat de la question 5 puisque $3e^n \geq 3$; on a ainsi :

$$u_{n+1} \geq e3e^n \text{ soit } u_{n+1} \geq 3e^{n+1}$$

ce qui établit P_{n+1} et achève le raisonnement par récurrence.

15. En appliquant de nouveau le résultat de la question 5, puisque d'après la question 14, on peut déduire que pour tout entier naturel n , $u_n \geq 3$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(u_n) \geq eu_n > u_n$$

On en déduit donc que

La suite (u_n) est strictement croissante.

Il suffit ensuite de remarquer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3e^n = +\infty$, pour pouvoir conclure à l'aide du théorème de limite par comparaison :

La suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

16. Program EML2014 ;

```

Var
u : real ;
n : integer ;
begin
n :=0 ; u :=3 ;
while u < 1000 do
begin
u :=exp(u) - u * exp (1/u) ;
n := n+1 ;
end ;
write ('Le plus petit entier naturel n tel que u(n) > 1000 est ', n).
end.
```

17. On a, d'après la question 14 :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{3} \left(\frac{1}{e}\right)^n.$$

Comme $\left|\frac{1}{e}\right| < 1$, la série géométrique de terme général $\left(\frac{1}{e}\right)^n$ est convergente. Donc par produit par une constante, la série de terme général $\frac{1}{3} \left(\frac{1}{e}\right)^n$ est aussi convergente.

On peut alors appliquer le critère de comparaison des séries à termes positifs et conclure :

La série de terme général $\frac{1}{u_n}$ est convergente.

EXERCICE 2

1. On remarque que E est inclus dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}; (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

$$E = \{aA + bB + cC, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\} = \text{Vect}(A, B, C).$$

On en déduit que :

$$E \text{ est le sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ engendré par la famille } (A, B, C).$$

On vient de prouver que (A, B, C) est une famille génératrice de E . Montrons que cette famille est libre :

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $aA + bB + cC = (O)$.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a = b = c = 0.$$

On en déduit que la famille (A, B, C) est libre.

$$(A, B, C) \text{ est une base de } E \text{ et } \dim(E) = 3.$$

2. On pose $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix}$. On a alors :

$$MN = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & ab' + c'b \\ 0 & cc' \end{pmatrix}$$

Il en résulte que $MN \in E$.

$$E \text{ est stable par multiplication.}$$

3. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ une matrice de E inversible ; comme M est une matrice triangulaire, on peut en déduire que ses coefficients diagonaux sont non nuls donc $a \neq 0$ et $c \neq 0$.

$$\text{On obtient alors facilement son inverse } M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{b}{ac} \\ 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Si } M \text{ est une matrice de } E \text{ inversible, alors } M^{-1} \in E .$$

Pour toute matrice M de E , on note $f(M) = TMT$.

4. Comme les matrices M et T appartiennent toutes les deux à E , on déduit de la question 2 que $TM \in E$ puis que $TMT \in E$.

On montre ensuite que f est une application linéaire de E dans E .

f associe à chaque élément M et N un unique élément TMT de E donc f est une application de E dans E .

$$\forall k \in \mathbb{R}, \forall (M, N) \in E^2, f(kM + N) = T(kM + N)T = kTMT + TNT = kf(M) + f(N).$$

f est un endomorphisme de E .

5. La matrice T est triangulaire supérieure et tous ses coefficients diagonaux sont non nuls donc elle est inversible.

Déterminons le noyau de l'endomorphisme f :

$$M \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow TMT = (O).$$

Comme d'après ce qui précède, la matrice T est inversible,

$$TMT = (O) \Leftrightarrow T^{-1}(TMT)T^{-1} = (O) \Leftrightarrow M = (O).$$

Le noyau de f est réduit au vecteur nul donc f est injective; or f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie.

f est un automorphisme de E .

6. La matrice T est triangulaire donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux. On peut donc voir que T admet 1 comme unique valeur propre.

Si T était diagonalisable, il existerait une matrice P inversible et une matrice D diagonale, ayant sur sa diagonale les valeurs propres de T telles que $T = PDP^{-1}$. Mais on aurait alors $D = I$ d'où $T = I$ ce qui est faux.

T n'est pas diagonalisable.

7. Après calcul, on obtient :

$$f(A) = TAT = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A + B; \quad f(B) = TBT = B; \quad f(C) = TCT = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B + C.$$

On en déduit que la matrice de l'endomorphisme f dans la base (A, B, C) est :

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

8. D'après le cours, les valeurs propres de l'endomorphisme f sont aussi les valeurs propres de la matrice F .

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$.

On a

$$FX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} x = \lambda x \\ x + y + z = \lambda y \\ z = \lambda z \end{cases}$$

$$FX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} (1 - \lambda)x = 0 \\ x + (1 - \lambda)y + z = 0 \\ (1 - \lambda)z = 0 \end{cases}$$

Comme par hypothèse, $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$,

$$FX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

f admet une seule valeur propre : 1.

On remarque que f étant un endomorphisme de E , le sous-espace propre de f associé à la valeur 1 est un sous-espace vectoriel de E .

$$E_1(f) = \{xA + yB - xC, (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}(A - C, B).$$

On montre ensuite que la famille $(A - C, B)$ est libre :

On considère deux réels x et y tels que $x(A - C) + yB = (O)$.

On a alors

$$\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = y = 0.$$

La famille $(A - C, B)$ est donc une base de $E_1(f)$ et $\dim(E_1(f)) = 2$.

9. L'endomorphisme f n'a qu'une seule valeur propre 1 et le sous-espace propre associé à cette unique valeur propre est de dimension 2 alors que E est de dimension 3. Donc f ne vérifie pas la condition nécessaire et suffisante de diagonalisation.

L'endomorphisme f n'est pas diagonalisable.

10. Soit λ un réel différent de 1, alors λ n'est pas une valeur propre de f ; par suite :

L'équation $f(M) = \lambda M$ admet une unique solution dans $E : (O)$.

11. Un calcul élémentaire donne $H^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On peut donc remarquer que H est une matrice nilpotente d'indice 2 et, pour tout entier $n \geq 2$, $H^n = H^2 H^{n-2} = (O)$.

On peut calculer $(I + aH)^n$ de deux manières.

En calculant rapidement $(I + aH)^2$ puis $(I + aH)^3$, on peut facilement formuler la conjecture :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (I + aH)^n = I + anH$$

Cette conjecture se démontre ensuite très simplement à l'aide d'un raisonnement par récurrence.

On peut aussi remarquer que les matrices I et aH commutent et qu'on peut appliquer la formule du binôme de Newton :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (I + aH)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (aH)^k I^{n-k}.$$

Compte tenu de la nilpotence de la matrice H , il vient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (I + aH)^n = \sum_{k=0}^1 \binom{n}{k} a^k H^k.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, (I + aH)^n = I + anH.$$

12. On remarque immédiatement que $F = I + H$.

On est donc en présence d'un cas particulier de la question précédente avec $a = 1$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, F^n = I + nH.}$$

Remarque : Pour cette question de même que la question 10, il serait très mal venu de se lancer dans des calculs sans chercher à exploiter les questions antérieures.

13. On utilise le résultat de la question 11 avec $n = 3$ et $a = \frac{1}{3}$.

On a alors $(I + \frac{1}{3}H)^3 = I + H = F$.

On a donc bien trouvé une matrice G de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $G^3 = F$.

$$\boxed{\text{En notant } G = I + \frac{1}{3}H, \text{ on a bien } G \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \text{ et } G^3 = F.}$$

Soit g l'endomorphisme de E représenté par la matrice G dans la base (A, B, C) , la relation $G^3 = F$ équivaut à $g^3 = f$.

$$\boxed{\text{Il existe un endomorphisme } g \text{ de } E \text{ tel que } g^3 = f.}$$

EXERCICE 3

Les candidats ne semblent guère avoir apprécié cet exercice de probabilités discrètes utilisant le dénombrement.

On notera une erreur dans le préambule : si $n = 5$, aucune boule ne porte le numéro 6 ! Ceci ne semble pas avoir gêné les candidats.

Partie I : Étude du cas $n = 3$.

1. (a) En suivant la description de l'expérience, on a :

$$(X_3 = 4) = (N_1 = 3) \cap (N_2 = 2) \cap (N_3 = 1).$$

On peut considérer que puisque les tirages sont indépendants, les variables aléatoires N_1, N_2, N_3 sont indépendantes. On en déduit que :

$$P(X_3 = 4) = P(N_1 = 3)P(N_2 = 2)P(N_3 = 1).$$

$$P(X_3 = 4) = \frac{1}{27}.$$

- (b) On commence par décomposer l'événement $(X_3 = 2)$:

$$(X_3 = 2) = (N_1 = 1) \cup [(N_1 = 2) \cap (N_2 \geq 2)] \cup [(N_1 = 3) \cap (N_2 = 3)].$$

Par réunion disjointe, on peut écrire :

$$P(X_3 = 2) = P(N_1 = 1) + P[(N_1 = 2) \cap (N_2 \geq 2)] + P[(N_1 = 3) \cap (N_2 = 3)].$$

Puis, comme les variables aléatoires N_1, N_2, N_3 sont indépendantes :

$$P(X_3 = 2) = P(N_1 = 1) + P(N_1 = 2)P(N_2 \geq 2) + P(N_1 = 3)P(N_2 = 3).$$

$$P(X_3 = 2) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Comme la valeur aléatoire X_3 ne prend que les valeurs 2, 3 ou 4, on a :

$$P(X_3 = 2) + P(X_3 = 3) + P(X_3 = 4) = 1.$$

D'où on déduit en utilisant les résultats des questions précédentes :

$$P(X_3 = 3) = \frac{8}{27}.$$

2. La variable aléatoire X_3 est une variable aléatoire discrète finie donc elle admet une espérance.

$$E(X_3) = 2P(X_3 = 2) + 3P(X_3 = 3) + 4P(X_3 = 4).$$

$$E(X_3) = \frac{64}{27}.$$

Partie II : Cas général.

3. Pour tout entier naturel k compris entre 1 et $n + 1$, la variable aléatoire N_k suit la loi uniforme sur $[1; n] \cap \mathbb{N}$.

D'après le cours, on a donc :

$$E(N_k) = \frac{n+1}{2} \text{ et } V(N_k) = \frac{n^2-1}{12}.$$

4. On décompose l'événement $(X_n = n + 1)$:

$$(X_n = n + 1) = (N_1 = n) \cap (N_2 = n - 1) \cap \dots \cap (N_n = 1).$$

Par indépendance des variables aléatoires N_1, N_2, \dots, N_n , on a :

$$P(X_n = n + 1) = P(N_1 = n) \cdot P(N_2 = n - 1) \dots P(N_n = 1).$$

$$P(X_n = n + 1) = \frac{1}{n^n}.$$

5. Pour tout entier i compris entre 1 et n , sachant que l'événement $(N_1 = i)$ est réalisé, l'événement $(X_n = 2)$ sera réalisé si et seulement si le numéro de la boule obtenue au deuxième tirage est supérieur ou égal à i . Or, dans une urne contenant n boules, il existe $n - i + 1$ boules dont le numéro est supérieur ou égal à i .

$$P_{(N_1=i)}(X_n = 2) = P(N_2 \geq i) = \frac{n - i + 1}{n}.$$

6. On considère le système complet d'événements associé à la variable aléatoire N_1 ; d'après la formule des probabilités totales (sachant que pour tout entier i compris entre 1 et n , $P(N_1 = i) \neq 0$),

$$P(X_n = 2) = \sum_{i=1}^n P(N_1 = i) P_{(N_1=i)}(X_n = 2).$$

$$P(X_n = 2) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \cdot \frac{n - i + 1}{n}.$$

$$P(X_n = 2) = \frac{n+1}{2n}.$$

7. Pour tout entier k compris entre 2 et $n + 1$, l'événement $(X_n > k)$ est réalisé si et seulement si les k premiers tirages ont amené des numéros rangés dans un ordre strictement décroissant. On a donc bien :

$$(X_n > k) = (N_1 > N_2 > \dots > N_k).$$

Considérons l'ensemble Ω_k des résultats des k premiers tirages et E_k l'ensemble des résultats des k premiers tirages amenant des numéros dans un ordre strictement décroissant.

On a $\text{Card}(\Omega_k) = n^k$.

De plus, le nombre d'éléments de E_k est exactement le nombre de parties à k éléments de l'ensemble des n numéros (en effet, une partie étant composée d'éléments distincts deux à deux ne peut être ordonnée en ordre strictement décroissant que d'une seule manière). Par suite, $\text{Card}(E_k) = \binom{n}{k}$.

Les événements de Ω_k étant équiprobables, $P(E_k) = \frac{\text{Card}(E_k)}{\text{Card}(\Omega_k)}$.

$$P(X_n > k) = \frac{1}{n^k} \binom{n}{k}.$$

On remarque que, comme X_n prend ses valeurs entre 2 et $n+1$, $P(X_n > 0) = P(X_n > 1) = 1$; on retrouve facilement cette valeur en remplaçant successivement k par 0 puis par 1 dans la formule précédente. Donc l'égalité reste valable pour $k=0$ et $k=1$.

8. Pour tout entier k compris entre 2 et $n+1$,

$$(X_n > k-1) = (X_n = k) \cup (X_n > k).$$

Comme les événements $(X_n = k)$ et $X_n > k$ sont incompatibles, il vient :

$$\boxed{P(X_n = k) = P(X_n > k-1) - P(X_n > k)}.$$

9. Comme X_n prend ses valeurs entre 2 et $n+1$, elle admet une espérance et

$$E(X_n) = \sum_{k=2}^{n+1} kP(X_n = k).$$

$$E(X_n) = \sum_{k=2}^{n+1} k(P(X_n > k-1) - P(X_n > k)).$$

$$E(X_n) = \sum_{k=2}^{n+1} k(P(X_n > k-1) - \sum_{k=2}^{n+1} kP(X_n > k)).$$

$$E(X_n) = \sum_{k=1}^n (k+1)(P(X_n > k) - \sum_{k=2}^{n+1} kP(X_n > k)).$$

$$E(X_n) = \sum_{k=1}^n (P(X_n > k) + P(X_n > 1) - (n+1)P(X_n > n+1)).$$

Or $P(X_n > 1) = 1$ et $P(X_n > n+1) = 0$; de plus, $1 = P(X_n > 0)$; d'où finalement :

$$\boxed{E(X_n) = \sum_{k=0}^n (P(X_n > k))}.$$

En réutilisant le résultat de la question 7, on en déduit :

$$E(X_n) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{n^k} \binom{n}{k}$$

Soit en appliquant la formule du binôme de Newton :

$$\boxed{E(X_n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}.$$

10. Pour tout entier k compris entre 2 et $n+1$, $P(X_n = k) = P(X_n > k-1) - P(X_n > k)$ (question 8) donc en utilisant le résultat de la question 7 :

$$P(X_n = k) = \frac{1}{n^{k-1}} \binom{n}{k-1} - \frac{1}{n^k} \binom{n}{k}$$

En utilisant l'écriture du coefficient binomial à l'aide des factorielles, et après réduction au même dénominateur, on obtient :

$$P(X_n = k) = \frac{n! [nk - (n-k+1)]}{n^k k! (n-k+1)!}$$

En transformant de nouveau cette écriture, on obtient le résultat demandé :

$$P(X_n = k) = \frac{k-1}{n^k} \binom{n+1}{k}.$$

Partie III : Une convergence en loi.

11. On a

$$\forall n \geq k-1, P(X_n = k) = \frac{k-1}{n^k} \binom{n+1}{k} = \frac{k-1}{n^k k!} \frac{(n+1)!}{(n+1-k)!}.$$

Or, $\frac{(n+1)!}{(n+1-k)!} \sim n^k$.

Par suite, $P(X_n = k) \sim \frac{k-1}{k!}$.

On peut alors en déduire :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = k) = \frac{k-1}{k!}$$

12. On considère la somme partielle d'ordre N de cette série :

$$\forall N \geq 2, \sum_{k=2}^N \frac{k-1}{k!} = \sum_{k=2}^N \frac{1}{(k-1)!} - \sum_{k=2}^N \frac{1}{k!}.$$

$$\forall N \geq 2, \sum_{k=2}^N \frac{k-1}{k!} = 1 - \frac{1}{N!}.$$

Or $\lim_{N \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{N!} = 1$.

On peut donc conclure :

$$\text{La série de terme général } \frac{k-1}{k!} \text{ converge et sa somme est } 1.$$

13. La variable aléatoire Z admet une espérance si et seulement si la série de terme général $kP(Z = k)$ converge absolument ; comme $k \geq 2$, elle admet une espérance si et seulement si la série de terme général $k \frac{k-1}{k!}$ converge.

$$\forall N \geq 2, \sum_{k=2}^N k \frac{k-1}{k!} = \sum_{k=2}^N \frac{1}{(k-2)!}.$$

$$\forall N \geq 2, \sum_{k=2}^N k \frac{k-1}{k!} = \sum_{k=0}^{N-2} \frac{1}{k!}.$$

On en déduit que la série de terme général $k \frac{k-1}{k!}$ converge donc

$$\text{La variable aléatoire } Z \text{ admet une espérance et } E(Z) = e.$$

D'après la question 9, $E(X_n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{n \ln(1 + \frac{1}{n})}$.

Or, $n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n \ln(1 + \frac{1}{n})} = e$.

On peut donc conclure :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E(X_n) = E(Z).$$

ÉCONOMIE

DURÉE : 2 HEURES 30.

Il n'est fait usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

SUJET

Vous rédigez une note de synthèse de l'ensemble documentaire fourni en 500 mots environ.

LE FINANCEMENT DES ENTREPRISES

DOCUMENT 1

DE L'INTÉRÊT DES MARCHÉS FINANCIERS

S'agissant du capital des entreprises, les marchés en sont en principe la source principale dès que les montants sont importants (les financements publics sont l'autre source possible, en pratique marginale pour les entreprises du secteur concurrentiel). Ainsi Carmat, entreprise française qui réalise le premier cœur artificiel implantable, a pu lever en Bourse 29,3 millions d'euros en août 2011 pour poursuivre son développement. Les investisseurs qui ont acheté les actions Carmat ont pris une partie du risque d'entreprise, et ce faisant ont donné à l'entreprise des moyens de poursuivre les essais techniques et cliniques jusqu'au débouché industriel espéré. Ils peuvent tout perdre, mais ils espèrent évidemment que l'entreprise réussira, qu'ils toucheront des dividendes et surtout que la valeur de l'action sera multipliée plusieurs fois.

Les marchés financiers peuvent donc, moyennant des conditions (...), permettre de financer l'économie réelle à un coût moins élevé que par le crédit bancaire. Ils ont permis ainsi indirectement le développement du capitalisme privé, en donnant aux investisseurs initiaux une perspective de valorisation et de cession de leurs placements. Et il faut rappeler que c'est le capitalisme privé qui a financé l'essentiel du développement des entreprises et qui le finance encore, en Occident et dans les pays émergents. (...)

Le partage entre financement de l'économie par les banques ou par les marchés se fait suivant la nature des opérations. Le financement bancaire est dominant, voire exclusif pour le financement des particuliers et des PME. C'est un domaine où la relation directe entre prêteur et emprunteur est importante. Le financement par les marchés est surtout utilisé par les entreprises importantes (ou ayant besoin de capital comme Carmat), par l'Etat et par les institutions financières. Les particuliers interviennent indirectement sur les marchés par le biais du placement de leur épargne dans des instruments collectifs, fonds de retraite, assurance-vie ou Sicav. (...)

Les banques jouent un rôle essentiel d'intermédiaire dans le fonctionnement des marchés financiers, même si ce n'est plus celui de prêteur direct. En effet, il faut des courtiers entre investisseurs et émetteurs de valeurs mobilières, actions et

obligations. Au moment de l'émission d'un emprunt, d'une introduction en bourse d'une entreprise, ou d'une augmentation de capital il faut une organisation qui connaisse les investisseurs (acheteurs potentiels des titres qui seront mis en vente) pour aider l'émetteur à fixer les conditions de son offre, et qui puisse ensuite vendre ces titres aux investisseurs. C'est le métier des banques de marché. Elles ont de très nombreux vendeurs, installés dans leurs salles de marché, qui sont en relation permanente avec les investisseurs (assureurs, gérants de fonds, et aussi les agences des Etats qui gèrent leurs réserves). Et cela dans les principales places financières, Paris, Londres, New York, Singapour, Hong Kong, Tokyo. La connaissance des investisseurs que cette présence leur donne permet aux banques de marché de prendre le risque de garantir prix et quantité aux entreprises émettrices d'actions et d'obligations.

Source : André Levy-Lang, *Il faut maîtriser la finance*, Eyrolles, 2012.

DOCUMENT 2

RAPPORT SUR LE FINANCEMENT DES PME-ETI PAR LE MARCHÉ FINANCIER L'ÉVOLUTION DES MARCHÉS DE PME-ETI

En trente ans, la bourse a connu trois grandes adaptations pour accueillir davantage d'entreprises. Elles ont concerné trois groupes : les entreprises familiales, la nouvelle économie et les activités à fort potentiel de croissance. En 1983, le second marché vise à intégrer les entreprises familiales de taille intermédiaire. Elles représentent aujourd'hui la majorité des entreprises françaises cotées. En 1996, le « nouveau marché » est destiné aux entreprises de la nouvelle économie dont les fondateurs ont une culture spontanément ouverte sur la bourse, influencée par l'exemple américain. Le marché est emporté par l'éclatement de la bulle des valeurs technologiques. En 2005, le marché réorganisé « Euronext » est réorganisé en trois compartiments d'entreprises réparties selon l'importance de leur capitalisation. Un marché organisé est lancé sous la marque Alternext. Il vise les entreprises petites et moyennes performantes auxquelles il procure un environnement juridique plus souple, de nature à leur permettre de se familiariser avec le marché financier. Cette organisation des marchés de cotation demeure inchangée jusqu'à présent. La créativité de l'entreprise de marché n'a cependant pas permis d'enrayer la diminution du nombre des entreprises françaises cotées.

| Année | 1 ^{er} marché | 2 nd marché | | Nouveau marché | Alternext | Total |
|-------|------------------------|------------------------|-------------------|----------------|-----------|-------|
| 1978 | 850 | - | | - | - | 850 |
| 1983 | 697 | 43 | | - | - | 740 |
| 1996 | 406 | 280 | | 16 | - | 702 |
| 2001 | 298 | 340 | | 156 | - | 794 |
| | Euronext A | Euronext B | Euronext C | - | - | |
| 2010 | 406 | 136 | 305 | - | 133 | 688 |

Source : le marché financier d'Alain Choinel et Gérard Rouyer, revue Banque Edition et rapport 2010 de l'Observatoire du financement des entreprises par le marché.

Cette diminution semble avoir plusieurs causes structurelles et factuelles. Le financement de l'économie en France est largement dominé par le crédit bancaire. Le capital investissement s'impose avec des méthodes plus simples, des capitaux procurés partiellement par la puissance publique, notamment le Fonds Stratégique d'Investissement, un réseau de distribution dense relayé par les banques et des valorisations qui anticipent, non seulement la performance de l'entreprise, mais également l'effet de levier procuré par le crédit bancaire qui finance un nombre important d'opérations. (...)

Les pme-eti cotées représentent à peine 0,3 % des 164 600 entreprises de plus de dix salariés alors que près de 60 % des 200 grandes entreprises françaises sont cotées. Une marge de progression est donc envisageable. (...) Le solde des introductions et des retraits du marché financier se redresse en 2010 après avoir été très négatif. Ces trois dernières années, il y a eu en moyenne deux retraits pour une introduction. Les opérations financières sont les augmentations de capital et les autres financements en bourse des pme-eti cotées. Elles concernent moins de 10 % des entreprises cotées. Cela révèle un paradoxe : elles utilisent peu le marché financier où elles sont déjà présentes pour obtenir des ressources supplémentaires alors qu'elles investissent régulièrement et substantiellement comme le montrent les études de la Banque de France sur ces sujets.

L'aversion de nombreuses entreprises à la dilution du capital, l'insuffisant dynamisme du marché financier et l'absence de véritable offre obligataire, à l'exception de quelques émissions récentes, marginales en nombre et en montant, sont les freins au refinancement régulier des entreprises par le marché financier.

La liquidité des pme-eti est réputée insuffisante parce que ces entreprises ont une capitalisation limitée compte tenu de leur taille et un flottant réduit, le plus souvent pour protéger le contrôle de l'entreprise par les actionnaires fondateurs. Comparée à la liquidité des grandes valeurs qu'on peut estimer à 100 %, la liquidité des pme-eti représente de l'ordre de 8 millions d'euros pour les sociétés d'Alternext qui ont une valeur moyenne de 32 millions d'euros, de l'ordre de 13 millions d'euros pour les sociétés d'Euronext C qui ont une valeur moyenne de 53 millions d'euros et de l'ordre de 146 millions d'euros pour les sociétés d'Euronext B qui ont une valeur moyenne de 460 millions d'euros. Ces moyennes masquent des écarts importants. Il est à craindre que cette situation soit durablement installée. Compte tenu de la difficulté structurelle à faire varier le flottant et la capitalisation, la seule voie de court et moyen terme pour augmenter la liquidité est de multiplier le nombre de pme-eti cotées de manière à accroître les opportunités d'investissement. (...)

Le marché financier des pme-eti est demeuré marginal quant à son poids économique, au nombre d'entreprises qu'il regroupe et à ses performances. En dépit des relances successives, les difficultés auxquelles il est exposé n'ont pas trouvé de solution. (...) La crise économique a aggravé le défaut de liquidité des titres et a posé la question de la capacité du marché à refléter la valeur économique réelle des entreprises.

La crise financière a provoqué une forte instabilité des marchés qui s'est traduite par une grande volatilité de la valeur des titres, exacerbée par la recherche de la liquidité, compte tenu de la réactivité extrême des investisseurs. La valeur des pme-eti cotées en a été dégradée en raison de l'analyse des risques et de la faible liquidité des titres. Cette dégradation a paru, dans un certain nombre de cas, avoir peu de rapport avec la performance de ces entreprises. Il en est résulté le sentiment d'un décalage entre la valeur donnée par le marché et la réalité économique de l'entreprise. Cette divergence est à l'origine d'une certaine désillusion vis-à-vis du marché financier (...)

Par ailleurs, les coûts du marché financier des pme-eti deviennent un obstacle à l'introduction et à la cotation des valeurs moyennes et intermédiaires. La modernisation et la concurrence sur les marchés financiers ne semblent pas s'être traduites par une réduction des coûts, jugés élevés par la communauté des pme-eti. (...)

C'est une des raisons pour lesquelles nombre d'entre elles se tournent plutôt vers le crédit, le capital privé et le capital investissement pour se procurer des ressources financières. L'ensemble de ces difficultés entraînent, dans certaines circonstances, un certain nombre de pme-eti à envisager des retraits de la bourse.

Une crédibilité érodée auprès des entrepreneurs

Les griefs relatifs à la réglementation et aux coûts des marchés financiers, aussi fondés qu'ils soient, ne peuvent expliquer à eux seuls la perte de confiance. Elle est à rechercher dans les attentes différentes d'une part des entreprises, d'autre part des investisseurs et de l'entreprise de marché sur les atouts fondamentaux du marché que sont l'apport au capital et la liquidité. Les entreprises qui s'adressent au marché financier sont en général motivées par l'accès à des ressources financières nouvelles, par la notoriété et par la visibilité que procure la présence sur le marché financier. De taille moyenne et intermédiaire, privilégiant le contrôle de l'entreprise par les actionnaires fondateurs, ces entreprises lèvent des capitaux représentatifs de leur valeur relative, pour une part équivalente en moyenne à 30 % des fonds propres. La plupart de ces entreprises remplissent toutes les conditions d'une croissance conséquente. Elles sont davantage préoccupées par la valeur économique de l'entreprise que par la liquidité des titres. Du reste elles privilégient le plus souvent un actionnariat stable avec lequel elles commercent sur la base de «*T' affectio societatis* ». Les grands investisseurs et l'entreprise de marché attendent prioritairement un haut niveau de capitaux mobilisés et une liquidité élevée. Ainsi, les objectifs d'une part des pme-eti, d'autre part des grands investisseurs et de l'entreprise de marché ne sont pas globalement concordants. Les grands investisseurs, aujourd'hui très largement intermédiés par les sociétés de gestion, recherchent des valeurs d'entreprise sûres, dont la capitalisation est le plus souvent supérieure à un milliard d'euros et qui présentent un flottant de plusieurs centaines de millions d'euros et une liquidité suffisante permettant d'échanger rapidement leurs titres (...)

Extrait du rapport « le financement des pme-eti par le marché financier »,
Direction Générale du Trésor, novembre 2011.

DOCUMENT 3

LE FINANCEMENT DES PME ETI EN FRANCE : MAIS OÙ EST DONC LE PROBLÈME ?

La difficulté d'accès des PME et ETI aux financements est une des idées les mieux ancrées dans l'opinion française. Chacun a connu ou entendu parler d'entreprises empêchées de naître ou de se développer, voire poussées à la faillite par des contraintes de crédit ou l'incapacité à se procurer des capitaux propres. (...)

Les données de diverses natures, dont on dispose, contredisent pratiquement toutes ces histoires qui se colportent et ces convictions largement partagées.

L'accès au crédit

Parmi les travaux réalisés récemment, une enquête de la Banque de France s'efforce d'appréhender l'évolution des demandes de crédit exprimées par les PME ainsi que les conditions d'obtention (quand c'est le cas) des financements sollicités. Or, les résultats de cette enquête montrent que les PME voient leurs demandes satisfaites en totalité ou en partie dans 88 % des cas (...) pour ce qui est des crédits d'investissement ; elles le sont entre 63 et 72 % (de 2012 à 2013) pour ce qui est des crédits de trésorerie. Il est indéniable qu'il existe des entreprises qui éprouvent des difficultés à obtenir des crédits, mais il n'y a là rien de surprenant ou d'inquiétant. (...)

Les enquêtes mensuelles sur le financement des PME-ETI semblent confirmer l'absence de rationnement du crédit depuis l'entrée en crise. Car, durant le creux conjoncturel de 2009, les volumes de crédit aux PME indépendantes (susceptibles d'être plus exposées au rationnement) n'ont jamais décliné alors que ceux des PME de groupes ou de grandes entreprises s'inscrivaient en repli. (...) Ces évolutions tendent à prouver que les mouvements des crédits durant cette période étaient principalement dus à une faiblesse de la demande et non à une restriction de l'offre.

Depuis la crise de l'été 2011, la croissance du crédit a de nouveau été freinée, mais elle est restée positive pour les PME, y compris pour les PME indépendantes. Bien entendu, ces évolutions globales masquent des disparités importantes selon les caractéristiques individuelles et les appartenances sectorielles. En l'occurrence, les PME industrielles, connaissent de ce point de vue, des conditions moins favorables. Mais au total, il n'y a rien dans ces observations qui accrédite la thèse d'un accès plus difficile au crédit des PME-ETI, aussi bien en termes de volume que de taux. Rien non plus qui confirme les prophéties apocalyptiques de la profession bancaire, reprises naïvement de toutes parts, mettant en avant les risques de rationnement et de durcissement des conditions de crédit induits par la nouvelle réglementation de Bâle III. (...)

L'accès aux fonds propres

L'accès aux capitaux propres est souvent considéré comme la question cruciale pour le financement des entreprises naissantes ou en développement. Plus généralement, il serait un obstacle majeur à la stabilité et à la croissance des PME et ETI. Or ici encore, les statistiques (extraites de la base FIBEN) qui portent bien-sûr sur les seules entreprises existantes (ce qui est une sérieuse limite) ne révèlent pas de difficultés particulières. Les situations apparaissent très hétérogènes, mais globalement les PME, et dans une moindre mesure les ETI, sont bien capitalisées, c'est-à-dire mieux que leurs homologues européennes, y compris allemandes. Depuis la fin des années quatre-vingt dix, les PME françaises ont sensiblement augmenté leur capitalisation, par financement interne, par recours à des capitaux en provenance de leur environnement proche, mais aussi en provenance d'investisseurs institutionnels et d'institutions publiques (CDC, OSEO, FSI, etc ...). (...)

En définitive, il apparaît que les PME-ETI disposent de sources d'accès aux capitaux assez nombreuses. S'il est une faiblesse en ce domaine, elle tient sans doute à l'investissement limité en capital investissement de la part des grandes entreprises.

Des réponses douteuses à un problème mal identifié

L'accès au financement des PME est depuis longtemps une préoccupation importante des pouvoirs publics, particulièrement en temps de crise. En témoigne l'historique de nombreuses initiatives en ce domaine et l'existence d'institutions

diverses (CDC, FSI, BPI...) dont l'objectif principal ou secondaire est de répondre à une difficulté réelle ou « fantasmée » qui semble faire consensus.

L'intervention publique se justifie pleinement dès lors que l'on craint que des imperfections de marché conduisent à des discriminations de financement à l'encontre de certaines entreprises ou de certains types d'investissement. Elle se justifie aussi lorsque la volonté d'assurer la stabilité du système financier (des banques en particulier) contraint la réalisation de projets risqués mais rentables et/ou stratégiques. La prise en charge de leur financement par des institutions publiques, sous une forme ou une autre, est alors souhaitable. Et la création de la Banque Publique d'Investissement se situe bien dans cette perspective. Mais, à ce stade son principal mérite est d'aider à mieux coordonner une gamme des interventions existantes (de trouver des synergies entre elles). Il ne semble pas qu'elle ait vocation à étendre la gamme et à remplir des fonctions qui n'étaient pas exercées jusqu'ici. Le profil des projets ciblés n'a d'ailleurs pas été modifié.

Cela dit, l'intervention publique ne se borne pas à prendre directement en charge certains types de financement. L'Etat peut aussi agir par des incitations, des modifications du cadre juridique et réglementaire (allocation financière aux banques avec comme contrepartie l'utilisation de ces fonds pour financer des PME, possibilité de titriser les prêts octroyés aux PME, création de marché financier régionalisé « Enter-next » ou encore le lancement d'un Plan d'Épargne en Actions - spécial PME) (*).

Et si le problème était ailleurs

Au bout du compte, il faut avouer notre incapacité à cerner le problème, si souvent évoqué de l'accès au financement des PME. Si on laisse de côté le cas de géniaux inventeurs éconduits parce qu'incompris et d'autres exemples trop anecdotiques pour faire une généralité, on a du mal à se convaincre qu'il y a là une question majeure de politique économique.

Toutefois, pour éviter le paradoxe et tenter un compromis avec l'avis majoritaire, on avancera deux hypothèses :

1- La première suggérée par l'Observatoire sur le financement des entreprises consiste à dire que les difficultés de financement que l'on dénonce ne sont que le reflet de la faible rentabilité d'un certain nombre de PME, notamment dans l'industrie. Ces difficultés ne sont que le symptôme d'un problème d'une autre nature. La structure financière et la situation de trésorerie de ces entreprises sont fragiles parce que leurs marges sont trop faibles. De sorte, qu'elles se rendent trop, et trop souvent, dépendantes de financements externes, et sont incapables de donner des garanties nécessaires à des apporteurs de capitaux potentiels. Dès lors, ce n'est pas leur accès au financement que l'on doit traiter, mais leur compétitivité.

2- La seconde hypothèse, qui complète la première, revient à mettre en cause la fragilité des relations que certaines PME entretiennent avec leur environnement économique et financier. Leurs conditions d'exploitation sont incertaines parce que les rapports qu'elles nouent avec leur clientèle et notamment avec les grandes entreprises donneurs d'ordre sont incertains. Ce qui rétrécit leur horizon et les prive de soutien dans les périodes conjoncturelles difficiles. A cet égard, la position des PME françaises est bien différente de celles de leurs homologues allemandes qui forment des blocs durables entre elles et autour de grands groupes (...).

Source : Jean-Paul Pollin, *Financement des PME, grands défis, nouvelles voies*, PUF 2013 (ouvrage collectif)

(*) Le contenu entre parenthèse a été rédigé par le concepteur du sujet dans un souci d'illustration et d'explicitation.

CORRIGÉ

Par Frédéric Larchevêque, professeur de chaire supérieure, lycée Alfred-Kastler, Cergy.

L'ensemble documentaire fourni cette année comportait 3 documents, 3 textes dont l'un comportait un tableau pour un total de 3 000 mots environ. Comme les dernières sessions, il était précédé d'un titre : « Le financement des entreprises ».

De l'analyse du titre...

Le titre donné à l'ensemble documentaire constitue la première information sur le thème de la note de synthèse à réaliser. Il convient donc de ne pas le négliger, car il peut aider à identifier le problème central, à sélectionner plus efficacement les idées principales et enfin à construire un plan efficace. Toutefois, le titre ne doit pas être confondu avec la problématique soulevée par l'ensemble documentaire. Seule une lecture globale des textes permet de la découvrir.

Un résumé de l'essentiel des trois documents est ici utile.

Le premier document rappelle que pour se financer les entreprises peuvent recourir aux marchés financiers ou au système bancaire et montre que si les marchés financiers sont fondamentaux pour le financement des grands projets, les PME et ETI y sont peu présentes.

Le second document rend compte du fait que malgré les efforts des sociétés de bourse pour se rendre accessibles à un plus grand nombre de PME et ETI, les résultats sont décevants. Différentes explications sont proposées.

Enfin, le dernier document remet en cause le consensus dominant faisant état de difficultés récurrentes d'accès au financement des PME et ETI pour examiner les vraies causes de leur fragilité financière et les fondements d'une intervention de l'Etat dans ce domaine.

.... à la problématique

Le résumé des trois documents permet d'aller plus loin dans l'analyse du titre. Au fond, l'ensemble documentaire porte moins sur le financement des entreprises en général que sur le financement des PME-ETI.

Le titre de l'ensemble documentaire aurait donc pu être : « le financement des PME-ETI » et le problème soulevé devenait alors quelque chose de ce type : Le consensus sur les difficultés d'accès au financement des PME-ETI correspond-il à la réalité ?

L'ensemble documentaire dans le programme

L'ensemble documentaire portait à titre principal sur le module II Les conditions et les finalités de la croissance du programme et plus particulièrement le point 3, Le financement de la croissance.

Toutefois, la notion de PME-ETI relevait du premier module, les fondements de l'économie de marché, plus particulièrement, le point 1, les agents économiques et leurs fonctions principales, tandis que celles relatives aux interventions de l'Etat dans le financement des PME-ETI relevaient du module III, l'intervention des autorités publiques dans l'allocation des ressources et plus particulièrement du point 3, l'intervention dans le système productif.

Module I Les fondements de l'économie de marché

1.1.1 Les agents économiques et leurs fonctions principales

Module II Les conditions et les finalités de la croissance

2.3 Le financement de la croissance

2.3.1 Le financement indirect de l'économie par les établissements de crédits

2.3.2 Le financement direct de l'économie par le marché financier

Module III La justification des politiques économiques

3.1 L'intervention des autorités publiques dans l'allocation des ressources

3.1.1 L'intervention dans le système productif

Les critères généraux d'évaluation d'une synthèse de documents économiques

- **Le respect de trois exigences fondamentales énoncées dans le règlement de l'épreuve**
 - **La note de synthèse ne doit pas dépasser le nombre de mots indiqués dans la consigne, 500 mots à 10 % près en plus ou en moins.** Il est obligatoire d'indiquer le nombre de mots approximativement utilisés au début ou à la fin de sa note de synthèse. Si le jury n'exige pas un décompte aussi précis qu'en contraction de texte, il sanctionne lourdement les dépassements qui dénaturent l'exercice.
 - **L'objectivité et la neutralité du propos (la synthèse n'est pas une dissertation qui cherche à convaincre d'une position personnelle) :** le candidat exprime exclusivement les idées présentes dans l'ensemble documentaire. Il convient donc de résister absolument à la tentation d'ajouter des arguments ou des exemples qui auront pu être étudiés par ailleurs. Par ailleurs, l'emploi du « je » ou du « nous » notamment pour annoncer le plan de sa note est interdit, car l'exercice de la synthèse est impersonnel.
 - **La reformulation personnelle des idées et arguments relevés (la synthèse n'est pas un résumé) :** le candidat ne peut se contenter de reprendre des morceaux de phrase des textes sous la forme d'un « copier-coller » plus ou moins adroit. Par ailleurs, il ne saurait se contenter d'exprimer les idées dans l'ordre où elles apparaissent. Il convient de sélectionner les idées principales, de les reformuler sans commettre de contre sens et de les organiser de façon logique et structurée.

- **Les compétences principales attendues d'une bonne copie**
 - Le respect de règles (peu nombreuses) de l'exercice (une introduction centrée sur l'identification du thème principal abordé, un plan bien annoncé, un développement clairement structuré en deux ou trois parties, une rapide conclusion sans répétition ni ouverture).
 - Un recensement exact et une reformulation pertinente des idées de l'ensemble documentaire permettent d'évaluer la bonne compréhension des textes à travers l'absence d'oublis majeurs, l'absence de contre-sens et l'emploi d'un vocabulaire adapté.
 - La production d'un agencement personnel et hiérarchisé des idées dans un plan cohérent. La note de synthèse doit avoir du sens pour constituer un compte rendu efficace de l'ensemble documentaire.
 - Une expression écrite soignée, tant du point de vue du respect des règles de grammaire et d'orthographe que de la syntaxe.

- **Ces compétences sont évaluées à partir de certaines capacités**
 - La capacité à **analyser le titre** pour cerner efficacement l'objet de la note.
 - La capacité à **identifier** avec exactitude les idées principales du corpus documentaire.
 - La capacité à **hiérarchiser** les idées en ne mettant donc pas sur le même plan les idées essentielles, les idées plus accessoires ou les exemples.
 - La capacité à **reformuler** sans paraphrase les idées identifiées, notamment par un usage approprié du vocabulaire économique.

- La capacité à **organiser et à relier** l'ensemble des idées de façon cohérente.
- La capacité à **proposer un plan cohérent**, clairement annoncé, mais sans utiliser les formules inadaptées du type : « dans une première partie, nous montrerons que... », « puis dans une seconde partie... ».

Le recensement des idées de l'ensemble documentaire

Il doit être clair que vous ne disposez pas du temps nécessaire pour produire un recensement totalement rédigé des idées principales de l'ensemble documentaire tel qu'il est proposé dans ce corrigé. Mais, ce recensement vous sera utile pour vous entraîner et comparer votre propre travail avec celui-ci.

Vos différents entraînements (en devoir, en colle d'économie) vous ont permis de tester la méthode qui peut vous convenir le mieux : prise de note, confection d'un tableau par thématique, système de renvoi numéroté aux textes, surlignement efficace et usage d'un jeu de couleurs, etc. Chacun doit, dans tous les cas, trouver sa méthode et s'y tenir pour accroître les effets d'expérience.

Pour ce corrigé, nous avons relevé et reformulé les idées principales de chaque document en nous laissant guider par notre analyse préalable du titre. Nous l'avons vu, il s'agit moins de présenter une note sur le financement des entreprises en général que sur l'accès au financement des PME-ETI en particulier.

Document 1 : De l'intérêt des marchés financiers

Idee 1 : Les deux modes de financement

Pour se financer, les entreprises peuvent recourir aux marchés financiers ou aux banques. Dans la pratique, le partage entre les deux modes de financement dépend de la nature des acteurs, de leur taille notamment : ainsi, bien que moins coûteux que le crédit bancaire, les marchés financiers ne sont utilisés que par les grandes entreprises, l'Etat ou les PME innovantes comme la Société Carmat.

Idee 2 : Le rôle des marchés financiers dans le développement du capitalisme

Les marchés financiers permettent aux entreprises de lever des capitaux importants en échange d'une triple promesse : le partage des bénéfices (dividendes), la valorisation des titres émis (plus value) et la possibilité de les négocier sur le marché (propriété de liquidité des marchés).

Une idée plus accessoire : les banques de marché

Les banques ont un rôle important dans le fonctionnement des marchés financiers en se faisant l'intermédiaire entre les émetteurs de titres et les investisseurs potentiels.

Document 2 : Rapport sur le financement des PME-ETI par le marché financier

Idee 1 : Malgré les réformes successives pour mieux accueillir les PME-ETI, le nombre de PME à s'introduire en bourse ne progresse pas.

- Les réformes de la cote : 1983, création du nouveau marché destiné à accueillir des PME de taille intermédiaire, 1996, création du nouveau marché destiné aux entreprises technologiques et enfin 2005, création d'Alternext.
- Mais, le nombre de PME-ETI cotées reste très faible (0,3 % des PME de plus de 10 salariés contre 60 % des grandes entreprises) et même lorsqu'elles y sont présentes, elles recourent peu au financement de marché.

Idée 2 : Les explications du faible recours des PME-ETI aux financements de marchés

- Les coûts et la complexité d'accès aux marchés financiers sont restés élevés.
- Les objectifs des investisseurs et des dirigeants de PME-ETI sont divergents : même si les dirigeants reconnaissent la notoriété que peut apporter un accès au marché financier, ils craignent de perdre le contrôle de leur entreprise (d'où une faible part du capital émis sur le marché par crainte de la dilution du capital), alors que les investisseurs recherchent des titres très liquides (rq : un titre est liquide lorsque le risque de ne pas pouvoir vendre son titre est limité. Cela suppose un flottant important).
- La crise financière a engendré une forte volatilité des titres dont la valeur ne reflète pas la valeur économique réelle de l'entreprise. D'où une certaine « désillusion » des dirigeants de PME.

Idée 3 : Les PME privilégient d'autres sources de financement

- Recours dominant au crédit bancaire.
- En complément, financement en fonds propres auprès d'organismes financiers publics (FSI) et des sociétés de capital investissement.

Document 3 : Le financement des PME ETI en France : Mais où est donc le problème ?***Idée 1 : Le préjugé des difficultés d'accès des PME-ETI au financement bancaire***

- Les PME-ETI ne souffrent pas d'un rationnement du crédit bancaire : la banque de France a établi qu'elles obtiennent les crédits qu'elles demandent (à 88 % pour les crédits d'investissement et à 72 % pour les crédits de trésorerie).
- Le fléchissement du crédit bancaire depuis la crise est davantage dû à la faiblesse de la demande que d'un rationnement effectif du crédit.
- L'argument des banques sur les risques accrus de rationnement du crédit avec la mise en place de la nouvelle réglementation bancaire dite Bâle III ne tient pas.

Idée 2 : Le préjugé selon lequel les PME-ETI seraient fragilisées par la faiblesse de leurs fonds propres

- Les PME, et dans une moindre mesure les ETI, ne sont pas sous capitalisées et le sont même parfois mieux que leurs homologues d'autres pays, y compris allemandes.
- La capitalisation des PME se fait par le recours à d'autres moyens que le recours aux marchés financiers : recours aux proches, aux investisseurs institutionnels et publics (FSI, etc.).

Idée 3 : L'intervention de l'Etat dans le financement des entreprises et notamment des PME ne peut se justifier qu'en cas de défaillances des marchés financiers

- En cas de discrimination entre les entreprises et les projets.
- Pour financer des projets trop risqués pour les banques.

Idée 4 : Les causes plus profondes des problèmes souvent évoqués de financement des PME

- La faible rentabilité des PME-ETI (faible taux de marge) qui renvoie en réalité à une compétitivité insuffisante ;
- La fragilité de leurs relations avec leur environnement économique et financier, (notamment avec leurs donneurs d'ordre) contrairement à la solidarité qui prévaut en Allemagne.

NOTE DE SYNTHÈSE PROPOSÉE EN 548 MOTS

Il va de soi qu'il n'existe pas un seul plan possible pour rendre compte avec exactitude de cet ensemble documentaire. Alors que le recensement des idées exige la plus stricte neutralité et objectivité, la conception du plan est par nature plus personnelle à condition qu'il soit cohérent et respectueux des idées énoncées dans l'ensemble documentaire. Il faut beaucoup de savoir faire et une grande pratique pour relier logiquement les idées relevées et donner du sens à sa note.

INTRODUCTION

Quelques conseils de méthode : courte et précise, l'introduction a deux fonctions essentielles. Elle énonce d'abord avec précision le problème central soulevé dans l'ensemble documentaire, puis elle propose au lecteur un guide clair du plan de la note. L'introduction débute par une entrée en matière qui reprend une idée, un exemple, certes assez secondaire pour être retenu dans le développement mais utile pour « accrocher » le lecteur.

PROPOSITION RÉDIGÉE (48 MOTS)

Contrairement aux grandes entreprises, les PME-ETI privilégient le crédit bancaire et délaissent le financement par les marchés pourtant moins coûteux.

Avec la crise, l'opinion commune, selon laquelle le développement des PME-ETI serait entravé par des difficultés d'accès au financement, sort renforcée. Un tel consensus correspond-il à la réalité ?

LE DÉVELOPPEMENT, QUELQUES CONSEILS DE MÉTHODE

Le lecteur doit repérer aisément le plan choisi lorsqu'il découvrira votre note de synthèse. Il convient donc de l'organiser en deux ou trois parties clairement annoncées par une phrase courte. Le plan proposé correspond à un réagencement ordonné des idées qui permet de rendre compte avec exactitude de l'ensemble documentaire. Il est important que votre note de synthèse soit porteuse de sens.

PROPOSITION RÉDIGÉE (237 MOTS)

I- Les PME-ETI ne connaissent pas de réelles difficultés de financement

A- Leurs difficultés de financement reposent sur des préjugés

Premier préjugé, les banques seraient victimes d'un rationnement du crédit bancaire. Pourtant la banque de France révèle que 88 % des demandes concernant des crédits d'investissement et 72 % des demandes de crédits de trésorerie sont satisfaites. Depuis la crise de 2008, le fléchissement du crédit bancaire s'explique plus par la faiblesse de la demande que par un rationnement effectif du crédit.

Second préjugé, les PME-ETI seraient sous capitalisées. Les statistiques de la base FIBEN montrent qu'elles sont mieux dotées en capital que leurs homologues européens. Elles font en effet appel à leur environnement proche et à des investisseurs institutionnels et publics comme le FSI et maintenant la Banque publique d'investissement.

B- La cote a été réformée pour mieux accueillir les PME

L'exemple de Carmat le montre bien, les marchés financiers permettent aux entreprises de lever des capitaux importants. En contrepartie du risque pris, les investisseurs comptent sur une part des bénéfices, une valorisation de leurs titres et enfin la possibilité de les négocier sur le marché.

Le marché financier s'est réformé pour créer un environnement plus propice aux PME. En 1983 a été créé le second marché, en 1996, le second marché pour intégrer les entreprises technologiques. Depuis 2005, Alternext vise à familiariser les petites et moyennes entreprises avec le marché financier en leur garantissant un environnement juridique plus souple.

II- Les PME-ETI délaissent les marchés financiers, mais les freins à leur développement sont ailleurs (242 mots)

A- Un nombre insuffisant de PME-ETI recourt aux marchés financiers

Les dirigeants reconnaissent que les marchés financiers pourraient leur apporter, outre des fonds, une plus grande notoriété. Pourtant, 0,3 % seulement des PME de plus de 10 salariés utilisent les marchés pour leurs opérations financières et on compte actuellement plus de retraits que d'introduction.

Outre la complexité et les coûts encore élevés d'une introduction en bourse pour les PME, les causes de leur désintérêt tiennent à la divergence d'objectifs entre les investisseurs et les dirigeants. Ces derniers craignent la dilution de leur capital en cas d'introduction en bourse. De leur côté, les investisseurs recherchent une forte liquidité du titre ce que les PME-ETI ne peuvent guère offrir notamment du fait de leur faible taille.

La crise financière a engendré une forte volatilité des titres dont la valeur ne reflète pas la valeur économique réelle de l'entreprise. D'où une certaine « désillusion » des dirigeants de PME.

B- Les possibles freins au développement des PME-ETI

La véritable cause des problèmes de financement des PME-ETI peut être recherchée dans deux directions. Ces entreprises souffrent d'abord d'une rentabilité insuffisante qui s'explique par leur faibles marges et renvoie en dernier ressort à des problèmes de compétitivité. Ensuite, contrairement à la solidarité qui prévaut en Allemagne, les PME entretiennent des relations très fragiles avec leur environnement économique et financier, notamment avec leurs donneurs d'ordre.

CONCLURE

Quelques conseils de méthode : la conclusion de la note de synthèse doit être courte. Il n'est pas question, comme dans une dissertation, de faire le résumé des idées énoncées dans le développement ou bien encore de chercher à ouvrir des perspectives. Une bonne conclusion ne dépasse pas deux ou trois lignes et consiste à répondre, dans l'esprit de l'ensemble documentaire, au problème posé. Il peut être adroit d'utiliser une idée importante qui n'aura pas eu sa place dans le développement.

PROPOSITION RÉDIGÉE (21 MOTS)

L'intervention des pouvoirs publics en matière de financement des entreprises ne se justifie qu'en cas de défaillances des marchés du crédit.

ÉCONOMIE

DURÉE : 2 HEURES 30.

SUJET

PREMIÈRE PARTIE : NOTE DE SYNTHÈSE

A partir du dossier documentaire suivant, vous ferez une note de synthèse de 500 mots environ (à plus ou moins 10 %) sur **le niveau de la fiscalité en France**.

Composition du dossier documentaire :

- **Document 1** : La France ne saisit pas l'urgence d'une réforme. Elie Cohen, *Le Monde*, 27 septembre 2013
- **Document 2** : Pression fiscale et recettes totales des administrations publiques en France, Natixis, 9 décembre 2013
- **Document 3** : La fiscalité antiéconomique, Jean Peyrelevalde, *Les Echos*, 8 octobre 2013
- **Document 4** : La France malade de sa fiscalité, B. Engert, *Telos*, 29 avril 2013

Dossier documentaire :

DOCUMENT 1

LA FRANCE NE SAISIT PAS L'URGENCE D'UNE RÉFORME

Il est des domaines de l'action publique où, les controverses s'épuisant, les esprits finissent par converger tant sur les constats que sur les propositions. La réforme fiscale est de ceux-là. Après les excès de Nicolas Sarkozy, qui a multiplié les avantages fiscaux aux plus riches dans un contexte de disette budgétaire, exacerbant ainsi le sentiment d'inégalité, et ceux de François Hollande, qui a pratiqué la répression fiscale des riches et suscité la révolte des entrepreneurs et un ras-le-bol général, nous sommes sans doute parvenus à ce moment. Techniquement, chacun s'accorde pour juger notre fiscalité illisible avec ses assiettes mitées, ses bases étroites, ses dérogations et exonérations aux objectifs contradictoires. Politiquement le moment est bien choisi, car les objectifs de réduction des déficits, de stimulation de la compétitivité et de justice fiscale sont largement partagés.

La convergence va même au-delà : elle porte sur les mesures à prendre en plus de l'élimination des niches fiscales qui biaisent la progressivité de l'impôt et le transfert de charges pesant sur le travail vers des impôts universels. Le tout afin d'améliorer la compétitivité et la taxation de la rente pour stimuler la croissance.

Le moment est venu de repenser le système, car même les réformes partielles menées avec les meilleures intentions du monde n'atteignent pas les objectifs assignés. Le crédit d'impôt compétitivité emploi (CICE) était censé stimuler les entreprises françaises, notamment industrielles et exportatrices. Le diagnostic établi par Louis Gallois était imparable : pour innover, exporter et investir, il fallait rétablir les marges et donc alléger le coût du travail par un transfert des charges sociales

patronales vers une assiette de taxation plus large comme la contribution sociale généralisée (CSG) ou la TVA.

A l'arrivée, le CICE n'annule pas les hausses d'impôts décidées entre 2011 et 2013, manque partiellement son objectif de promotion de l'industrie à cause des salaires concernés et n'évitera pas la création d'un impôt nouveau sur l'excédent brut d'exploitation. Ainsi, plus une entreprise innove, investit et rémunère ses salariés, plus sa taxation est relativement alourdie. Ainsi, une mesure qui devait traiter la question de la compétitivité, en fait, l'aggrave puisqu'elle dissuade la montée en gamme et qu'elle ne contribue que faiblement à la baisse des coûts.

La restauration de la TVA sociale pour financer le CICE est un autre exemple de cette lente convergence des esprits en faveur d'une fiscalité incitative. On s'en souvient, après avoir beaucoup hésité, Nicolas Sarkozy l'avait instaurée en fin de mandat et la gauche avait légitimement critiqué la démarche. François Hollande, sitôt élu, l'a supprimée, puis l'a rétablie partiellement. Il légitime ainsi la thèse de la dévaluation fiscale et confirme l'existence de marges de manœuvre en matière de taxation de la consommation.

C'est à tort que l'on croit qu'en France, on surtaxe la consommation alors qu'en fait, les taux de base de la TVA sont supérieurs dans les pays nordiques et l'Allemagne a bien géré son augmentation de trois points. On peut estimer que la TVA n'est pas le bon instrument pour financer les dépenses sociales universelles et préférer la CSG. Mais nul ne conteste à présent la double logique de la dévaluation fiscale et d'un financement universel de dépenses sociales universelles.

Un dernier exemple de cette convergence a trait à la taxation du capital et des revenus du capital : droite comme gauche se sont appliquées à alourdir la taxation du capital et à préserver les rentes. Pourtant, la théorie économique nous enseigne qu'il faut taxer différemment le revenus du capital et ceux du travail, car le capital constitue de l'épargne qui a déjà été taxée qu'en situation de concurrence fiscale, des taux nominaux élevés sont d'un moindre rendement que des taux faibles appliqués à une assiette large et qu'enfin le capital investi génère des externalités positives.

Les expériences des pays nordiques livrent des résultats non équivoques : ce sont les réformes évoquées plus haut qui ont permis à ces pays de sortir de la crise des années 1990 et d'impulser une dynamique innovatrice à leurs économies. L'accord sur le niveau de la dépense publique et la résorption du déficit est le premier niveau d'engagement politique, celui qui permet d'exprimer démocratiquement les préférences collectives d'un peuple et la responsabilité des générations présentes à l'égard des générations futures.

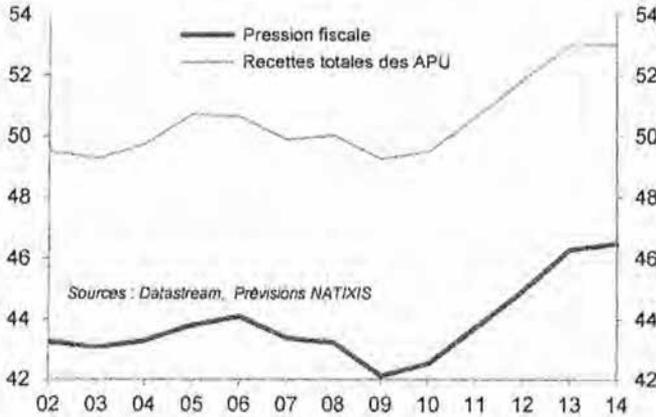
Dépollué des niches qui ont fait la preuve de leur inefficacité, l'impôt sur le revenu est un bon instrument de fiscalité progressive. Une fiscalité spécifique du capital, à un taux moindre que la taxation du travail, est une bonne incitation à l'innovation et à la localisation des activités sur le territoire.

Enfin, des impôts sur la consommation et le carbone de bon rendement permettent de financer la politique sociale en allégeant le coût du travail. Les compromis pragmatiques adoptés par les uns et les autres à l'épreuve du pouvoir, les leçons des expériences étrangères, les contraintes acceptées de réduction des déficits ne suffisent pourtant pas à rendre nécessaires les réformes jugées utiles. Il faut sans doute un sens de l'urgence que l'on ne perçoit pas encore en France.

Source : Elie Cohen, *Le Monde*, 27 septembre 2013.

DOCUMENT 2

PRESSION FISCALE ET RECETTES TOTALES DES ADMINISTRATIONS PUBLIQUES EN FRANCE



Source : Natixis, 9 décembre 2013.

DOCUMENT 3

LA FISCALITÉ ANTIÉCONOMIQUE

On sait que les prélèvements obligatoires sont beaucoup plus élevés en France que chez nos voisins ; 43,9 du PIB (en 2011), contre 36,7 dans la zone euro. Mais cette différence importante, de plus de sept points (soit 140 milliards d'euros), ne suffit pas à qualifier notre système comme anormal ni à expliquer par elle-même notre incapacité à retrouver un chemin de croissance solide. Pour mieux asseoir la critique, il faut entrer dans un plus grand détail et analyser quels sont les types de prélèvements qui expliquent la singularité française.

Partons pour commencer de la distinction juridique traditionnelle entre impôts indirects, impôts directs et cotisations sociales. On ne s'étonnera pas que ces dernières soient beaucoup plus lourdes (16,9 du PIB) que dans le reste de la zone euro. Voilà cinq points expliqués sur les sept, et qui aggravent d'autant notre coût du travail. On ne peut pas pour autant affirmer que les débordements de notre politique de prélèvements sont concentrés sur ce seul facteur de production. Certes, il y a peu à dire des impôts directs (11,8 contre 11,5) qui sont en ligne sans que cela suffise à éclairer qui paye quoi, entre ménages et entreprises. Certes, la TVA est chez nous légèrement plus basse (7 contre 7,3), ce qui montre bien une tendance à ménager les consommateurs puisque nous sommes ici à niveau alors que partout ailleurs nous dépassons. D'ailleurs le total des impôts indirects (qui comprend bien sûr la TVA) est supérieur chez nous de deux points de PIB (15,5 contre 13,2). D'où vient la différence ? Pour l'essentiel des « autres impôts sur la production » (4,4 contre 1,5). Il s'agit d'une fiscalité indirecte « en cascade », payée par toutes les entreprises et dont le poids relatif a plus que doublé depuis une vingtaine d'années. En bref, nous avons accru à ce titre le prélèvement sur la valeur ajoutée du système productif et nous sommes les seuls il l'avoir fait. D'où un premier sen-

timent : notre système de prélèvements obligatoires ménage les consommateurs, surcharge le facteur de production travail et semble peu favorable aux entreprises. Pour aller plus loin, il faut reprendre la décomposition, non plus selon les catégories juridiques mais par fonctions économiques : consommation, travail et capital. Avec cette nouvelle ventilation, plus significative mais de construction délicate, les résultats sont les suivants : les prélèvements sur la consommation restent en ligne favorable (11,1 contre 11,7) ceux sur le travail demeurent supérieurs de cinq points de PIB (22,9 contre 17,8), entièrement à la charge des entreprises (12,9 contre 7,2). Le reste de l'excès de prélèvements est supporté par le capital (10,2 contre 7,2), soit un écart proportionnellement encore plus important que pour le travail. Il provient pour l'essentiel de l'imposition non des revenus du capital qui est à peu près au même niveau que dans le reste de la zone euro (5,6 contre 5,3), mais de celle du stock (4,6 contre 1,9), notamment à travers les impôts fonciers et immobiliers. Synthétisons : notre fiscalité est conforme à l'idée keynésienne que nous nous faisons de l'économie, tirée par la demande et les dépenses de répartition qu'il faut ménager, non par l'offre, que l'on peut surtaxer. Nulle surprise à cet égard : la consommation (et les consommateurs) est relativement protégée, les deux facteurs de production travail et capital tous deux plus taxés qu'ailleurs, dans des proportions considérables, de l'ordre de 35 à 40. Enfin dans le partage entre ménages et entreprises, celles-ci supportent en France des prélèvements supérieurs de l'ordre du tiers par rapport à leurs concurrentes européennes, les premiers étant globalement traités de façon à peu près similaire. Qui avec de telles données accessibles à tous, peut encore s'étonner de l'essoufflement de notre appareil productif qui supporte seul la quasi-totalité du fardeau provenant de l'excès de prélèvements ?

Source : Jean Peyrelevade, *Les Echos*, 8 octobre 2013.

DOCUMENT 4

LA FRANCE MALADE DE SA FISCALITÉ

La France est un des pays de l'OCDE qui a connu, pendant ces derniers vingt ans, la croissance la plus faible du PIB réel par habitant. Cette mauvaise performance économique s'explique par des faiblesses structurelles dans de nombreux domaines, y compris la fiscalité. Le niveau très élevé des prélèvements obligatoires (43 % du PIB en 2010) mais aussi la structure du système fiscal français pèsent lourdement sur l'économie.

Pour ne pas pénaliser excessivement la croissance, la fiscalité doit respecter trois principes directeurs : simplicité, stabilité et neutralité. Pourtant, la fiscalité française est très complexe : il existe un grand nombre d'impôts et de prélèvements, allant de pair avec une multitude de déductions, crédits d'impôt et d'exemptions. Or, cette complexité est coûteuse pour les contribuables et engendre des coûts élevés de recouvrement de l'impôt. De plus, la fiscalité française change souvent. De fait, un système fiscal stable est souhaitable pour réduire les coûts administratifs et de conformité et les effets négatifs de l'incertitude sur les décisions d'investissement et d'épargne.

Enfin, le système fiscal français n'est pas neutre par rapport aux décisions de consommation et d'épargne des ménages et des décisions d'investissement des entreprises. Les taux marginaux d'imposition effectifs des revenus du capital varient sensiblement d'une catégorie d'actifs à l'autre (entre épargne financière, logement, etc.). Il existe aussi de nombreuses mesures de traitement préférentiel pour les mêmes classes d'actifs, notamment les produits d'épargne. Les plus-values

réalisées sur les *plans d'épargne en actions* (PEA) sont exonérées de l'impôt sur le revenu (mais pas de la contribution sociale généralisée, CSG) si les actifs ne sont pas retirés avant cinq ans. Les plans d'épargne volontaire des travailleurs au niveau de l'entreprise (*plans d'épargne salariale*) bénéficient aussi d'allègements fiscaux et sont soumis à des contributions sociales réduites. Le revenu de l'assurance-vie n'est imposé que lorsque le capital est retiré et à des taux plus faibles après huit années de détention. Enfin, plusieurs livrets d'épargne (*livret A, livret d'épargne-populaire, livret d'épargne-logement, plan d'épargne-logement, livret jeune, livret d'épargne-entreprise, livret de développement durable*) bénéficient d'exonération d'impôts et, dans certains cas, ne sont pas assujettis aux prélèvements sociaux. L'augmentation récente des plafonds du livret A et du livret de développement durable accentue les distorsions existantes. L'absence de neutralité fiscale pour les investissements immobiliers est aussi un problème important : la taxation du revenu tiré de la location d'un bien immobilier mais la non-imposition des loyers imputés favorise la propriété occupante. (...)

La structure de la fiscalité française est source de distorsions : les facteurs capital et travail sont taxés lourdement, décourageant ainsi l'investissement et pénalisant l'emploi. L'intégration des revenus du capital aux barèmes de l'impôt sur le revenu (IR) provoque une forte augmentation des taux marginaux élevés et revient à une double taxation du revenu du travail. Ainsi, de nombreux pays de l'OCDE, notamment nordiques, optent pour des taux d'imposition du capital inférieurs à ceux sur les revenus du travail. La France est l'un des pays rares de l'OCDE qui prélèvent des impôts sur le patrimoine net qui pourraient être considérés comme un impôt supplémentaire sur le revenu du capital. Par exemple, un impôt de 1 % sur le stock de capital correspondrait à un taux d'imposition de 25 % sur le rendement nominal et de 50 % sur le rendement réel, dans l'hypothèse d'un rendement nominal de 4 % et d'un taux d'inflation de 2 %. En France, l'impôt sur la fortune double quasiment le taux maximal d'imposition effectif sur le revenu du capital. Le taux marginal supérieur de l'impôt sur le patrimoine se traduit, pour ceux qui sont aussi imposés à 45 % (41 % en 2011) à l'IR, par des taux d'imposition effectifs de près de 200 % pour les revenus réels d'intérêts, les dividendes et les revenus locatifs. Dans la pratique, les taux marginaux effectifs d'imposition sont très divers en raison du grand nombre de niches fiscales et sociales, en particulier pour les produits d'épargne. (...)

Alors que l'assiette de l'impôt sur le revenu (IR) est étroite en raison de nombreuses niches les taux marginaux d'imposition sur le travail sont élevés. La charge fiscale totale (impôts et cotisations sociales) représente plus de 40 % des coûts de main-d'œuvre au niveau du salaire médian, l'un des taux les plus élevés de la zone OCDE, ce qui réduit à la fois la demande et l'offre de travail pour les salariés concernés. Le Crédit d'impôt pour la compétitivité et l'emploi (au cœur du Pacte de compétitivité) constitue une avancée importante et reviendra à une baisse de plus de 4 % en moyenne du coût du travail pour les salariés rémunérés jusqu'à 2,5 Smic. Cependant, le coin fiscal restera au-dessus de la moyenne de l'OCDE.

Source : B. Egert, *Telos*, 29 avril 2013.

SECONDE PARTIE : RÉFLEXION ARGUMENTÉE

SUJET : FISCALITÉ ET COMPÉTITIVITÉ

CORRIGÉ

Par Frédéric Larchevêque, professeur de chaire supérieure, lycée Alfred-Kastler, Cergy.

Partir de la consigne

L'ensemble documentaire fourni cette année par l'Essec comportait 4 documents, 3 textes et un graphique pour un total de 2 300 mots environ. Comme les sessions précédentes, la consigne indique le thème sur lequel doit porter la note. Cette année, il s'agissait donc d'appréhender l'ensemble documentaire sous le prisme « **du niveau de la fiscalité en France** ».

La consigne ne doit surtout pas être négligée, car elle permet de sélectionner plus facilement les idées principales, de concevoir son introduction en identifiant clairement le problème posé et enfin de construire le plan de sa note. Une lecture cursive de l'ensemble documentaire permet toutefois de préciser le sens de la consigne.

L'intérêt d'une première lecture cursive

Une lecture cursive permet de dégager les grandes idées sans se perdre dans les détails. Le but de cette première lecture est de dégager les grandes idées qui pourront devenir les futurs paragraphes de sa note. Cela oblige à restituer le sens global de l'ensemble documentaire et débouche sur un résumé succinct des apports de chacun des documents.

Le **premier document** part du postulat qu'il existe un consensus sur la nécessité d'une réforme fiscale en France pour différentes raisons économiques et sociales (compétitivité, justice fiscale). Il se poursuit en invoquant les premières réformes mises en œuvre sur la base de cette convergence des esprits : le CICE, la TVA sociale, et en décrivant les réformes souhaitables : réduire la taxation du capital, alléger le coût du travail en transférant une part du financement de la protection sociale vers la consommation et la fiscalité verte.

Le **graphique du document 2** permet d'évaluer le niveau de la pression fiscale (y compris les cotisations sociales) en France. Il s'agit donc des prélèvements obligatoires en pourcentage du PIB.

Le **document 3** ajoute que par rapport aux autres pays de la zone euro, l'inefficacité de la fiscalité française tient moins à son niveau qu'à sa structure. Les analyses menées par types d'impôts ou par fonctions économiques sont convergentes : la fiscalité française est plus lourde sur les facteurs de production (travail et capital) et de façon cohérente plus lourde sur les entreprises et la production que sur les ménages et la consommation. Au fond, la fiscalité française touche plus l'offre que la demande.

Le **dernier document** établit que la fiscalité française n'a aucune des qualités d'une bonne fiscalité : simplicité, stabilité et neutralité pour conclure sur la réforme d'importance que représente le CICE.

L'ensemble documentaire dans le programme

L'ensemble documentaire nécessitait la maîtrise d'un certain nombre de notions : prélèvements obligatoires, fiscalité, impôts directs et indirects, progressivité de l'impôt, taux des prélèvements obligatoires, structure de la fiscalité en termes d'impôts et d'assiettes, etc. Ces différentes notions font partie de la culture économique générale qu'un élève de classes préparatoires doit normalement maîtriser. De fait, elles

s'intègrent au programme dans le cadre du module I, Les fondements de l'économie de marché qui prévoit l'étude des agents économiques et leurs fonctions principales et du module II La justification des politiques économiques et plus particulièrement les points 1 L'intervention des autorités publiques dans l'allocation des ressources et 2 L'intervention des autorités publiques dans la redistribution des richesses.

Module I Les fondements de l'économie de marché

1.1.1 Les agents économiques et leurs fonctions principales

Commentaires (extraits) La présentation des agents est l'occasion de décrire leurs fonctions principales (...), le financement des dépenses publiques pour l'Etat.

Module III La justification des politiques économiques

3.1 L'intervention des autorités publiques dans l'allocation des ressources

3.2 L'intervention des autorités publiques dans la redistribution des richesses

Commentaires (extraits)

Les moyens de l'action publique proviennent des prélèvements obligatoires et sont employés pour servir trois finalités principales : la correction des inefficacités de marché, la redistribution des revenus et enfin la régulation de l'activité économique.

Le recensement des idées principales

Le recensement des idées principales de l'ensemble documentaire constitue la base du travail préparatoire. Sa qualité dépend, d'une part de votre capacité à hiérarchiser les idées relevées, autrement dit à distinguer les idées principales des idées plus accessoires et d'autre part de votre capacité à les reformuler de façon personnelle sans faire de contresens, de paraphrase et enfin sans jugement de valeur.

Vos différents entraînements (en devoir, en colle) vous ont permis de tester la méthode qui peut vous convenir le mieux pour effectuer rapidement ce recensement : prise de note document par document, confection d'un tableau par thématique identifiée, système de renvoi numéroté aux textes, etc. Il n'existe pas une seule méthode, une seule façon de faire. Le but des entraînements est de vous aider à trouver celle qui vous convient le mieux et vous permet de travailler rapidement.

Nous proposons ici un recensement systématique des idées telles qu'elles apparaissent dans chaque document en nous fondant sur le produit de notre lecture cursive et en nous appuyant sur l'apport de la consigne : « le niveau de la fiscalité en France ».

Document 1 : La France ne saisit pas l'urgence d'une réforme

Pour donner du sens : la nécessité d'une réforme de la fiscalité française fait consensus, tant sur le diagnostic que sur le contenu et les objectifs. Si des mesures ont déjà été prises, il convient d'aller au-delà sur le modèle de ce qui a pu être fait dans les pays scandinaves.

Les idées et arguments

Idée 1 : Après les errements des mesures fiscales prises respectivement sous la présidence Sarkozy et au début du mandat de François Hollande, un consensus émerge sur les défauts du système fiscal français, les objectifs et les mesures à prendre.

- **Sur les défauts** : des impôts qui pèsent sur des bases étroites, des dérogations et exonérations contradictoires, des impôts trop lourds sur le travail.
- **Sur les objectifs** : réduire les déficits, stimuler la compétitivité en réduisant le coût du travail, être plus juste en restaurant la progressivité de l'impôt (élimination des niches fiscales).

Idée 2 : Des réformes ont récemment été mises en œuvre, mais n'atteignent pas les objectifs fixés.

- Le rapport Gallois reposait sur un constat partagé de marges insuffisantes dans l'industrie en raison de charges excessives pesant sur le travail pour financer la protection sociale. Mais, la mesure finalement prise avec le CICE revient à favoriser les secteurs peu qualifiés relativement aux secteurs innovants et productifs.
- La TVA sociale, initiée par Sarkozy, abrogée par François Hollande avant d'être restaurée pour financer le CICE légitime la compétitivité par la fiscalité et montre qu'il existe des marges de manœuvre pour financer davantage la protection sociale sur la consommation plutôt que sur le seul travail.

Idée 3 : Les réformes à mettre en place sur la base du modèle scandinave

- Réduire les niches fiscales pour redonner à l'impôt sur le revenu sa progressivité dans une optique de justice sociale et fiscale ;
- Taxer le capital à un taux moindre que le travail contrairement à ce qui se fait actuellement pour favoriser l'innovation, l'attractivité du territoire. En effet, taxer le capital, c'est taxer le facteur le plus mobile (d'où un rendement faible) et c'est aussi taxer une épargne déjà taxée.
- Réduire les charges pesant sur le travail par transfert sur des impôts sur la consommation et les activités polluantes.

Document 2 : Pression fiscale et recettes totales des administrations publiques en France

- Depuis la crise, la pression fiscale dépasse 46 % du PIB et les dépenses publiques atteignent 53 % du PIB en forte progression depuis la crise ; les deux ratios sont en forte progression (+ 4 points de PIB pour les PO et environ 3,4 points pour les DP).
- L'écart correspond à des déficits publics accumulés qui accroissent l'endettement public.

Document 3 : La fiscalité antiéconomique

Pour donner du sens : les prélèvements obligatoires français sont atypiques tant en niveau que dans leur structure par rapport aux autres pays de la zone euro.

Les idées et arguments

Idée 1 : Le niveau des PO en France est supérieur de plus de 7 points de PIB à la moyenne des pays de la zone euro.

Idée 2 : L'analyse comparée de la fiscalité française menée par types d'impôts ou par fonctions économiques fait apparaître ses particularités structurelles

- La fiscalité française pèse lourdement sur le facteur travail : les cotisations sociales sont plus lourdes qu'ailleurs (+ 5 points de PIB) et le capital.
- La fiscalité qui pèse sur la consommation des ménages est moins lourde : le poids de la TVA est un peu plus faible (7 points contre 7,2 points de PIB en moyenne).
- La fiscalité française pèse plus lourdement qu'ailleurs sur les entreprises : fiscalité indirecte (impôts payés sur la production) plus élevée (4,4 contre 1,5 points de PIB), part élevée des cotisations sociales pesant sur les entreprises (12,9 contre 7,2 points de PIB).

Document 4 : La France malade de sa fiscalité

Pour donner du sens : outre son niveau élevé et sa structure défavorable à la compétitivité et à la croissance, la fiscalité française n'a aucune des qualités d'une bonne fiscalité : simplicité, stabilité et neutralité.

Les idées et arguments

Idée 1 : La France déroge aux trois principes qui doivent en principe régir un système fiscal : simplicité, stabilité et neutralité.

- **La fiscalité est complexe**, donc coûteuse pour les contribuables et l'administration.
- **La fiscalité est instable** et créatrice d'incertitudes pour les décisions d'investissement et d'épargne.
- **La fiscalité française est distorsive** : elle impose différemment les actions économiques pour les influencer, taxe trop lourdement le travail et le capital avec pour effets de pénaliser l'embauche et l'investissement.

Idée 2 : Le CICE permet de réduire le coût du travail pour les salariés rémunérés jusqu'à 2,5 fois le SMIC.

NOTE DE SYNTHÈSE PROPOSÉE EN 550 MOTS

Il va de soi qu'il n'existe pas un seul plan possible pour rendre compte avec exactitude de cet ensemble documentaire. Alors que le recensement des idées exige la plus stricte neutralité et objectivité, la conception du plan est par nature plus personnelle à condition qu'il soit cohérent et respectueux des idées énoncées dans l'ensemble documentaire. Il faut beaucoup de savoir faire et une grande pratique pour relier logiquement les idées relevées et donner du sens à sa note.

INTRODUCTION (550 mots)

Depuis la crise de 2008, les prélèvements obligatoires ont progressé d'environ 4 points de PIB pour atteindre 46 % de la richesse nationale en 2014. Ce niveau situe la France bien au-dessus de la moyenne des pays de la zone euro (+ 7 points de PIB en 2011).

Un consensus semble émerger en France pour réformer une fiscalité qui étouffe la croissance sans être juste socialement. La vraie question est celle du contenu des mesures à prendre.

La prise en compte des spécificités de la fiscalité française (I) peut fournir les orientations des réformes à mettre en œuvre (II).

I- Les spécificités de la fiscalité française

A- La fiscalité française pèse lourdement sur les facteurs de production et les entreprises

La fiscalité sur le capital et ses revenus a été alourdie ces dernières années pour atteindre un niveau plus élevé que dans les autres pays de la zone euro (10,2 contre 7,2). Le financement de la protection sociale repose encore largement sur les cotisations sociales ce qui alourdit le coût du travail (+ 5 points de PIB) pour les entreprises.

La fiscalité française pénalise les entreprises par rapport aux ménages. Le poids de la TVA est un peu plus faible alors que la fiscalité indirecte des entreprises (impôts payés sur la production et cotisations patronales) est supérieure à la moyenne de la zone euro (respectivement 4,4 contre 1,5 point de PIB et 12,9 contre 7,2 points de PIB).

B- La fiscalité française ne satisfait pas aux principes d'une bonne fiscalité

La fiscalité française est complexe, donc coûteuse pour les contribuables et l'administration. Elle est aussi instable et source d'incertitudes pour les décisions d'investissement et d'épargne. Enfin, la fiscalité française est distorsive : en imposant à des taux différents les opérations économiques, elle crée des biais dans l'allocation des ressources d'épargne et les choix d'investissement.

II- Les directions d'une réforme de la fiscalité

A- Un consensus émergent pour de premières réformes

Le rapport Gallois reposait sur le constat de marges insuffisantes dans l'industrie pour conclure à la nécessité de baisser le coût du travail. Mais, la mesure finalement prise avec le CICE de réduire le coût du travail de 4 % en moyenne pour les salariés rémunérés jusqu'à 2,5 SMIC revient à favoriser les secteurs peu qualifiés et sert peu l'objectif de montée en gamme.

La création d'une TVA sociale, abrogée par François Hollande avant d'être restau-

rée pour financer le CICE, légitime la compétitivité par la fiscalité et montre qu'il existe des marges de manœuvre pour financer davantage la protection sociale sur la consommation plutôt que sur le seul travail.

B- S'inspirer des réformes menées dans les pays scandinaves

L'impôt sur le revenu doit retrouver sa progressivité dans une optique de justice fiscale ce qui suppose de supprimer les nombreuses niches fiscales inefficaces. Il convient de taxer le capital à un taux moindre que le travail pour favoriser l'innovation et l'attractivité du territoire. En effet, taxer le capital, c'est taxer le facteur le plus mobile (d'où un rendement faible) et c'est aussi taxer une épargne déjà taxée. Enfin, peu importe le système choisi, il faut réduire les charges pesant sur le travail par transfert sur des impôts sur la consommation et les activités polluantes.

Conclusion : le but et les orientations de la réforme fiscale sont connus. Il reste à réunir un consensus politique pour la mettre en œuvre avec courage.

Le sujet dans le programme

Le sujet de réflexion argumentée proposé cette année nécessitait une maîtrise des connaissances relatives à deux modules du programme.

• Les connaissances utiles du module 1 : « les fondements de l'économie de marché »

Dans son point 1.1, ce module permet de présenter les fonctions principales des différents agents économiques et met notamment l'accent sur « le financement des dépenses publiques » par les prélèvements obligatoires.

Dans son point 1.2, l'étude du fonctionnement de l'économie de marché comprend l'analyse des structures de marché et les stratégies des firmes. Les commentaires du programme précisent que « la présentation des structures de marché (...) place les firmes au cœur de l'analyse du fonctionnement des marchés et permet d'appréhender les formes de leur compétitivité ».

• Les connaissances utiles du module III : « La justification des politiques économiques »

Ce module positionne l'action publique dans une économie de marché et en présente les moyens, les formes et les effets. Parmi les différents acteurs évoqués, figure l'Etat central.

Son point 3.1 L'intervention des autorités publiques dans l'allocation des ressources est au cœur de la question posée cette année.

Il comprend en effet l'étude de l'intervention de l'Etat dans le système productif et le financement de biens collectifs.

Les commentaires du programme précisent que l'intervention de l'Etat peut prendre plusieurs formes comme par exemple l'action réglementaire et fiscale.

Le sujet dans l'actualité économique

Comme toutes ces dernières années, le sujet de réflexion argumenté proposé s'inscrit dans une actualité riche qu'il était difficile d'ignorer. Une bonne préparation suppose en effet de maîtriser les connaissances théoriques du programme, mais également de s'informer des événements de l'actualité économique et sociale en cours.

La connaissance des événements principaux liés au sujet proposé est importante pour au moins deux raisons : elle permet de cerner le contexte de la question posée et d'alimenter sa réflexion de nombreux exemples factuels (données chiffrées, dispositifs législatifs nouveaux, etc.).

- Dans le cas présent, il convenait d'avoir des connaissances assez précises sur :
- Les problèmes de compétitivité de l'industrie française caractérisés par un déclin accéléré du poids de l'industrie dans l'économie et le déficit croissant de la balance commerciale ;
 - Le Pacte pour la compétitivité de l'industrie française, dit rapport Gallois (novembre 2012) repris par le gouvernement dans le Pacte pour la croissance, la compétitivité et l'emploi. Ce relevé de conclusions exprime la nouvelle orientation de politique économique qui d'un soutien de la demande de consommation depuis plus de 15 ans s'oriente vers une politique de l'offre (rétablissement du taux de marge des entreprises et de leur compétitivité) et comprend plusieurs mesures essentielles au traitement du sujet : le lancement au cours de l'année 2013 du crédit d'impôt pour la compétitivité et l'emploi (CICE) de 20 milliards d'euros d'ici 2015 financés par un relèvement de la TVA.
 - **Le Pacte de responsabilité et de solidarité** annoncé par le chef d'Etat le 31 décembre 2013 et précisé le 14 janvier lors de ses vœux aux partenaires sociaux. Ce pacte a pour objectif de redresser la compétitivité des entreprises et de faire reculer le chômage. Pour cela, le coût du travail, déjà réduit par le Crédit impôt compétitivité emploi (CICE), doit à nouveau être allégé par la baisse des cotisations patronales (à hauteur de 11 milliards d'euros). Dans le cadre du pacte, à partir du 1^{er} janvier 2015, l'employeur d'un salarié au Smic ne paiera plus aucune cotisation de sécurité sociale. Pour les salaires allant jusqu'à 3 fois et demi le Smic (près de 4 000 euros nets par mois), les cotisations familiales seront abaissées de 5,25 % à 3,45 % à partir de 2016. Les travailleurs indépendants et artisans bénéficieront d'une baisse de plus de trois points de leurs cotisations familiales dès 2015.
 - En complément, la fiscalité pesant sur les entreprises sera modernisée et réduite (à hauteur de 10 milliards d'euros) : la contribution sociale de solidarité des sociétés (C3S) assise sur le chiffre d'affaires sera réduite à partir de 2015 puis supprimée totalement à l'horizon 2017. Le taux de l'impôt sur les sociétés, de 33,3 % actuellement, sera abaissé en 2017 et ramené à 28 % en 2020. La surtaxe de 10,7 % sur cet impôt, instaurée en 2011, sera supprimée dès 2016.

L'analyse du libellé du sujet

C'est le préalable indispensable à un travail efficace de mobilisation des connaissances et de justification du plan choisi. Comme vous disposez de peu de temps, il convient d'identifier rapidement les termes ou expressions clés du sujet puis de travailler rapidement sur leurs relations logiques qui peuvent être par exemple de complémentarité, d'opposition ou de causalité.

Dans le cas présent, le libellé du sujet ne comprenait que deux termes séparés par la conjonction « et ». Si un tel sujet invite à définir soigneusement les deux mots clés, la vraie difficulté consistait à travailler sur leurs liens logiques car il était hors de question de faire un plan du type : 1- la fiscalité et 2- la compétitivité.

• **Définir la notion de fiscalité**

La fiscalité est l'ensemble des impôts et taxes perçus par une collectivité publique (dictionnaire des sciences économiques, Armand Colin). Selon le lexique d'économie Dalloz, la fiscalité est l'ensemble des textes et règlements organisant la définition et la perception de l'impôt. Mais dans le dictionnaire de l'économie Larousse, la fiscalité comporte des impôts directs sur le revenu et le patrimoine, des impôts indirects sur les échanges, diverses taxes et redevances, et, à la marge du système fiscal, un mécanisme de financement de la protection sociale incarné notamment par les cotisations sociales.

Ce rapide recensement de quelques définitions de la fiscalité oblige à trancher sur le contour exact de la notion : faut-il réduire la fiscalité à l'impôt ou inclure les cotisations sociales ?

Compte tenu de la complexité des réponses proposées, il nous semble nécessaire d'accepter toutes définitions cohérentes. Au sens juridique, les cotisations sociales ne sont pas considérées comme des impôts dans la mesure où elles font l'objet de contreparties sous la forme de droits à prestations. Mais de nombreux auteurs font le choix d'intégrer les cotisations au champ de la fiscalité. C'est le cas d'Agnès Bénassy-Quéré et autres dans leur livre « politique économique » où prélèvements obligatoires et impôts sont clairement assimilés. « La fiscalité du capital (imposition des profits et des immobilisations des entreprises, des dividendes perçus par les ménages, des plus-values financières, du patrimoine...) et du travail (cotisations sociales, impôt sur le revenu des salariés) affecte la répartition des revenus de la production entre le facteur capital et le facteur travail ».

Nous faisons le choix de retenir une définition large de la notion de fiscalité recouvrant celle de prélèvements obligatoires. Ce choix est d'autant plus justifié que de plus en plus impôts et cotisations sociales sont imbriqués : ainsi la CSG est un impôt affecté au financement de la protection sociale, alors que la TVA sociale permet de réduire les cotisations sociales.

• Définir la notion de compétitivité

Les notions de compétitivité et de concurrence sont liées. C'est parce que les marchés sont concurrentiels que des exigences de compétitivité pèsent sur les entreprises. La compétitivité mesure donc leur aptitude à faire face à la concurrence (nationale, étrangère, actuelle et potentielle). Une entreprise compétitive peut rester et se développer sur son marché (gagner des parts de marché, réaliser des profits). Au contraire, une entreprise peu compétitive devra se restructurer et parfois quitter le marché. La perspective de la faillite existe et sert de stimulant. Sachant que la concurrence peut se faire par les prix ou par la qualité au sens large, il existe deux formes de compétitivité : une **compétitivité prix** et une compétitivité hors prix. La compétitivité-prix dépend de la maîtrise des coûts de production des produits échangés. Elle mesure la capacité du producteur à vendre son produit au prix de marché concurrentiel voire moins cher que la concurrence. La **compétitivité hors-prix** découle de la capacité d'innovation de l'entreprise au sens de Schumpeter. Lorsqu'une entreprise est capable d'une innovation, elle se forge un pouvoir de marché qui lui permet d'imposer dans une certaine mesure son prix de vente à ses clients. La compétitivité hors prix repose sur des facteurs très nombreux parmi lesquels, la capacité d'innovation technologique ou non technologique (le design par exemple), le niveau de gamme, la qualité, les services, la marque, la réputation de fiabilité, etc. ...

Lorsque la compétitivité d'une entreprise repose sur les seuls prix, la demande de ses clients est très élastique (sensible) à une variation du prix de vente. Conserver ses clients implique donc de réduire ses marges. En revanche, lorsqu'une entreprise fait reposer sa compétitivité sur des facteurs hors prix, la hausse de prix aura moins d'effet sur la clientèle qui demeure fidèle. Cette faible élasticité de la demande à la hausse des prix de vente permet à l'entreprise de préserver ses marges bénéficiaires et donc d'investir pour renforcer ses positions.

On peut mesurer la compétitivité des entreprises résidentes dans un pays sur les marchés internationaux avec les indicateurs de parts de marché à l'exportation ou le solde commercial global, par produits et branches. Les ratios exportations des entreprises nationales/exportations totales mondiales ou dans la zone euro sont particulièrement importants pour situer le niveau de compétitivité des entreprises d'un pays.

La compétitivité des nations Certains auteurs appliquent la notion de compétitivité aux territoires ou aux nations. Il existe d'ailleurs des classements internationaux de l'attractivité des territoires et de la compétitivité des nations. Une telle conception pose toutefois un certain nombre de difficultés évoquées par Paul Krugman dans son livre « la mondialisation n'est pas coupable ». D'abord, si une entreprise non compétitive peut disparaître, ce n'est pas le cas des Etats. Ensuite et surtout, si dans la concurrence entre les entreprises, les parts de marché gagnées par les unes sont nécessairement perdues par les autres, ce n'est pas le cas du commerce international qui s'analyse depuis Ricardo comme un jeu gagnant-gagnant. Ces objections font que la compétitivité des nations se définit différemment par le critère de la capacité d'une nation à améliorer durablement le niveau de vie de sa population. Il faut toutefois bien comprendre que la hausse du niveau de vie d'une nation ne se fait pas au détriment du niveau de vie d'une autre. Nous écartons donc cette autre conception fourre-tout de la notion de compétitivité.

La conjonction « et » oblige à une mise en relation des notions

Il en découle plusieurs questions qui pouvaient être retenues pour reformuler la question posée.

La fiscalité française a-t-elle plutôt un impact positif ou négatif sur la compétitivité des entreprises françaises sur les marchés internationaux ?

Les contraintes de compétitivité des entreprises peuvent-elles influencer les décisions fiscales de l'Etat ?

Quelle est l'orientation récente donnée à la fiscalité des entreprises dans le cadre du choc de compétitivité voulu par l'Etat ?

Mettre l'instrument de la fiscalité au service de l'objectif de la compétitivité est-il pertinent, notamment dans le cadre européen ?

Introduction, quelques conseils de méthode

L'introduction sert à capter l'attention du correcteur. Elle doit donc être particulièrement soignée et montrer sa compréhension de la question posée. Sa construction est en quelque sorte un parcours imposé. Elle doit comporter :

- > Une entrée en matière qui permet de situer la question dans son contexte. Une référence à l'actualité économique est souvent efficace.
- > Une définition ou une explication des termes et expressions du libellé du sujet.
- > Une reformulation de la question posée qui prend appui sur l'analyse des termes et de leurs liens logiques.
- > Une annonce du plan choisi en deux ou trois parties.

L'entrée de la France dans la zone euro avait occulté la question de la compétitivité en donnant l'illusion de la disparition de la contrainte extérieure. Mais, la crise des dettes souveraines dans la zone a remis le sujet au cœur du débat public. En témoignent le rapport Gallois (novembre 2012), puis l'annonce en janvier 2014 du Pacte de responsabilité et de solidarité destiné à redresser la compétitivité des entreprises françaises. D'un point de vue général, les mesures déjà prises comme le CICE ou annoncées comme la baisse des cotisations familiales et la baisse de la dépense publique, marquent un tournant dans la politique économique de la France. La priorité désormais accordée au redressement de l'offre productive est clairement assumée.

La compétitivité est un impératif pour les entreprises confrontées à un environnement concurrentiel. Elle mesure la capacité d'une entreprise à se maintenir sur un marché tout en réalisant un bénéfice. Ces objectifs peuvent être atteints de deux manières, soit en pratiquant des prix plus bas que les concurrents positionnés sur le même marché (on parle alors de **compétitivité-prix**), soit en innovant pour réussir à différencier son offre pour se forger une position de quasi monopole (on parle alors de **compétitivité hors-prix**). La compétitivité hors prix repose sur des facteurs très nombreux parmi lesquels, la capacité d'innovation technologique ou non technologique (le design par exemple), le niveau de gamme, la qualité, les services, la marque, la réputation de fiabilité, etc. ...

La compétitivité est également nécessaire pour une nation dans la mesure où un déficit extérieur signifie que le pays vit au-dessus de ses moyens (la consommation et l'investissement sont financés pour une part par une épargne étrangère). De fait, la nouvelle priorité de politique économique trouve son origine dans le déclin accéléré de l'industrie française et la dégradation constante des performances relatives des entreprises à l'exportation. Globalement, le solde de la balance commerciale est passé d'un excédent de 3,5 milliards d'euros en 2002 à un **déficit de 73,0 milliards d'euros** (soit 3,5 points de PIB), **en 2011**. Plus inquiétant encore, l'affaiblissement de la compétitivité de l'industrie française se traduit par des pertes de parts de marché considérables, notamment en Europe, premier débouché commercial de la France (environ 60 % des exportations). La part de marché des exportations françaises est passée de 12,7 %, en 2000, à 9,3 %, en 2011 alors que sur la même période, les exportations intra communautaires de l'Allemagne ont progressé. Ces indicateurs sont le signe d'une perte d'efficacité du système productif français d'autant plus préoccupante que 27 % du produit intérieur brut français résulte de la production destinée à l'exportation et que les branches les plus extraverties créent des emplois qualifiés et bien rémunérés.

Ce décrochage des performances à l'exportation est corrélé à la forte progression de la dépense publique qui dépasse 57 % du PIB et des charges fiscales qui

sont maintenant les plus élevées d'Europe à 46 % du PIB (derrière le Danemark toutefois). Au sens strict, la fiscalité renvoie à l'impôt versé par les contribuables sans contrepartie, mais dans la pratique, la fiscalité désigne l'ensemble des prélèvements destinés à couvrir les charges de l'Etat et à lui permettre d'assumer l'ensemble de ses fonctions : allocation, redistribution et régulation. Un système fiscal ne se caractérise pas seulement par son niveau global, mais également par sa structure. En effet, tout système se caractérise par le choix des bases d'imposition (la consommation, le travail et le capital) auxquelles, on applique un taux qui peut être proportionnel (TVA, impôt sur les sociétés) ou progressif (impôt sur le revenu). La fiscalité a nécessairement un lien avec la compétitivité dans la mesure où elle pèse sur les facteurs de production (travail et capital). Par ailleurs, dans un contexte de prix et de salaires relativement rigides et de perte de contrôle du taux de change, la fiscalité est devenue une arme décisive pour les pays membres de la zone euro désireux d'accroître la compétitivité de leurs entreprises au détriment de leurs partenaires au risque d'une concurrence fiscale exacerbée.

Le sujet nous invite donc à nous interroger sur la part de responsabilité du système fiscal français dans la dégradation de la compétitivité des entreprises et sur le contenu des réformes mises en œuvre ou nécessaires pour faire de la fiscalité un instrument au service de la compétitivité. Le choc de compétitivité annoncé par le Gouvernement comporte un volet fiscal essentiel. Il convient d'en analyser les principaux dispositifs.

Nous montrons que les problèmes de compétitivité ont moins pour origine le niveau absolu de la fiscalité (Partie I) que sa structure inadaptée à une économie ouverte (partie II).

Le développement, quelques conseils de méthode

Le développement doit bien entendu suivre votre plan tel qu'il a été annoncé à la fin de l'introduction. Il est préférable de ménager des titres sous la forme de courtes phrases pour exprimer les idées principales que vous souhaitez développer. Mais le plus important est ailleurs, vos idées doivent reposer sur des arguments précis. Ceux-ci peuvent être des arguments théoriques tirés des enseignements de la science économique ou des arguments factuels tirés d'exemples de l'actualité économique, mais il ne s'agira jamais de simples arguments d'autorité, autrement dit d'affirmations gratuites non étayées et justifiées.

Partie I : Les problèmes de compétitivité ne peuvent être imputés à la seule fiscalité

Le niveau de la fiscalité d'un pays résulte fondamentalement d'un choix de société. Ainsi, le niveau des prélèvements français exprime notamment la socialisation des dépenses de protection sociale. Par ailleurs, certaines dépenses publiques contribuent à la compétitivité des entreprises, tandis que la fiscalité n'est qu'un facteur explicatif parmi beaucoup d'autres des problèmes de compétitivité rencontrés par les entreprises françaises.

A- Les impôts sont inséparables de la dépense publique qu'ils financent

Les impôts financent des dépenses publiques très utiles à la compétitivité des entreprises. En font partie les dépenses publiques liées au financement des investissements en facteurs de croissance endogène. Il s'agit notamment de la qualité des infrastructures publiques, la formation de capital humain (système éducatif et formation professionnelle) et du soutien à l'investissement en recherche et développement.

Par ses investissements publics et les dépenses fiscales destinées à renforcer les incitations à investir dans les domaines producteurs d'externalités positives, l'Etat permet aux entreprises d'améliorer leur efficacité productive et d'innover davantage. La productivité de la main-d'œuvre, très élevée en France (surtout la productivité horaire) dépend pour une part de la dépense intérieure d'éducation et du financement public de la formation professionnelle. La qualité des infrastructures de réseau (électricité, transport, télécommunication, etc.) contribue également largement à l'efficacité productive et donc à la compétitivité des entreprises. La France fait aussi un effort conséquent pour favoriser les investissements en recherche et développement. On peut citer le rôle particulier joué par le crédit impôt recherche (CIR) qui au-delà d'un soutien à l'amélioration de la compétitivité hors prix par l'innovation renforce l'attractivité du territoire pour les investisseurs étrangers. Le crédit d'impôt recherche est une aide publique qui permet de soutenir l'effort des entreprises en matière de R&D (recherche fondamentale et recherche appliquée, développement d'innovations). Lorsqu'une entreprise réalise des dépenses qui entrent dans le champ d'application du CIR, elle bénéficie d'un crédit d'impôt sur ses bénéfices imposables égal à 30 % des dépenses de R&D engagées jusqu'à 100 millions d'euros et de 5 % au-delà. Ce système représente aujourd'hui une dépense fiscale de plus de 5 milliards d'euros.

Tout ceci montre que, lorsque la fiscalité a pour contrepartie des dépenses publiques utiles, elle ne pénalise pas la compétitivité. Bien au contraire, elle est mise au service de l'amélioration de la compétitivité. Le problème de la fiscalité n'est donc pas celui de son niveau en soi, mais celui de la destination qu'elle prend et de la façon dont l'argent public collecté est dépensé.

B- Les explications du déclin de la compétitivité française sont nombreuses et ne peuvent pas être exclusivement ramenées à une fiscalité trop élevée

La fiscalité est un facteur de compétitivité dans la mesure où elle influence les coûts de production, notamment le coût du travail, mais une analyse un peu fine montre que le décrochage de la compétitivité ne peut lui être imputé en totalité. En effet, plusieurs explications ont été mises au jour par les économistes. Dressons un panorama rapide de ces différentes explications en distinguant le facteur monétaire, les facteurs d'affaiblissement de la compétitivité coût et de l'insuffisance de la compétitivité hors prix.

Pour de nombreux responsables politiques et dirigeants d'entreprises, l'appréciation de l'euro de 10 % environ par rapport au dollar depuis le milieu de l'année 2012 constituerait un handicap majeur pour vendre nos produits à l'étranger. La critique est dirigée contre les responsables de la BCE à qui il est reproché de conduire une politique d'euro fort. La première question est de savoir si l'euro est surévalué et de combien. Or, il n'existe pas de consensus clair sur cette question, puisque le taux de change d'équilibre correspond à la mesure économétrique du taux de change en parités de pouvoir d'achat. Pour certains, l'euro est légèrement surévalué alors que pour d'autres, il le serait de près de 20 %. Dans ce cas, une dépréciation de la valeur de l'euro devrait être encouragée, mais les moyens d'action sont en réalité limités compte tenu de l'indépendance de la BCE et de la force des marchés. Il convient toutefois de ne pas surestimer cette explication monétaire pour plusieurs raisons : la France perd des parts de marché au sein de la zone euro alors que l'Allemagne réalise des excédents très importants dans la zone dollar. Autrement dit, la valeur de l'euro est plus le symptôme des difficultés que la vraie explication.

L'économie française a aussi moins bien maîtrisé l'évolution de ses coûts de production que ses principaux concurrents européens, particulièrement l'Allemagne. Que s'est-il passé depuis le début des années 2000 ? Tout d'abord, les coûts salariaux unitaires ont progressé plus vite en France qu'en Allemagne (+8 % entre 2000 et 2013 en Allemagne et +28 % en France sur la même période). Ainsi, pour la première fois depuis bien longtemps, le coût horaire du travail dans l'industrie a dépassé en France celui de l'Allemagne. La responsabilité est à chercher ailleurs que dans un alourdissement de la fiscalité sur le travail en France. Deux explications peuvent être avancées : tout d'abord, l'Allemagne a profondément réformé les institutions du marché du travail avec à la clé deux effets principaux, la modération des salaires depuis la fin des années 1990, et la baisse du coût des services (le coût du travail dans les services est beaucoup plus faible que dans l'industrie), ensuite, les industriels allemands ont beaucoup plus joué la carte des délocalisations que les industriels français pour réduire leurs coûts d'achats de produits intermédiaires. Au total, l'industrie allemande a renforcé sa compétitivité coût en réduisant ses coûts d'achats de services et de produits semi finis.

Dans ce contexte, pour préserver leur compétitivité prix, les entreprises françaises ont sacrifié leurs marges qui se trouvent à un niveau historiquement bas actuellement (28 % de la valeur ajoutée). Elles se trouvent donc en situation de faiblesse pour financer leur nécessaire montée en gamme et sortir du cercle vicieux où la dégradation de la compétitivité coût accroît l'affaiblissement de la compétitivité hors prix. La faiblesse des marges bénéficiaires des entreprises françaises se fait en effet au détriment de leur aptitude à investir en R&D et dans tous les domaines favorables à l'innovation et la productivité (investissements de productivité, investissements immatériels en formation, design, publicité, etc.). Certes, la France continue à maintenir un niveau relativement élevé de dépenses en R&D, même s'il s'effrite depuis quelques années, mais elle n'apparaît plus qu'au 16^e rang mondial des pays innovateurs. Autrement dit sa R&D n'est pas seulement relativement insuffisante en niveau, mais elle débouche moins qu'ailleurs sur des innovations qui s'industrialisent et se vendent. Il est clair que ce problème essentiel ne peut être imputé à la fiscalité.

Partie II : L'inadaptation de la structure de la fiscalité française à une économie ouverte explique les réformes engagées

L'examen de la structure de la fiscalité française fait apparaître des anomalies très pénalisantes pour la compétitivité des entreprises. C'est ce qui justifie actuellement la mise en œuvre de réformes délicates.

A- La structure de la fiscalité française pénalise la compétitivité des entreprises

Pour comprendre en quoi la fiscalité française n'est pas adaptée au contexte d'une économie plus ouverte et concurrentielle, il faut revenir sur un certains nombres de principes qui commandent l'efficacité de tout système fiscal.

Pour prélever un certain niveau de recettes fiscales, il convient d'imposer des bases relativement peu élastiques, c'est-à-dire peu susceptibles de modifier leur comportement face à l'impôt. La théorie fiscale recommande ainsi de taxer des bases larges, peu élastiques à des taux modérés.

Arthur Laffer montre qu'au-delà d'un certain seuil d'imposition, une hausse supplémentaire du taux d'imposition réduit les recettes fiscales. D'où une courbe en cloche, croissante dans un premier temps, puis décroissante après être passée

par un taux optimal de fiscalité. La partie décroissante de la courbe de Laffer s'explique par une contraction de la base taxable pour diverses raisons (évasion fiscale, dissimulation de revenus taxables, moindre incitation à travailler ou à investir). Enfin, il importe de bien comprendre que celui qui supporte le poids réel de l'impôt n'est pas nécessairement celui qui y est assujéti légalement. Selon la théorie de l'incidence fiscale, l'impôt pèse en réalité sur les bases fiscales les moins élastiques. Imaginons une taxe sur la consommation d'un bien qui n'a pas de substitut. Dans ce cas, pour le consommer, les ménages devront effectivement payer la taxe. Ceux qui payent la taxe sont alors ceux qui la paieront dans le prix de vente. Inversement, lorsque le bien taxé a des substituts, sa demande est alors élastique et c'est donc le producteur qui doit payer la taxe s'il veut conserver ses ventes. Dans ce cas, le contribuable légal a réussi à reporter l'impôt sur un autre.

Un tel phénomène existe pour la plupart des impôts et dépend de l'élasticité de l'offre ou de la demande de ceux qui y sont assujéti : les cotisations sociales payées en principe par les employeurs sont en réalité partiellement reportées sur les salariés qui perçoivent des salaires moins élevés, l'impôt sur les bénéfices est payé par l'entreprise, mais en réalité transféré aux consommateurs et aux salariés. En effet, du fait de la forte mobilité du capital, l'entreprise ne peut reporter son IS sur les dividendes d'actionnaires qui investiraient dans d'autres pays. Elle doit donc soit augmenter ses prix de vente, soit moins augmenter ses salariés.

Appliqués au contexte de l'ouverture de l'économie, ces principes de la théorie fiscale permettent d'identifier quels types d'impôts pénalisent le plus la compétitivité des entreprises à l'exportation.

L'ouverture favorise la mobilité internationale des certaines bases fiscales, le travail qualifié et le capital, accroît leur sensibilité à la hausse de l'impôt et renforce leur pouvoir de report de l'impôt qui les touche sur d'autres agents. Or, comme ces deux facteurs sont les déterminants essentiels d'une offre compétitive et de la montée en gamme des produits mis sur le marché, il en résulte qu'ils devraient être plus faiblement imposés que les bases moins mobiles, travail moins qualifié et consommation.

Qu'en est-il pour la France ?

Contrairement à certains préjugés, la France est avant tout en concurrence avec les autres pays européens. C'est là que se trouvent les grands marchés de nos entreprises et que s'exprime une concurrence de producteurs spécialisés sur des produits assez similaires et de niveau de gamme comparable. C'est pourquoi, il est important de ne pas laisser se creuser les écarts de coûts de production avec nos voisins. En revanche, cette problématique n'est pas la même vis-vis des pays émergents avec lesquels, les produits échangés et les niveaux de gamme sont très différents. On ne baissera jamais assez le coût du travail par rapport à celui des pays émergents.

Lorsqu'on examine la structure de la fiscalité française, on observe qu'elle contribue plutôt plus qu'ailleurs à augmenter les coûts de production des entreprises. Ceci est dû aux cotisations patronales, mais également à de nombreux autres impôts qui pèsent sur la production (la taxe sur les salaires, la cotisation sur la valeur ajoutée des entreprises, la contribution sociale de solidarité des sociétés, etc.). Au total, la compétitivité prix est désavantagée. Il pourrait donc s'avérer utile de diminuer les cotisations sociales pour réduire le coût du travail pour restaurer une compétitivité prix affaiblie et des marges bénéficiaires réduites.

La France étant un pays proche de la frontière technologique, le ressort de sa compétitivité se trouve dans les produits de haute technologie et les produits de haut de gamme. Or, ces produits sont très intensifs en capital et en travail très qualifié.

Pour encourager leur accumulation, il conviendrait de moins taxer ces facteurs. Or, la France se caractérise par exemple par un niveau élevé de l'impôt sur les sociétés et d'un point de vue général sur le capital productif.

B- Intérêt et limites des réformes mises en œuvre

La France est engagée depuis deux ans dans un programme d'infléchissement de la structure de sa fiscalité pour en gommer les spécificités les plus pénalisantes pour la compétitivité des entreprises. Le 14 janvier 2014, le président de la république déclarait ainsi qu'il faut « harmoniser les règles fiscales, notamment pour les entreprises entre la France et l'Allemagne ». La volonté de mettre la fiscalité au service de la compétitivité est venue des leçons tirées d'expériences de mise en place d'une TVA sociale dans plusieurs pays de l'Union européenne, le Danemark en 1987, puis l'Allemagne en 2007. L'idée en est simple : substituer à des cotisations sociales, assises sur les salaires, la TVA assise sur les dépenses de consommation des ménages pour favoriser la compétitivité prix d'un pays. Comme un point de TVA permet de réduire de plus d'un point les cotisations, le coût du travail est réduit tout en dégagant des ressources nouvelles pour la protection sociale. Par ce mécanisme, les prix de vente des produits fabriqués en France doivent baisser par rapport à ceux des produits fabriqués à l'étranger qui seront assujettis à une TVA plus élevée sans bénéficier de la baisse du coût du travail. Prévue pour entrer en vigueur au 1^{er} octobre 2012, la loi qui prévoyait l'augmentation de 1,6 point la TVA à taux normal a finalement été abrogée, avant que le système de « TVA » sociale ne soit restauré pour financer le CICE (la TVA à taux normal passe de 19,6 à 20 %, le taux normal de 7 à 10 %).

L'efficacité attendue en termes de gains de compétitivité doit toutefois être nuancée. Tout d'abord, l'effet théorique sur la compétitivité prix des exportateurs va dépendre du comportement de marges des entreprises françaises. Ces dernières peuvent en profiter pour les reconstituer. Il faut également compter avec la réaction des fournisseurs étrangers qui pourraient réduire leurs marges. Enfin et surtout, l'efficacité du mécanisme dépend de l'acceptation par les salariés d'une perte de pouvoir d'achat qui n'est envisageable qu'à court terme.

A la suite du rapport Gallois, le gouvernement a décidé la création d'un mécanisme fiscal de crédit d'impôt, le CICE, destiné à soutenir la compétitivité de l'industrie et l'emploi.

Le mécanisme du CICE consiste à accorder aux entreprises une économie d'impôt sur leurs bénéfices calculée en proportion de leur masse salariale brute jusqu'à 2,5 fois le SMIC. Au total, les entreprises bénéficieront d'un choc d'offre d'un montant de 20 milliards d'euros, représentant environ 2,6 % du coût du travail. Le gouvernement a décidé de financer le coût du CICE moitié par des économies dans la dépense publique et pour l'autre par un relèvement de la TVA.

On a beaucoup reproché à ce mécanisme de manquer partiellement sa cible. Le fait de borner l'assiette du CICE à 2,5 fois le SMIC, revient à manquer la cible qui devrait être de donner les moyens aux entreprises industrielles les plus exposées à la concurrence internationale de renforcer leur compétitivité hors prix. En faisant le choix de plafonner le CICE, le gouvernement risque de reproduire la même erreur qu'avec la politique des allègements de charges. Concrètement, le CICE organise un transfert financier des secteurs productifs vers les secteurs protégés et conduit à spécialiser l'économie française dans les produits de bas de gamme et l'emploi peu qualifié. Certains auteurs préconisent un relèvement de l'assiette jusqu'à 3,5 ou 4 fois le SMIC.

Le pacte de responsabilité et de solidarité accentue encore l'effort entamé de réduction de la fiscalité avec le CICE. Il prévoit une baisse du coût du travail dans le but clairement affiché de favoriser l'emploi, mais également d'améliorer la compétitivité de l'économie et sa capacité à exporter. En 2015, le coût du travail au niveau du Smic sera réduit avec l'exonération des cotisations patronales versées aux Urssaf. A partir du 1^{er} janvier 2016, les cotisations famille seront abaissées de 1,8 point, pour les salaires compris entre 1,6 et 3,5 Smic. Au total, les allègements supplémentaires sur les salaires inférieurs à 1,6 Smic s'élèveront à près de 4,5 milliards d'euros, ceux sur les salaires supérieurs à 1,6 Smic s'élèveront également à 4,5 milliards d'euros. En comptant le CICE, d'ici 2017, le coût du travail sera allégé de 30 milliards d'euros. Certes, elles pourront utiliser cette manne pour se désendetter, reconstituer leurs marges, plus que pour baisser leurs prix de vente. Mais dans tous les cas, c'est un effort sans précédent qui est engagé.

Le pacte de responsabilité prévoit aussi une réduction de la fiscalité des entreprises pour favoriser leurs investissements. La contribution sociale de solidarité des sociétés (C3S), payée par environ 300 000 entreprises, sera supprimée d'ici à 2017, avec une première réduction équivalente à 1 milliard d'euros en 2015. Au total, cette suppression représente plus de 6 milliards d'euros brut qui seront restitués aux entreprises. La contribution exceptionnelle sur l'impôt sur les sociétés sera également supprimée en 2016 et le taux normal passera de 33,3 % actuellement à 28 % en 2020 avec une première étape dès 2017. Enfin, afin de simplifier le cadre fiscal, plusieurs dizaines de taxes à faible rendement seront supprimées. Cette réforme de la fiscalité favorisera la croissance et l'emploi et, à terme, la fiscalité des entreprises aura baissé de 10 milliards d'euros en 2017.

Ce pacte de responsabilité est ambitieux. Il vise clairement à favoriser l'offre productive et la compétitivité des entreprises. Il est trop tôt pour savoir s'il sera mené à son terme et portera ses fruits. En tous les cas, deux écueils devront être levés pour assurer sa réussite : rétablir la confiance pour que le pacte ne soit pas interprété comme un nouveau cadeau fait aux entreprises, mais comme une chance pour relancer la croissance et l'emploi, réussir à réduire la dépense publique des 50 milliard d'euros annoncés d'ici 2017 sans menacer le pacte social ni couper dans les dépenses publiques productives.

CONCLUSION

Réformer la fiscalité est une chose sensible qui touche au vivre ensemble et à la citoyenneté. Or, la volonté de mettre la fiscalité au service de la compétitivité, particulièrement en période de faible croissance et de crise des finances publiques, est difficilement conciliable avec l'objectif d'équité. En effet, une fiscalité de compétitivité conduit à réduire l'imposition des bases fiscales les plus mobiles au détriment de celles qui le sont moins, la consommation et les revenus les plus faibles. Par ailleurs, sans une meilleure coordination fiscale au sein de l'Union européenne, cette recherche de la compétitivité par la fiscalité risque de se muer en concurrence stérile conduisant inéluctablement à un appauvrissement de l'Etat providence. Il est donc urgent de progresser dans la convergence des fiscalités en Europe.

DROIT

DURÉE : 1 HEURE 30.

S U J E T

ESC

I - CAS PRATIQUE

« OMNIMMO »

Vous êtes juriste d'entreprise dans un groupe immobilier régional intégré OMNIMMO créé en 1950 à Bordeaux et qui a, au fil du temps, étendu son rayonnement en région Aquitaine puis sur l'ensemble du territoire national. Les activités du groupe sont les suivantes :

- construction et vente d'immeubles neufs en habitat collectif comme en habitat individuel,
- transaction : vente d'immeubles anciens et mise en location,
- administration de biens immobiliers (gestion locative, gestion de copropriété⁽¹⁾).

Le contexte de marché est complexe.

• Le marché du neuf : de juillet 2012 à juillet 2013, le nombre de constructions neuves accuse une baisse de 13,4 %, à 301 620 unités. À cette conjoncture morose, s'ajoutent les craintes liées aux dispositions du projet de loi « Accès au logement et urbanisme rénové » (Alur).

• La transaction résiste dans les régions qui connaissent une croissance démographique et souffre dans les autres ; partout la concurrence s'intensifie : nouvelles formes d'exercice de la profession à bas coûts, ventes de particulier à particulier avec le développement de sites Internet spécialisés...

• La location et la gestion locative se trouvent confrontées au problème de la solvabilité des locataires et à la question de la qualité des biens.

• La gestion de copropriété se heurte à un problème de rentabilité : les évolutions réglementaires ont généré de nouvelles obligations pour les copropriétaires qui se traduisent par une augmentation de leurs charges. Le travail du syndic⁽²⁾ s'est alourdi et complexifié (dimensions juridiques, techniques, financières...) mais reste peu valorisé.

Le groupe OMNIMMO est composé de filiales spécialisées :

- OMNIMMO promotion : construction neuve, en réhabilitation et en rénovation pour construire une offre immobilière innovante et durable. Cette activité historique du groupe a permis le développement des autres métiers dans le cadre d'une stratégie de diversification vers la gestion d'immeubles et la vente d'immeubles anciens.
- OMNIMMO professionnel : estimation d'un patrimoine immobilier et stratégie d'optimisation.
- OMNIMMO entreprise : conseil en immobilier d'entreprise (analyse des projets des entreprises, recherche d'implantation, rédaction, recadrage et renouvellement de baux), ventes et locations, estimations, expertise juridique.

• OMNIMMO résidentiel : comprend quarante agences, au service du grand public, réparties sur l'ensemble du territoire national. Elles exercent toutes la transaction et la gestion locative. Quelques-unes ont également développé une activité de gestion de copropriété.

Le comité de direction du groupe a décidé de poursuivre la stratégie de croissance externe menée depuis quelques années pour renforcer le maillage du territoire régional et développer l'implantation sur l'ensemble du territoire national. L'ambition du groupe est d'intégrer le « Top 10 » des administrateurs de biens français.

Pour l'exercice de leur activité, les filiales prennent appui sur les services centraux dont fait partie le service juridique. Le directeur juridique vous a confié la réception des nouveaux dossiers. Vous préparez une première analyse des situations juridiques à gérer.

Vous traiterez les dossiers suivants en apportant des réponses justifiées en fait et en droit.

- ⁽¹⁾ La gestion de copropriété consiste à veiller à l'entretien des parties communes des immeubles (couloirs, escaliers, ascenseurs, espaces verts...), à faire exécuter les travaux programmés pour le compte des propriétaires des appartements.
- ⁽²⁾ Le syndic est le professionnel spécialisé en gestion de copropriété.

DOSSIER 1

Monsieur TABEAU directeur de l'agence OMNIMMO de Périgueux vous consulte après l'appel de Monsieur CARME un client acquéreur furieux suite à la découverte de la présence de capricornes (insectes xylophages, c'est-à-dire qui se nourrissent de bois) dans les encadrements de deux des vingt fenêtres de l'appartement qu'il a acheté par l'intermédiaire de son agence.

L'acte authentique a été signé le 16 mars 2013.

Monsieur CARME s'est renseigné auprès du syndic de la copropriété, le vendeur avait informé le 5 décembre 2012, par un courrier recommandé avec accusé de réception, ce gestionnaire que les encadrements de deux fenêtres étaient « infestés de vers ». La copropriété n'avait pris aucune disposition avant la vente de l'appartement.

Le vendeur n'a informé ni l'agence immobilière, ni les acheteurs de l'existence de ce vice. Il n'a pas non plus mentionné qu'il avait engagé une démarche auprès de la copropriété. Le négociateur qui a visité l'appartement pour l'estimer et a ensuite accompagné les acquéreurs dans leurs visites n'avait pas remarqué la présence des insectes.

Analysez la situation et présentez les éventuelles conséquences juridiques de cette découverte pour l'agence.

DOSSIER 2

Monsieur NOGUES, directeur de l'agence de La Rochelle récemment rachetée par le groupe OMNIMMO vous fait part de son mécontentement.

Monsieur VEINEUX a cédé à OMNIMMO la totalité des parts de sa société qui exploitait un fonds de commerce d'agence immobilière avec transfert des contrats de collaboration des agents commerciaux et des contrats de travail des salariés. Le contrat établi lors du rachat, contient une clause de non-concurrence de deux ans pour Monsieur VEINEUX ainsi qu'une clause d'interdiction de débauchage des anciens collaborateurs d'une durée de cinq ans.

Monsieur NOGUES se plaint de la démission de collaborateurs qui ont créé deux agences concurrentes et ont détourné une partie de la clientèle. Il a constaté qu'une trentaine de mandats (contrats qui lient l'agence à ses clients vendeurs de biens immobiliers) rachetés ont été détournés et les ventes réalisées par les nouveaux concurrents. Ces agences n'ont pas réalisé d'autres ventes que celles issues des fiches clients vendues par Monsieur VEINEUX.

Monsieur NOGUES a rencontré Monsieur VEINEUX, qui lui a rappelé le principe de la liberté du commerce et du démarchage de la clientèle d'autrui.

Monsieur NOGUES s'inquiète du manque à gagner et vous demande quelle action mener contre Monsieur VEINEUX et ses proches.

DOSSIER 3

OMNIMMO est titulaire de marques dont :



OMNIMMO

- marque semi-figurative OMNIMMO n° 99/647132 déposée le 5 mars 1999 sans revendication de couleur pour désigner en classe 36 les services de courtage en biens immobiliers ;
- marque verbale OMNIMMO n° 99/656900 enregistrée en couleur (la maison est de couleur bleue et le mot OMNIMMO est rouge) le 11 juillet 1999 pour désigner en classe 36 les services de courtage en biens immobiliers...

Ces marques sont inscrites au Registre national des marques.

Les directeurs de plusieurs agences OMNIMMO ont constaté que la société PATRIMMO exploite, sur son site Internet, sur les vitrines de ses agences immobilières et dans la presse spécialisée, un logo bleu et rouge qui imite les marques dont OMNIMMO est titulaire.

Analysez la situation et indiquez les démarches à accomplir pour mettre fin à l'imitation du logo du groupe.

II - VEILLE JURIDIQUE

A partir de votre expérience de la veille juridique, vous montrerez comment l'entreprise peut, grâce à une veille juridique efficiente, gérer les risques inhérents à l'exercice de son activité.

Vous présenterez la démarche de veille juridique (objectifs, mises en œuvre possibles) et illustrerez votre propos d'exemples puisés dans l'actualité juridique de l'année 2013.

CORRIGÉ

Par Pascal Simon-Doutreluingne, professeur au lycée René Cassin de Strasbourg.

I - CAS PRATIQUE

Remarques préliminaires

Les compétences ici recherchées devaient être :

- une restitution précise des connaissances théoriques ;
- un respect de la forme de la réponse (progressivité dans la réponse : principe, application aux faits pour la décision).

Il était donc indispensable d'utiliser la démarche du syllogisme pour répondre aux différentes demandes :

- réponses justifiées en fait (travail de qualification de la situation exposée : comprendre et analyse du contexte en déterminant la pertinence des faits par rapport à la recherche de solution) ;
- réponses justifiées en droit (connaître et maîtriser son cours pour identifier quelle règle de droit est nécessaire à la solution proposée).

Nota Bene : les réponses proposées dans les rubriques « Problématique et points de droit » sont ici assez précises pour que vous puissiez envisager l'étendue de la réponse qui devait être formulée.

DOSSIER 1

Monsieur Tableau directeur de l'agence OMNIMMO de Périgueux vous consulte après l'appel de Monsieur Carme un client acquéreur furieux, suite à la découverte de la présence de capricornes (insectes xylophages, c'est-à-dire qui se nourrissent de bois) dans les encadrements de deux des vingt fenêtres de l'appartement qu'il a acheté par l'intermédiaire de son agence.

L'acte authentique a été signé le 16 mars 2013.

Monsieur Carme s'est renseigné auprès du syndic de la copropriété, le vendeur avait informé, le 5 décembre 2012, par courrier recommandé avec accusé de réception, ce gestionnaire, que les encadrements de deux fenêtres étaient « infestés de vers ».

La copropriété n'avait pris aucune disposition avant la vente de l'appartement.

Le vendeur n'a informé ni l'agence immobilière, ni les acheteurs de l'existence de ce vice. Il n'a pas non plus mentionné qu'il avait engagé une démarche auprès de la copropriété. Le négociateur, qui a visité l'appartement pour l'estimer et a ensuite accompagné les acquéreurs dans leurs visites, n'avait pas remarqué la présence des insectes.

Analysez la situation et présentez les éventuelles conséquences juridiques de cette découverte pour l'agence.

Éléments de correction

Remarques liminaires

Contrairement aux deux années précédentes, le cas pratique ne proposait pas d'annexes en support des questions. La complexité des faits, découlant de la multiplicité des parties en cause (le vendeur et l'acheteur du bien, l'agence, le notaire, le syndic de la copropriété, la copropriété) et des informations données, pouvait être déconcertante.

Elle nécessitait donc un travail (particulièrement) rigoureux de qualification pour dégager la règle applicable.

Dans ce sujet ESC 2014, il ne s'agissait pas d'une vente par un professionnel à un consommateur mais d'une vente entre deux particuliers avec l'intervention d'un professionnel (l'agence immobilière) comme tiers au contrat de vente. Par ailleurs, le syndic de la copropriété savait l'état des huisseries mais ne réagit pas.

Ainsi, la formulation de la question devait orienter les éléments de réponse au profit de l'agence : « les éventuelles conséquences juridiques POUR l'agence ».

N.B. : les réponses proposées ne peuvent être complètes, étant donné le temps imparti lors de l'épreuve et les éléments exposés par le cas pratique. Les compétences évaluées restent la capacité à analyser les faits, définir les bonnes problématiques, et en fonction des principes juridiques, d'envisager des solutions les plus pertinentes possibles.

Les faits

Lors d'une vente d'un bien immobilier, l'acquéreur s'aperçoit que deux fenêtres sont infestées par un insecte xylophage et se rend compte que le vendeur, le syndic de la copropriété étaient au courant de cette situation. La vente se fait par l'intermédiaire d'une agence immobilière. Celle-ci souhaite donc anticiper les risques juridiques de cette situation.

Le problème juridique et les points de droit

Le problème posé pour l'agence n'est pas directement un problème de vente, car l'agence n'est pas le vendeur. Il ne faut pas, pour autant, écarter le terrain du droit de la vente.

En effet, une vente peut être annulée sur la base de l'article 1109 du code civil qui évoque notamment le dol comme vice de consentement, et les jurisprudences récentes de la 3^e chambre civile de la cour de cassation – pourvois n°08-21677 et 11-10861 – allaient dans ce sens. On peut écarter raisonnablement l'action en vices cachés car selon l'énoncé, les fenêtres sont infestées et dès lors est-ce qu'une vérification normale n'aurait pas permis lors des visites, de découvrir la réalité de la situation ?

Cette annulation prévisible pose, alors, un problème de responsabilité de l'agence immobilière, prestataire de services, qui a contribué à la réalisation de la vente, mais n'est pas partie au contrat de vente.

L'agence immobilière est débitrice d'obligations de conseil et d'information envers ses clients. Ainsi, le code de la consommation dans son article L. 111-1 dispose que « Tout professionnel vendeur de biens ou prestataire de services doit, avant la conclusion du contrat, mettre le consommateur en mesure de connaître les caractéristiques essentielles du bien ou du service. ».

Et c'est à ce titre qu'elle pourrait subir des conséquences de cette vente.

La solution (proposition)

On peut donc envisager l'annulation de la vente pour vice de consentement (dol) : l'article 1109 du code civil dispose qu'« Il n'y a point de consentement valable si le consentement n'a été donné que par erreur ou s'il a été extorqué par violence ou surpris par dol. ». Le vendeur connaissait l'état phytosanitaire du bien qu'il vendait et n'en a rien dit à l'acquéreur.

Enfin, et pour répondre à la demande d'information de l'agence immobilière, le non-respect du devoir de conseil par l'agent « le négociateur » entraînerait réparation du préjudice par la nullité du contrat avec l'acquéreur, Monsieur Carme et la restitution des sommes versées.

L'agence immobilière pourrait invoquer la faute du syndic, qui n'a pas transmis les informations à temps et tenter, ainsi, de prouver une cause étrangère (fait d'un tiers).

DOSSIER 2

Monsieur Nogues, directeur de l'agence de La Rochelle récemment rachetée par le groupe OMNIMMO, vous fait part de son mécontentement.

Monsieur Veineux a cédé à OMNIMMO la totalité des parts de sa société qui exploitait un fonds de commerce d'agence immobilière avec transfert des contrats de collaboration des agents commerciaux et des contrats de travail des salariés.

Le contrat établi lors du rachat, contient une clause de non-concurrence de deux ans pour Monsieur Veineux ainsi qu'une clause d'interdiction de débauchage des anciens collaborateurs d'une durée de cinq ans.

Monsieur Nogues se plaint de la démission de collaborateurs qui ont créé deux agences concurrentes et ont détourné une partie de la clientèle. Il a constaté qu'une trentaine de mandats (contrats qui lient l'agence à ses clients vendeurs de biens immobiliers) rachetés ont été détournés et les ventes réalisées par les nouveaux concurrents. Ces agences n'ont pas réalisé d'autres ventes que celles issues des fiches clientes vendues par Monsieur Veineux.

Monsieur Nogues a rencontré Monsieur Veineux, qui lui a rappelé le principe de la liberté du commerce et du démarchage de la clientèle d'autrui.

Monsieur NOGUES s'inquiète du manque à gagner et vous demande quelle action mener contre Monsieur Veineux et ses proches.

Éléments de correctionRemarques liminaires

Là encore, les différentes informations étaient très complexes :

- qu'entend-on par « Monsieur Veineux et ses proches » ? Doit-on distinguer les cas (Monsieur VEINEUX d'un côté, les deux ex-salariés de l'autre) ? Les traiter ensemble ?
- Monsieur VEINEUX n'était pas salarié de l'agence (il vend ses parts, il était donc associé et devait donc être, certainement, gérant majoritaire), dès lors une clause de non-concurrence entre cessionnaire et cédant de parts sociales est-elle identique à celle que l'on connaît dans le cadre d'un contrat de travail ?

Il faut pouvoir justifier sa prise de position et une lecture attentive du cas permettait, alors, d'envisager l'action en responsabilité civile contractuelle (l'application de clauses contractuelles comprises dans l'acte de cession), sans aller jusqu'à se fourvoyer dans l'action en contrefaçon qui est une action en responsabilité civile délictuelle (fait personnel – article 1382 du code civil).

Ces éléments démontrent, encore une fois, l'importance cruciale d'une bonne qualification des faits, on ne saurait trop le rappeler ; particulièrement lorsque la situation de faits évoquée est pour le moins compliquée, sinon complexe.

Par ailleurs, le questionnement du cas évoque la liberté du commerce et implique donc de connaître les limites acceptables, à cette liberté fondamentale.

Les faits

Lors de la cession d'une agence immobilière, le nouvel acquéreur tente de se protéger contre une concurrence, qu'il jugerait comme déloyale, venant de Monsieur NOGUES, ancien propriétaire.

Malgré les précautions prises (clauses contractuelles portant sur une non-concurrence et un non-débauchage), Monsieur Veineux se plaint de l'ouverture de deux agences concurrentes, dirigées par deux anciens collaborateurs et de la perte de plusieurs clients, tous gérés par Monsieur NOGUES, subissant ainsi un dommage matériel.

Le problème juridique et les points de droit

L'action en concurrence déloyale est une action en responsabilité délictuelle qui permet à chaque entreprise d'obtenir réparation à l'encontre d'un concurrent ayant outrepassé ses droits. L'action en concurrence déloyale est soumise aux conditions classiques de la responsabilité civile du fait personnel : une faute, un dommage, un lien de causalité. Le débauchage, quand il entraîne une désorganisation, est constitutif d'une faute.

Hors, ici le litige porte sur l'application de clauses contractuelles. L'action en concurrence déloyale n'est donc pas pertinente.

Il est, alors, nécessaire d'envisager la validité des clauses qui pourraient être opposées à Monsieur VEINEUX.

En droit du travail, une clause de non-concurrence permet de limiter la liberté d'entreprendre si elle correspond à plusieurs caractéristiques cumulatives. Depuis 2002, la cour de cassation exige que :

- Condition n° 1 : La clause de non-concurrence doit être inscrite dans le contrat de travail ou faire l'objet d'un avenant approuvé le salarié.
- Condition n° 2 : La clause de non-concurrence doit être indispensable à la protection des intérêts légitimes de l'entreprise. Elle ne doit pas avoir pour conséquence de mettre le salarié dans l'impossibilité absolue d'exercer son activité professionnelle (Cour de cassation, Chambre sociale, 25 septembre 1991).
- Condition n° 3 : La clause de non-concurrence doit être limitée dans le temps, et dans l'espace.
- Condition n° 4 : La clause de non-concurrence doit tenir compte des spécificités de l'emploi du salarié.

Et que penser d'une « clause d'interdiction de débauchage des anciens collaborateurs » ?

La jurisprudence a envisagé l'existence de clause « non-sollicitation de clientèle » en l'assimilant à une clause de non-concurrence. Peut-on l'élargir à la non-sollicitation de collaborateurs ? De même, l'obligation de loyauté inhérente au contrat de travail (article 1134 du code civil et L. 1222-1 du code du travail) pourrait permettre une action mais qui n'a de pertinence qu'envers un salarié (licenciement pour cause réelle et sérieuse) et pas contre un concurrent fusse-t-il ancien salarié. Mais « la cession des parts » évoquée dans le cas, semble écarter l'application du droit du travail. Ainsi, après l'arrêt du 12 février 2013 (n° 12-13726) qui n'évoque pas expressément la condition de la contrepartie financière, la

décision n° 12-25984 de la chambre commerciale de la Cour de cassation du 8 octobre 2013 réaffirme qu'une clause de non concurrence n'est pas subordonnée à l'existence d'une contrepartie financière.

La solution (proposition)

En cas de concurrence déloyale de la part d'un ancien associé, de manière directe ou indirecte, personnellement ou par personne interposée, la société victime est en droit d'attaquer la société concurrente pour concurrence déloyale et ainsi d'obtenir en justice l'octroi de dommages et intérêts en indemnisation des préjudices subis. Pour engager la responsabilité de M. Veineux, M. NOGUES doit établir que la perte du chiffre d'affaires (dommage) est due à la perte frauduleuse des clients que M. VEINEUX gérait. Il faut donc que M. NOGUES prouve que c'est M. VEINEUX qui a débauché les deux collaborateurs et qu'il leur a transmis les indications des clients ainsi détournés.

Sans cette causalité, la liberté d'entreprendre et la liberté contractuelle peuvent expliquer que les clients quittent une entreprise pour contracter avec une autre. Or rien n'indique, dans le cas exposé, que M. VEINEUX a contrevenu à son obligation de non-concurrence. Quant aux deux collaborateurs partis de la société, étaient-ils contraints contractuellement, eux-aussi, par une telle limitation ?

DOSSIER 3

OMNIMMO est titulaire de marques dont :

- marque semi-figurative OMNIMMO n° 99/647132 déposée le 5 mars 1999 sans revendication de couleur pour désigner en classe 36 les services de courtage en biens immobiliers ;
- marque verbale OMNIMMO n° 99/656900 enregistrée en couleur (la maison est de couleur bleue et le mot OMNIMMO est rouge) le 11 juillet 1999 pour désigner en classe 36 les services de courtage en biens immobiliers...

Ces marques sont inscrites au Registre national des Marques.

Les directeurs de plusieurs agences OMNIMMO ont constaté que la société PATRIMMO exploite, sur son site internet, sur les vitrines de ses agences immobilières et dans la presse spécialisée, un logo bleu et rouge qui imite les marques dont OMNIMMO est titulaire.

Analysez la situation et indiquez les démarches à accomplir pour mettre fin à l'imitation du logo du groupe.

Eléments de correction

Remarques liminaires

Le travail d'analyse ici formulé, portait sur une indication déjà fortement orientée : l'existence d'une « imitation » et donc prescrivait des connaissances en propriété industrielle.

Ce dossier était donc particulièrement simple, comparé aux précédents.

Les faits

La société OMNIMMO titulaire de marques régulièrement déposées au Registre national des marques, estime qu'elle subit un dommage matériel du fait d'un concurrent PATRIMMO. Cette société reprend en effet, dans sa communication commerciale, des couleurs identiques à celles de sa marque verbale.

Le problème juridique et les points de droit

Les règles concernant la concurrence déloyale (dont le parasitisme) sont des règles jurisprudentielles, fondées sur l'article 1382 du Code civil. Elles protègent les entreprises contre des atteintes fautives à leur clientèle, leur image, leur patrimoine. La contrefaçon a un régime particulier, visé dans le code de la propriété intellectuelle (CPI).

Les articles L. 713-2 et L. 713-3 du CPI distinguent deux situations :

La contrefaçon à l'identique (produits ou services identiques et donc la contrefaçon existe indépendamment de tout danger de confusion) ;

La contrefaçon par imitation (reproduction d'éléments distinctifs entraînant un risque de confusion).

Ainsi, sont considérés comme une contrefaçon : la reproduction, l'usage, l'apposition ou l'imitation d'une marque identique ou similaire à celle désignée dans l'enregistrement, sans l'autorisation du propriétaire ou du bénéficiaire du droit exclusif d'exploitation.

A l'occasion de l'examen d'un procès relatif à la pratique de la publicité comparative, la Cour de justice des Communautés européennes (CJCE) a dans un arrêt du 12 juin 2008, rappelé que le titulaire d'une marque peut interdire l'usage d'un signe similaire à sa marque, lorsque quatre conditions sont réunies :

- l'usage doit avoir lieu dans la vie des affaires ;
- il doit être fait sans le consentement du titulaire de la marque, il doit être fait pour des produits ou services identiques ou similaires à ceux pour lesquels la marque a été enregistrée ;
- et il doit porter atteinte ou être susceptible de porter atteinte à la fonction essentielle de la marque, qui est de garantir aux consommateurs la provenance des produits ou des services, en raison d'un risque de confusion dans l'esprit du public. (CJCE, 12 juin 2008, aff. C- 533/06, O2 Holdings Ltd c/ Hutchison 3G UK Ltd).

Les sanctions de l'action en contrefaçon sont civiles (dommages et intérêts) et pénales (3 ans d'emprisonnement et 300 000 euros d'amende) ; fermeture définitive ou temporaire de l'établissement ; confiscation des objets contrefaits ; affichage du jugement de condamnation.

Quelle est l'articulation entre les actions en concurrence déloyale et en contrefaçon ? Les entreprises ont donc la possibilité de mettre en œuvre les deux actions :

- la concurrence déloyale qui protège l'image de la marque et pour laquelle on demandera une réparation (dommages et intérêts) en établissant les conditions d'application de la responsabilité civile délictuelle ;
- la contrefaçon qui vise, quant à elle, à protéger la propriété industrielle et donc à sanctionner toute atteinte (cessation de la pratique et sanction de son auteur).

La solution (proposition)

Le choix de l'action en justice est donc à la liberté du titulaire du droit de propriété intellectuelle, en fonction du résultat attendu.

II - VEILLE JURIDIQUE

A partir de votre expérience de la veille juridique, vous montrerez comment l'entreprise peut, grâce à une veille juridique efficiente, gérer les risques inhérents à l'exercice de son activité.

Vous présenterez la démarche de la veille juridique (objectifs, mises en œuvre possible) et illustrerez votre propos d'exemples puisés dans l'actualité juridique de l'année 2013.

Remarques liminaires

C'est la première fois, que le questionnement portait sur la « démarche » de veille juridique, c'est-à-dire sur la compréhension de son objectif, sa mise en œuvre.

Proposition

L'objectif de cette veille juridique consiste, sur un champ clairement délimité – le programme, l'année civile (2013), le thème défini (l'entreprise et le risque) – à tenir compte des évolutions du Droit et à mettre en œuvre les méthodologies permettant de repérer les évolutions intervenues, de les analyser, les hiérarchiser et les utiliser dans un raisonnement juridique.

Cette veille constitue un travail personnel et régulier de l'étudiant qui peut être organisé dans le cadre collectif de la classe, grâce à une mise en commun des résultats de la recherche effectuée avec les technologies de l'information et de la communication.

Le risque lié à l'activité économique

Protection contre un concurrent : contrefaçon et la concurrence déloyale

Cour de cassation - chambre commerciale - Audience publique du mardi 9 juillet 2013 - N° de pourvoi : 12-22166 - Cassation partielle

LA COUR DE CASSATION, CHAMBRE COMMERCIALE, a rendu l'arrêt suivant :
Sur le premier moyen, pris en sa deuxième branche :

Vu l'article 1382 du code civil ;

[...] constitue un acte de concurrence déloyale la copie servile d'un produit commercialisé par une entreprise susceptible de créer un risque de confusion dans l'esprit de la clientèle, et qu'en présence de deux entreprises exerçant une activité identique ou proche et commercialisant des produits de même nature, le constat d'un risque de confusion découlant de la fabrication et de la vente par l'une de produits similaires à ceux commercialisés par l'autre n'est pas subordonné à la condition que la marque de la seconde ait été apposée sur les produits commercialisés par la première, [...]

Protection contre un professionnel d'une spécialité différente

Le vice caché, lequel se définit comme un défaut rendant la chose impropre à sa destination, ne donne pas ouverture à une action en responsabilité contractuelle mais à une garantie dont les modalités sont fixées par les articles 1641 et suivants du code civil.

La cour de cassation rappelle (Cass. Com. 19 Mars 2013, n°11-26566) que le vendeur et l'acheteur n'étaient pas des professionnels de même spécialité, ce dernier ne disposant pas des compétences techniques nécessaires pour déceler les vices affectant la chose vendue, le vendeur ne pouvait opposer à l'acheteur la clause limitative de responsabilité y compris sur le fondement de l'article 1150 du Code Civil.

L'assurance et la prévention du risque

La prise en compte du risque

L'omission ou la déclaration inexacte, involontaire, de la part de l'assuré n'entraîne pas la nullité du contrat d'assurance mais la réduction de l'indemnité.

Être assuré permet d'éviter de perdre trop lorsque l'on est victime d'un dommage important (accident de la circulation, incendie de la maison, blessures involontaires à un tiers, etc.). Mais pour être bien assuré, encore faut-il ne pas omettre d'actualiser les informations relatives au bien ou la personne assurée.

Le 15 mai 2013, la Cour de cassation (Civ. 15 mai 2013, n°12-14757) casse l'arrêt et considère sous le visa de l'article L. 113-9 du Code des assurances, que « l'omission ou la déclaration inexacte de la part de l'assuré dont la mauvaise foi n'est pas établie n'entraîne pas la nullité du contrat d'assurance. Dans le cas où la constatation n'a lieu qu'après un sinistre, l'indemnité est réduite en proportion du taux des primes payées par rapport au taux des primes qui auraient été dues si les risques avaient été complètement et exactement déclarés ».

Dès lors, si l'assuré est obligé de déclarer, en cours d'exécution des travaux, les circonstances nouvelles qui ont pour conséquence d'aggraver les risques et rendent de ce fait inexactes ou caduques les réponses faites à l'assureur lors de la conclusion du contrat, alors la réduction proportionnelle d'indemnité doit avoir lieu.

Par contre, en cas de mauvaise foi, alors le contrat peut être annulé et ce même si le risque caché est sans influence sur le sinistre en lui-même.

La limitation du risque assurable

Le montant maximal des envois à valeur déclarée admis dans son réseau par La Poste est fixé à 5 000 euros.

La loi du 20 mai 2005 a abrogé les dispositions de l'article L.10 du CPCE, qui prévoyait que « La Poste est responsable, jusqu'à concurrence d'une somme qui est fixée par décret et sauf le cas de perte par force majeure, des valeurs insérées dans les lettres et régulièrement déclarées ». Par voie de conséquence, le décret de 1996 fixant « le montant maximum de garantie et de déclaration de valeur applicable aux envois avec valeur déclarée (...) à 5 000 euros » ne trouve aujourd'hui plus à s'appliquer.

Complétant ces dispositions, un décret (n° 2013-417) du 21 mai 2013 interdit l'insertion de billets de banque, de pièces et de métaux précieux dans les envois postaux, y compris dans les envois à valeur déclarée, les envois recommandés et les envois faisant l'objet de formalités attestant leur dépôt et leur distribution. A défaut, en cas de perte ou de détérioration, la poste décline toute responsabilité.

Par ailleurs, les bijoux ne peuvent être transportés que par envoi à valeur déclarée, par envoi recommandé ou par envoi faisant l'objet de formalités attestant leur dépôt et leur distribution.

Dans tous les cas, la valeur des objets insérés dans un envoi recommandé ou dans un envoi faisant l'objet de formalités attestant leur dépôt et leur distribution ne doit pas dépasser le niveau de garantie choisi par l'expéditeur lors du dépôt de l'envoi.

DROIT

DURÉE : 1 HEURE 30.

SUJET

I - MISE EN SITUATION JURIDIQUE

Cas SYNACE

Créée en 2005 par une équipe d'experts en informatique et télécommunications, Synace est une agence conseil en technologie digitale forte d'une centaine de collaborateurs.

L'essor des usages numériques et leur imbrication croissante dans la sphère économique irriguent aujourd'hui chaque fonction de l'entreprise. Fort de ce constat, Synace aide les directions métier à tirer un profit durable de ce nouvel environnement en les accompagnant dans la conception, la mise en œuvre puis l'animation de leurs plates-formes digitales (sites internet, forums, blogs, réseaux sociaux...).

La société Synace propose à ses clients des services « clés en main », qui incluent des prestations de service mais aussi la fourniture de matériels informatiques. Synace commercialise donc de façon habituelle – et depuis sa création – des ordinateurs de la marque « Peer ».

Synace investit massivement en Recherche et Développement, maintenant ainsi sa capacité à identifier de nouveaux marchés, ce qui lui permet de connaître une croissance continue depuis sa création.

Ainsi, des sociétés comme La Poste, BNP Paribas ou PagesJaunes s'appuient sur les compétences et l'accompagnement des experts de Synace pour réussir leur transformation progressive en entreprise digitale, sans pour autant renier les aspects « traditionnels » de leur activité qui ont fait leur succès.

Mais Synace sait aussi aider les professionnels de l'internet. Pour ces derniers, l'objectif consiste à préserver leur avantage compétitif dans un contexte de plus en plus concurrentiel où l'innovation est une arme qu'il convient sans cesse d'affûter. Parmi ces enseignes figurent Rue du commerce, Vente privée, Voyages-sncf.com ou Meilleurtaux.com, pour ne citer que les plus connues.

Le directeur de Synace, François Luchaire, vous demande d'étudier certains dossiers juridiques et de donner un avis motivé et synthétique sur les difficultés qu'ils soulèvent...

QUESTIONS

1. François Luchaire a été victime d'un accident « stupide ». Alors qu'il visitait les locaux d'un futur client, la société Saleilles, François Luchaire est tombé en gravissant un escalier glissant et dépourvu de rampe. Il s'est fracturé une jambe et a dû interrompre son activité professionnelle pendant une quinzaine de jours. Il est apparu que l'employé de Saleilles chargé de l'entretien des locaux avait, par négligence, omis de rincer l'escalier après avoir utilisé un produit de nettoyage particulièrement glissant.

Sur quel(s) fondement(s) François Luchaire peut-il demander réparation du préjudice subi ?

2. Le directeur commercial de Peer, Edmond Thaller, a écrit une lettre à François Luchaire pour lui demander de bien vouloir pratiquer des prix de revente plus élevés, conformes à la nouvelle stratégie de haut de gamme du fabricant d'ordinateurs. Dans cette lettre, Edmond Thaller demande également à la société Synace de s'engager dans un contrat de long terme (10 ans) à ne commercialiser que du matériel « Peer ». Il demande enfin à Synace de bien vouloir participer gracieusement à des opérations commerciales de promotion des nouveaux produits « Peer », qui devront être systématiquement proposés en priorité aux clients de Synace. En cas de refus, « Peer » rompra immédiatement toute relation commerciale avec l'entreprise Synace.

Que pensez-vous de la lettre adressée par le directeur commercial de « Peer » à l'entreprise Synace ?

3. Un litige oppose la société Synace à l'un des ses clients, la SNC Laubadaire, entreprise de transports routiers. Synace a conçu et mis en œuvre le site internet de l'entreprise Laubadaire et a amélioré sa visibilité sur les réseaux sociaux. Le dirigeant de Laubadaire SA estime avoir été insuffisamment informé, lors de la négociation du contrat il y a plusieurs années, des contraintes liées à la maintenance et aux coûts de fonctionnement de ce nouveau site. N'étant pas spécialiste des nouvelles technologies de l'information et de la communication, il estime ne pas avoir bénéficié d'une information suffisamment précise, due à tout consommateur par un vendeur professionnel.

L'entreprise Laubadaire peut-elle se prévaloir de la qualité de consommateur ? En quoi la qualité de consommateur peut-elle influencer sur l'obligation précontractuelle d'information pesant sur la société Synace ?

II - VEILLE JURIDIQUE

« Comment une entreprise peut-elle se protéger contre le risque contractuel ? »

Vous répondrez à cette question dans un bref développement en illustrant vos propos par plusieurs exemples issus notamment de votre activité de veille juridique.

CORRIGÉ

Par Pascal Simon-Doutreluingne, professeur au lycée René Cassin de Strasbourg.

I - MISE EN SITUATION JURIDIQUE

Éléments de correction

Remarques préliminaires

Les compétences ici recherchées devaient être :

- une restitution précise des connaissances théoriques ;
- un respect de la forme de la réponse (progressivité dans la réponse : principe, application aux faits pour la décision).

Il était donc indispensable d'utiliser la démarche du syllogisme pour répondre aux différentes demandes :

- réponses justifiées en fait (travail de qualification de la situation exposée : comprendre et analyse du contexte en déterminant la pertinence des faits par rapport à la recherche de solution) ;
- réponses justifiées en droit (connaître et maîtriser son cours pour identifier quelle règle de droit est nécessaire à la solution proposée).

Nota Bene : les réponses proposées dans les rubriques « Problématique et points de droit » sont ici assez précises pour que vous puissiez envisager l'étendue de la réponse qui devait être formulée.

Questions :

1. François Luchaire a été victime d'un accident « stupide ». Alors qu'il visitait les locaux d'un futur client, la société Saleilles, François Luchaire est tombé en gravissant un escalier glissant et dépourvu de rampe. Il s'est fracturé une jambe et a dû interrompre son activité professionnelle pendant une quinzaine de jours. Il est apparu que l'employé de Saleilles chargé de l'entretien des locaux avait, par négligence, omis de rincer l'escalier après avoir utilisé un produit de nettoyage particulièrement glissant.

Sur quel(s) fondement(s) François Luchaire peut-il demander réparation du préjudice subi ?

Éléments de correction

Remarques liminaires

Les termes de la situation présentée sont suffisamment précis pour vous orienter : un accident de personne, une responsabilité à rechercher et à établir pour envisager une réparation du dommage corporel.

Vos connaissances sur le régime de la responsabilité civile contractuelle (pour l'écarter) et délictuelle (pour en déterminer le régime) sont donc attendues.

Là encore, une lecture attentive des faits permet d'écarter une situation non pertinente : la responsabilité de l'employeur de François Luchaire, au titre de l'accident de travail. Cette situation de fait et de droit est envisagé principalement par le code de la sécurité sociale, qui le définit et encadre sa prise en charge. Ceci est donc largement hors programme.

La problématique est donc de déterminer qui est responsable et à quel titre (commettant ou fait personnel) ?

Les faits

Une personne se blesse alors qu'il entre dans les locaux d'une entreprise qu'il prospectait. L'escalier emprunté, où l'accident a lieu, a été mal entretenu puisque l'employé chargé de cette tâche n'a pas effectué sa prestation de travail jusqu'au bout (il n'a pas rincé l'escalier comme il aurait dû le faire pour éviter qu'il ne soit glissant et donc dangereux).

Le problème juridique et les points de droit

Il s'agit donc de présenter les différents régimes de responsabilité civile délictuelle pertinents par rapport aux faits :

- les articles 1382 « Tout fait quelconque de l'homme, qui cause à, autrui un dommage, oblige celui par la faute duquel il est arrivé, à le réparer. » voire 1383 du code civil « Chacun est responsable du dommage qu'il a causé non seulement par propre fait, mais encore par sa négligence ou par son imprudence. »

Le mécanisme de cette responsabilité nécessite une faute de l'auteur du dommage (intentionnelle ou non intentionnelle), la victime doit rapporter la preuve de la faute et l'auteur du dommage peut s'exonérer par la force majeure, le fait d'un tiers ou la faute de la victime.

- les deux situations visées à l'article 1384 du code civil : le fait d'autrui ou le fait de la chose.

L'Assemblée plénière de la Cour de cassation (Ass. plén., 29 mars 1991, Blicke) a posé un principe général de responsabilité du fait d'autrui. Il existe donc trois régimes juridiques possibles : la faute prouvée (instituteurs), la faute présumée (artisan) et la responsabilité de plein droit (parents et commettant).

La responsabilité des commettants (employeurs) du fait de leurs préposés (salariés) : il doit exister un lien de subordination (contrat de travail) entre l'employeur et le salarié.

Le préposé doit avoir commis une faute dans l'exercice de ses fonctions (Ass. plén., 20 janvier 2000, Costedoat).

Sur la faute, il faut démontrer une simple faute du préposé. S'il n'a pas commis de faute sa responsabilité ne peut être engagée et celle de son commettant non plus. En droit français, il y a un principe d'incompatibilité des fonctions de gardien et de préposé, dès lors de toute façon la responsabilité du préposé ne pourra être envisagée dans ce cas car il ne peut avoir de pouvoir sur la chose car préposé et donc dépendant du commettant. Le commettant demeure gardien de la chose et l'on ne pourra donc jamais rechercher la responsabilité d'un éventuel préposé gardien. Un salarié peut très bien devenir gardien d'une chose, mais il ne sera dès lors plus préposé dans le cadre de l'utilisation de ladite chose (Civ., 2^e 3 juin 2004).

Qui sera responsable du dommage corporel de Monsieur Luchairé ?

La solution (proposition)

Il était donc largement suffisant d'envisager, à titre principal, la responsabilité civile délictuelle de la société Saleilles qui emploie le salarié fautif (il était dans l'exercice de sa fonction lorsqu'il a commis cette erreur) pour obtenir un dédommagement du préjudice corporel.

La garde de la chose et donc la responsabilité du gardien (l'entreprise) pouvait aussi être envisagée comme autre solution même si, comme on l'a dit plus haut, il y a l'action du salarié et qu'un salarié n'est jamais gardien.

2. Le directeur commercial de Peer, Edmond Thaller, a écrit une lettre à François Luchaire pour lui demander de bien vouloir pratiquer des prix de revente plus élevés, conformes à la nouvelle stratégie de haut de gamme du fabricant d'ordinateurs. Dans cette lettre, Edmond Thaller demande également à la société Synace de s'engager dans un contrat de long terme (10 ans) à ne commercialiser que du matériel « Peer ». Il demande enfin à Synace de bien vouloir participer gracieusement à des opérations commerciales de promotion des nouveaux produits « Peer », qui devront être systématiquement proposés en priorité aux clients de Synace. En cas de refus, « Peer » rompra immédiatement toute relation commerciale avec l'entreprise Synace.

Que pensez-vous de la lettre adressée par le directeur commercial de « Peer » à l'entreprise Synace ?

Éléments de correction

Remarques liminaires

Les termes de la situation présentée sont, là aussi, suffisamment précis pour vous orienter : une relation commerciale exclusive et de long terme reposant sur une série d'obligations à la charge du client de la société Peer, notamment avec une clause contractuelle pour mettre fin au contrat en cas de litige.

La problématique est donc de déterminer la validité de ce contrat ou pour le moins de tout ou partie de ses clauses.

Les faits

Les sociétés Peer et Synace sont liées par des relations commerciales anciennes : la première fournit les ordinateurs qui font partie d'une offre « clé en main » lors de l'installation d'un système d'information par la seconde. A la suite d'un changement de stratégie commerciale de Peer, cette société propose à son client un contrat d'exclusivité assorti d'une série d'obligations pour Synace.

Le problème juridique et les points de droit

La relation contractuelle est-elle conforme au Droit ? Une relation contractuelle doit être équilibrée d'une part et ne pas porter atteinte à la concurrence d'autre part.

Ainsi, le législateur (Art. L. 442-1 Code de commerce) impose des règles relatives aux ventes ou prestations avec primes, aux refus de vente ou de prestation, prestations par lots ou par quantités imposées, autant de situations qui sont jugées comme étant susceptibles de limiter la concurrence sur un marché.

Cette protection de la concurrence est aussi celle directement du contractant qui s'engage exclusivement envers un autre : l'art 1131 du Code civil vise ainsi l'obligation sans cause.

Il s'agissait donc d'analyser les différentes clauses contractuelles et en évaluer la conformité au Droit (l'article L. 442-6 I 2° du code de commerce – Loi de modernisation de l'économie (LME) du 4 août 2008) et notamment de qualifier s'il y a un déséquilibre significatif dans les droits et obligations des parties : « Soumettre ou tenter de soumettre un partenaire commercial à des obligations créant un déséquilibre significatif dans les droits et obligations des parties. »

Comment et pourquoi protéger ce distributeur qui s'est assujettie une exclusivité ?

La solution (proposition)

Le contrat d'approvisionnement exclusif est possible si certaines conditions sont respectées. Il existe une dépendance économique du distributeur. Il faut donc envisager trois critères pour organiser la protection de celui-ci : quelle contrepartie à l'exclusivité d'approvisionnement ? Quelle est la durée du contrat ? Et quel est le prix obtenu (non pertinent ici) ?

L'exclusivité doit être en lien avec la qualité du service ou du bien proposé, la renommée de la marque, le savoir-faire (dans le cas de la franchise). Ici, le bien est haut de gamme.

Par ailleurs, le contrat est à durée déterminée. Ainsi, l'article L. 330-1 du code de commerce fixe à « un maximum de dix ans la durée de validité de toute clause d'exclusivité par laquelle l'acheteur, [...] s'engage vis à vis de son vendeur, cédant ou bailleur, à ne pas faire usage d'objets semblables ou complémentaires en provenance d'un autre fournisseur ».

Cependant, la clause obligeant à une participation gratuite aux opérations de promotion doit pouvoir trouver une contrepartie pour ne pas être considérées comme abusive, surtout que le refus de participer entraînerait une rupture sans délai du contrat. Cette dernière disposition qui peut apparaître comme une clause résolutoire est contestable car elle se fait sur la base d'une clause contractuelle qui apparaît comme abusive.

3. Un litige oppose la société Synace à l'un de ses clients, la SNC Laubadaire, entreprise de transports routiers. Synace a conçu et mis en œuvre le site internet de l'entreprise Laubadaire et a amélioré sa visibilité sur les réseaux sociaux. Le dirigeant de Laubadaire SA estime avoir été insuffisamment informé, lors de la négociation du contrat il y a plusieurs années, des contraintes liées à la maintenance et aux coûts de fonctionnement de ce nouveau site. N'étant pas spécialiste des nouvelles technologies de l'information et de la communication, il estime ne pas avoir bénéficié d'une information suffisamment précise, due à tout consommateur par un vendeur professionnel.

L'entreprise Laubadaire peut-elle se prévaloir de la qualité de consommateur ? En quoi la qualité de consommateur peut-elle influencer sur l'obligation précontractuelle d'information pesant sur la société Synace ?

Éléments de correction

Remarques liminaires

Cette partie du cas pratique portait finalement sur deux « questions de cours » sans autre forme particulière : « la qualité de consommateur » et les conséquences de celle-ci sur les obligations du cocontractant.

Il fallait donc pouvoir maîtriser ce point du programme pour répondre de manière pertinente à la seconde question.

Les faits

Les sociétés Laubadaire et Synace sont liées par des relations commerciales, la première étant cliente de la seconde. En effet Synace conçoit et met en ligne un site internet pour la première. Un litige les oppose sur l'exécution du contrat : la société cliente constate que le site internet installé lui impose « des contraintes

liées à la maintenance et aux coûts de fonctionnement » et elle s'estime donc mal informée.

Le problème juridique et les points de droit

La qualité de consommateur, ou pour le moins les droits qui s'y attachent (obligation d'information avant la formation du contrat) au travers de la qualité de non-professionnel, peut-elle être accordée à une entreprise ?

En France, il n'existait pas de définition légale du consommateur avant la loi dite « Hamon », loi n° 2014-344 du 17 mars 2014 relative à la consommation.

La loi a donc repris la définition de la jurisprudence : « un consommateur est alors une personne physique ou morale qui acquiert des biens de consommation ou qui a recours à une prestation de services pour son usage personnel ou celui de sa famille ».

Dans une transaction, le consommateur ou le non-professionnel se caractérise par une absence de compétences techniques, une méconnaissance des techniques de négociation et une ignorance des règles juridiques, qui le placent dans une situation de faiblesse dont on pourrait abuser. Le consommateur est donc défini par un usage non professionnel de ce qu'il a acheté.

La solution (proposition)

L'information est un moyen de rétablir l'équilibre entre le non-professionnel (ou le consommateur) et le professionnel.

Le législateur a donc créé une obligation d'information à la charge du professionnel portant sur le contenu des obligations des parties. L'objectif est de protéger le consentement du consommateur. Une obligation d'information sur les produits a pour but de protéger la santé et la sécurité du consommateur.

Peut-on considérer que la société Laudadaire avait les connaissances techniques, commerciales qui pourraient dès lors ne pas lui conférer la qualité de « non-professionnel » et écarter ainsi sa prétention ?

La réponse attendue ne peut être ferme avec si peu d'informations dans le cas. Aussi, il s'agit ici surtout de pouvoir poser une hypothèse (cette société pouvait savoir que gérer et animer un site internet était une activité en soit et donc coûteuse, ou alors au contraire plaider l'ignorance légitime). A partir de cette hypothèse, vous pouviez alors conclure en Droit.

II - VEILLE JURIDIQUE

« Comment une entreprise peut-elle se protéger contre le risque contractuel ? »

Vous répondrez à cette question dans un bref développement en illustrant vos propos par plusieurs exemples issus notamment de votre activité de veille juridique.

Les éléments de veille juridique – 2013 – portant sur le thème « l'entreprise et le » étaient relativement nombreux et variés entre la prise en compte de la protection des passagers du transport aérien (CJUE janvier 2013) et les lois n° 2013-504 dites de « sécurisation de l'emploi » le 14 juin ou n° 2013-316 du 16 avril dites des « lanceurs d'alerte » en matière d'environnement et de santé publique notamment.

En ce qui concernait la jurisprudence des juridictions nationales comme européennes :

- les arrêts de la cour de cassation ;
- respect de la clause de non-concurrence par le salarié (mars 2014) ;
- les deux arrêts portant sur l'application restrictive d'un contrat de gérance commerciale ou le vol de données personnelles et l'information qui est alors due aux consommateurs (juin) ;
- la sanction d'un service de santé pour avoir utilisé un produit défectueux (juillet) ;
- utilisation d'internet par un salarié qui grève la performance économique de l'entreprise (décembre).

L'introduction pouvait tout à fait reprendre après une définition des termes et une mise en perspective de ceux-ci (relation complexe de l'entreprise par rapport à la notion de prise) et ouvrir cette problématique à partir du rapport d'activité de la CNIL (http://www.cnil.fr/fileadmin/documents/La_CNIL/publications/Dossier_de_presse_rapport_d_activite_2013.pdf) qui portait très largement sur la relation employeur/employés-consommateurs et sur le risque d'utilisation des données personnelles.

A partir de ces exemples, il était possible d'envisager une répartition de ces éléments selon une distinction « le risque contractuel s'anticipe pour être limité notamment en droit du travail – clause de non-concurrence, utilisation de différents contrats en fonction de l'activité économique » / « la limitation du risque reste contrainte pour ne pas empêcher la sanction du risque que l'entreprise peut faire courir aux parties prenantes ».

Le thème invite à étudier comment l'entreprise peut prendre en compte le risque à la fois comme contrainte dans son activité (l'anticiper, le limiter, le dédommager s'il engage sa responsabilité) et d'envisager que les entreprises peuvent voir leur prise en compte du risque contrainte par la nécessité de ne pas déséquilibrer les relations sociales et économiques (Loi de sécurisation de l'emploi qui surtaxe les CDD de moins de 3 mois pour favoriser un emploi à durée indéterminé au profit des salariés).

MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 HEURES.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

L'épreuve est constituée de quatre exercices indépendants.

SUJET

- La probabilité d'un événement G est notée $P(G)$.

EXERCICE 1

Soit a un réel strictement positif et f la fonction définie sur \mathbb{R} à valeurs réelles telle que :

$$f(t) = \begin{cases} 2e^{-2(t-a)} & \text{si } t \geq a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1.a) Soit B un réel supérieur ou égal à a . Calculer l'intégrale $\int_a^B 2e^{-2(t-a)} dt$.

b) En déduire la valeur de l'intégrale $\int_a^{+\infty} 2e^{-2(t-a)} dt$.

2. Montrer que f peut être considérée comme une densité de probabilité.

Dans la suite, on note X une variable aléatoire admettant f comme densité.

3. Montrer que la fonction de répartition F_X de X est donnée par : $F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-2(x-a)} & \text{si } x \geq a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

4. On note Y la variable aléatoire définie par : $Y = X - a$.

a) Déterminer la fonction de répartition F_Y de Y .

b) En déduire que Y suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

c) Donner la valeur de l'espérance de Y .

d) En déduire que X admet une espérance et donner sa valeur.

EXERCICE 2

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$, et pour tout n de \mathbb{N}^* , $u_n = \int_0^1 (\ln(1+t))^n dt$.

1. On note g la fonction définie sur \mathbb{R}_+ à valeurs réelles telle que : pour tout $t \geq 0$, $g(t) = (1+t)\ln(1+t) - t$.
 - a) On note g' la fonction dérivée de g . Calculer $g'(t)$ pour tout réel $t \geq 0$.
 - b) En déduire la valeur de u_1 .
2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0, 1]$ à valeurs réelles telle que : $f(t) = \ln(1+t)$.
 - a) On note f' et f'' respectivement, les dérivées première et seconde de f .
Calculer pour tout réel t de $[0, 1]$, $f'(t)$ et $f''(t)$.
 - b) Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0, 1]$ et tracer la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé (on donne : $\ln 2 \simeq 0,7$).
 - c) Montrer que la fonction f est concave sur $[0, 1]$.
- 3.a) Justifier pour tout réel t de $[0, 1]$, l'encadrement suivant : $0 \leq \ln(1+t) \leq \ln 2$.
 - b) Montrer que pour tout n de \mathbb{N}^* , on a : $0 \leq u_n \leq (\ln 2)^n$.
 - c) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et a pour limite 0.
- 4.a) À l'aide d'une intégration par parties, établir pour tout entier naturel n , la relation suivante :

$$u_{n+1} = 2(\ln 2)^{n+1} - (n+1)u_n.$$

(On pourra remarquer qu'une primitive de la fonction $t \mapsto 1$ est $t \mapsto 1+t$)

- b) En déduire que pour tout entier naturel n , on a : $(n+1)u_n \leq 2(\ln 2)^{n+1}$.
- c) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
- d) En utilisant la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, montrer que pour tout n de \mathbb{N} , on a : $(n+2)u_n \geq 2(\ln 2)^{n+1}$.
- e) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{nu_n}{2(\ln 2)^{n+1}}$.

EXERCICE 3

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}_+ à valeurs réelles telle que : pour tout $x \geq 0$, $f(x) = \frac{2x+1}{x+2}$.

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$, et pour tout n de \mathbb{N} , $u_{n+1} = f(u_n)$.

- 1.a) On note f' la fonction dérivée de f . Calculer pour tout réel $x \geq 0$, $f'(x)$.
 - b) Dresser le tableau de variation de f en précisant les limites aux bornes de l'ensemble de définition.
Placer les réels 1 et $f(1)$ dans ce tableau.
- 2.a) Montrer que pour tout entier naturel n , le réel u_n appartient à l'intervalle $[0, 1]$.
 - b) Établir pour tout réel x de $[0, 1]$, l'inégalité suivante : $|f'(x)| \leq \frac{3}{4}$.
 - c) En déduire que pour tout entier naturel n , on a : $|u_{n+1} - 1| \leq \frac{3}{4}|u_n - 1|$.
 - d) Établir pour tout entier naturel n , l'inégalité suivante : $|u_n - 1| \leq \frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$.
 - e) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et donner sa limite.

3. Soit A , J et I les matrices d'ordre 2 suivantes : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que $J^2 = 2J$.

b) Établir pour tout entier naturel n , la relation suivante : $A^n = I + \frac{1}{2}(3^n - 1)J$ (on rappelle que $A^0 = I$).

c) Donner sous forme matricielle, l'expression de A^n en fonction de n .

4. On note $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les deux suites définies par :

$$p_0 = 1, q_0 = 2, \text{ et pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \begin{cases} p_{n+1} = 2p_n + q_n \\ q_{n+1} = p_n + 2q_n \end{cases}$$

On considère pour tout n de \mathbb{N} , la matrice à deux lignes et une colonne X_n définie par : $X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$.

a) Établir par récurrence que pour tout n de \mathbb{N} , on a : $X_n = A^n X_0$.

b) En déduire l'expression de X_n en fonction de n et donner les valeurs de p_n et de q_n en fonction de n .

5.a) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir pour tout entier naturel n , l'égalité : $u_n = \frac{p_n}{q_n}$.

b) Donner l'expression de u_n en fonction de n et retrouver la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

EXERCICE 4

Une puce se déplace à chaque unité de temps sur les quatre sommets, numérotés 1, 2, 3 et 4, d'un carré selon le protocole suivant :

- À l'instant 0, la puce se trouve sur le sommet 1.
- Si à l'instant n ($n \geq 0$) la puce se trouve sur le sommet 1, elle sera à l'instant $n + 1$ sur le sommet 1 avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et sur le sommet 3 avec la probabilité $\frac{1}{3}$.
- Si à l'instant n ($n \geq 1$) la puce se trouve sur le sommet 2, elle sera à l'instant $n + 1$ sur le sommet 1 avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et sur le sommet 3 avec la probabilité $\frac{1}{2}$.
- Si à l'instant n ($n \geq 1$) la puce se trouve sur le sommet 3, elle sera à l'instant $n + 1$ sur le sommet 2 avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et sur le sommet 4 avec la probabilité $\frac{1}{2}$.
- Si à l'instant n ($n \geq 1$) la puce se trouve sur le sommet 4, elle sera à l'instant $n + 1$ sur le sommet 2 avec la probabilité $\frac{1}{3}$ et sur le sommet 4 avec la probabilité $\frac{2}{3}$.

Pour tout entier naturel n , on note X_n la variable aléatoire égale au numéro du sommet occupé par la puce à l'instant n et on a donc $P(\{X_0 = 1\}) = 1$.

1.a) Déterminer la loi de X_1 .

b) Calculer l'espérance et la variance de X_1 .

2. Déterminer la loi de X_2 .

3.a) En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a :

$$P(\{X_{n+1} = 1\}) = \frac{2}{3}P(\{X_n = 1\}) + \frac{1}{2}P(\{X_n = 2\}).$$

b) Exprimer de même, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $P(\{X_{n+1} = 2\})$, $P(\{X_{n+1} = 3\})$, $P(\{X_{n+1} = 4\})$ en fonction de $P(\{X_n = 1\})$, $P(\{X_n = 2\})$, $P(\{X_n = 3\})$ et $P(\{X_n = 4\})$.

c) Vérifier que les relations précédentes sont encore valables pour $n = 1$ et $n = 0$.

d) Que vaut pour tout n de \mathbb{N} , la somme : $P(\{X_n = 1\}) + P(\{X_n = 2\}) + P(\{X_n = 3\}) + P(\{X_n = 4\})$?

4. On pose $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et pour tout n de \mathbb{N} , on note U_n la matrice à trois lignes et une colonne définie par :

$$U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \\ P(X_n = 3) \end{pmatrix}.$$

De plus, on pose : $A = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

En utilisant les relations trouvées précédemment, établir pour tout n de \mathbb{N} , la relation : $U_{n+1} = AU_n + B$.

5.a) Déterminer une matrice L à trois lignes et une colonne vérifiant : $L = AL + B$.

b) Établir pour tout entier naturel n , la relation suivante : $U_n = A^n(U_0 - L) + L$.

6. On pose $C = 6A$. Soit R , D et Q les matrices d'ordre 3 définies par :

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } Q = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -5 \\ -2 & -4 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Calculer RQ . En déduire que R est inversible et donner R^{-1} , où R^{-1} désigne la matrice inverse de la matrice R .

b) Calculer $CR - RD$.

c) En déduire pour tout entier naturel n , la relation suivante : $A^n = \left(\frac{1}{6}\right)^n RD^n R^{-1}$.

7. On admet que la limite de la matrice U_n lorsque n tend vers $+\infty$, est une matrice U dont les coefficients sont obtenus en prenant la limite des coefficients de U_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Déterminer U et préciser $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = 4)$.

CORRIGÉ

Par Bernard Delacampagne, professeur de mathématiques au lycée Madeleine-Michelis, à Amiens.

EXERCICE 1

1.a. B étant un réel supérieur ou égal à a, on a :

$$\int_a^B 2e^{-2(t-a)} dt = \left[-e^{-2(t-a)} \right]_a^B = 1 - e^{-2(B-a)}$$

b. On déduit de la question 1.a que :

$$\lim_{B \rightarrow +\infty} \int_a^B 2e^{-2(t-a)} dt = \lim_{B \rightarrow +\infty} (1 - e^{-2(B-a)}) = 1$$

Car :

$$\lim_{B \rightarrow +\infty} (-2(B-a)) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

Il en résulte que l'intégrale $\int_a^{+\infty} 2e^{-2(t-a)} dt$ converge et vaut :

$$\int_a^{+\infty} 2e^{-2(t-a)} dt = \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_a^B 2e^{-2(t-a)} dt = 1$$

2. f est continue sur $] -\infty, a[$ comme fonction constante nulle, et sur $[a, +\infty[$ comme produit, différence et composée de fonctions continues.

f admet des limites finies à gauche et à droite en a, car :

$$\lim_{t \rightarrow a^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow a^-} 0 = 0 \text{ et } \lim_{t \rightarrow a^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow a^+} 2e^{-2(t-a)} = 2$$

Donc f est continue par morceaux sur \mathbb{R} .

f est positive ou nulle sur \mathbb{R} car :

$$f(t) = \begin{cases} 2e^{-2(t-a)} > 0 & \text{si } t \geq a \\ 0 \geq 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Puisque $\int_{-\infty}^a f(t) dt = \int_{-\infty}^a 0 dt = 0$ et que $\int_a^{+\infty} f(t) dt = 1$ d'après la question 1.b, l'intégrale

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ converge et vaut :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^a f(t) dt + \int_a^{+\infty} f(t) dt = 1$$

Donc f peut être considérée comme une densité de probabilité.

3. Par définition de la fonction de répartition F_X de X, on a, pour tout réel x :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

Il vient donc, pour tout réel x strictement négatif :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$$

Et, pour tout réel x positif ou nul :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x 2e^{-2(t-a)} dt = 0 + \left[-e^{-2(t-a)} \right]_a^x = 1 - e^{-2(x-a)}$$

Ainsi a-t-on montré que :

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - 2e^{-2(x-a)} & \text{si } x \geq a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

4.a. On a, pour tout réel x :

$$F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(X - a \leq x) = P(X \leq x + a) = F_X(x + a)$$

On a :

$$x + a \geq a \Leftrightarrow x \geq 0$$

Il en résulte, en utilisant la fonction de répartition F_X de X obtenue à la question 3, que :

$$F_Y(x) = \begin{cases} 1 - 2e^{-(x+a-a)} = 1 - 2e^{-2x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

b. En posant $\lambda = 2$, la fonction de répartition F_Y de Y se présente sous la forme :

$$\begin{cases} F_Y(x) = 0 & \text{si } x < 0 \\ F_Y(x) = 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

On en déduit que **Y suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 2$** .

c. L'espérance de Y est donc :

$$E(Y) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2}$$

d. Puisque Y admet une espérance, et que $X = Y + a$, **X admet une espérance** et on a, par linéarité de l'espérance :

$$E(X) = E(Y + a) = E(Y) + a = \frac{1}{2} + a$$

EXERCICE 2

1.a. On a, pour tout réel t de \mathbb{R}_+ :

$$g'(t) = \ln(1+t) + (1+t) \cdot \frac{1}{1+t} - 1 = \ln(1+t) + 1 - 1 = \ln(1+t)$$

b. D'après la question 1.a, g est une primitive sur \mathbb{R}_+ de la fonction $t \mapsto \ln(1+t)$, donc :

$$u_1 = \int_0^1 \ln(1+t) dt = [g(t)]_0^1 = g(1) - g(0) = 2\ln 2 - 1$$

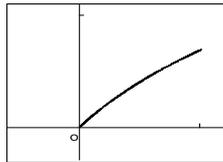
2.a. On a, pour tout réel t de $[0,1]$:

$$f'(t) = \frac{1}{1+t} \text{ et } f''(t) = -\frac{1}{(1+t)^2}$$

b. **f est (strictement) croissante sur $[0,1]$** , car on a, pour tout réel t de $[0,1]$:

$$f'(t) = \frac{1}{1+t} > 0$$

La courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé est la suivante :



c. **f est concave sur $[0,1]$** car on a, pour tout réel t de $[0,1]$:

$$f''(t) = -\frac{1}{(1+t)^2} < 0$$

3.a. f étant croissante sur $[0,1]$, on a :

$$0 \leq t \leq 1 \Rightarrow f \Rightarrow f(0) \leq f(t) \leq f(1) \Leftrightarrow 0 \leq \ln(1+t) \leq \ln 2$$

On a donc, **pour tout réel t de $[0,1]$** , l'encadrement suivant :

$$0 \leq \ln(1+t) \leq \ln 2$$

b. On déduit de l'encadrement obtenu à la question 3.a que, pour tout réel t de $[0,1]$ et pour tout entier naturel n , on a :

$$0 \leq (\ln(1+t))^n \leq (\ln 2)^n$$

D'après les inégalités de la moyenne, il vient, pour tout entier naturel n :

$$(1-0)0 \leq \int_0^1 (\ln(1+t))^n dt \leq (1-0)(\ln 2)^n$$

Ainsi a-t-on montré que, **pour tout entier naturel n** :

$$0 \leq u_n \leq (\ln 2)^n$$

c. Puisque $-1 < \ln 2 < 1$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\ln 2)^n = 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} 0$$

L'encadrement de la question 3.b et le théorème des gendarmes assurent que **la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et a pour limite 0**.

4.a. Par définition de u_n , on a, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \int_0^1 (\ln(1+t))^{n+1} dt$$

Calculons u_{n+1} à l'aide d'une intégration par parties, en posant, pour tout réel t de $[0,1]$:

$$\begin{aligned} u(t) &= (\ln(1+t))^{n+1} & u'(t) &= (n+1) \frac{(\ln(1+t))^n}{1+t} \\ v'(t) &= 1 & v(t) &= 1+t \end{aligned}$$

u , v , u' et v' étant continues sur $[0,1]$, il vient, pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \int_0^1 (\ln(1+t))^{n+1} dt = \left[(1+t)(\ln(1+t))^{n+1} \right]_0^1 - \int_0^1 (n+1) \frac{(\ln(1+t))^n}{1+t} (1+t) dt \\ &= 2(\ln 2)^{n+1} - (n+1) \int_0^1 (\ln(1+t))^n dt = 2(\ln 2)^{n+1} - (n+1)u_n \end{aligned}$$

Ainsi a-t-on, **pour tout entier naturel n** :

$$u_{n+1} = 2(\ln 2)^{n+1} - (n+1)u_n$$

b. On déduit de la question 3.b que, pour tout entier naturel n , on a :

$$u_{n+1} \geq 0$$

On a alors, d'après la question 4.a, les équivalences :

$$u_{n+1} \geq 0 \Leftrightarrow 2(\ln 2)^{n+1} - (n+1)u_n \geq 0 \Leftrightarrow 2(\ln 2)^{n+1} \geq (n+1)u_n$$

Ainsi a-t-on montré que, **pour tout entier naturel n** , on a :

$$(n+1)u_n \leq 2(\ln 2)^{n+1}$$

c. Par définition de u_n et linéarité de l'intégrale, on a, pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \int_0^1 (\ln(1+t))^{n+1} dt - \int_0^1 (\ln(1+t))^n dt = \int_0^1 \left((\ln(1+t))^{n+1} - (\ln(1+t))^n \right) dt \\ &= \int_0^1 (\ln(1+t) - 1) (\ln(1+t))^n dt \end{aligned}$$

On a vu à la question 3.b que, pour tout réel t de $[0,1]$ et tout entier naturel n , on a :

$$(\ln(1+t))^n \geq 0$$

On a également :

$$t \leq 1 \Rightarrow 1+t \leq 2 \Rightarrow 1+t \leq e \Rightarrow \ln(1+t) \leq 1 \Rightarrow \ln(1+t) - 1 \leq 0$$

Donc, pour tout réel t de $[0,1]$ et tout entier naturel n , il vient :

$$(\ln(1+t) - 1) (\ln(1+t))^n \leq 0$$

Par négativité de l'intégrale d'une fonction négative sur un segment, il en résulte que, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} - u_n \leq 0$$

Donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

d. Puisque la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, on a, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} - u_n \leq 0$$

On a alors, d'après la question 4.a, les équivalences :

$$u_{n+1} - u_n \leq 0 \Leftrightarrow 2(\ln 2)^{n+1} - (n+1)u_n - u_n \leq 0 \Leftrightarrow 2(\ln 2)^{n+1} \leq (n+2)u_n$$

On a donc montré que, **pour tout entier naturel n** :

$$(n+2)u_n \geq 2(\ln 2)^{n+1}$$

e. D'après les questions 4.b et 4.d, on a, pour tout entier naturel n , l'encadrement :

$$\frac{2(\ln 2)^{n+1}}{n+2} \leq u_n \leq \frac{2(\ln 2)^{n+1}}{n+1}$$

Il en résulte, pour tout entier naturel n , l'encadrement :

$$\frac{n}{n+2} \leq \frac{nu_n}{2(\ln 2)^{n+1}} \leq \frac{n}{n+1}$$

On a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n'}{n'+2} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n'}{n'+1} = 1$$

Ces deux limites, l'encadrement précédent et le théorème des gendarmes assurent que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{nu_n}{2(\ln 2)^{n+1}} = 1$$

EXERCICE 3

1.a. On a, pour tout réel positif ou nul x :

$$f'(x) = \frac{2(x+2) - (2x+1)}{(x+2)^2} = \frac{3}{(x+2)^2}$$

b. D'après la question 1.a, on a, pour tout réel positif ou nul x :

$$f'(x) = \frac{3}{(x+2)^2} > 0$$

On a :

$$f(0) = \frac{1}{2} \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}} = 2$$

D'où le tableau des variations de f , en y plaçant les réels 1 et $f(1)$:

| | | | |
|------|---------------|---|-----------|
| x | 0 | 1 | $+\infty$ |
| f' | | + | |
| f | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2 |

2.a. Montrons par récurrence la propriété P_n , définie pour tout entier naturel n , par :

$$0 \leq u_n \leq 1$$

Initialisation :

P_0 est vraie car on a :

$$0 \leq u_0 = \frac{1}{2} \leq 1$$

Hérédité :

On suppose P_n vraie, pour une valeur de l'entier naturel n , c'est-à-dire :

$$0 \leq u_n \leq 1$$

On montre que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire :

$$0 \leq u_{n+1} \leq 1$$

On a, d'après l'hypothèse de récurrence et puisque f est croissante sur \mathbb{R}_+ :

$$0 \leq u_n \leq 1 \Rightarrow f(0) \leq u_{n+1} = f(u_n) \leq f(1)$$

Puisque $f(0) = \frac{1}{2} \geq 0$ et $f(1) = 1$, il vient :

$$0 \leq u_{n+1} \leq 1$$

Ceci assure que P_{n+1} est vraie.

D'après le principe de récurrence, on peut conclure que, **pour tout entier naturel n , le réel u_n appartient à l'intervalle $[0,1]$** .

b. D'après la question 1.a, on sait que, pour tout réel x de $[0,1]$:

$$|f'(x)| = \left| \frac{3}{(x+2)^2} \right| = \frac{3}{(x+2)^2}$$

On a :

$$x \geq 0 \Rightarrow x+2 \geq 2 \Rightarrow (x+2)^2 \geq 4 \Rightarrow \frac{1}{(x+2)^2} \leq \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{3}{(x+2)^2} \leq \frac{3}{4}$$

Ainsi a-t-on, **pour tout réel x de $[0,1]$** , l'inégalité suivante :

$$|f'(x)| \leq \frac{3}{4}$$

c. f est dérivable sur $[0,1]$, et d'après la question 2.b, on a, pour tout réel x de $[0,1]$:

$$|f'(x)| \leq \frac{3}{4}$$

De plus, d'après la question 2.a, u_n appartient à $[0,1]$, donc, d'après l'inégalité des accroissements finis, on a, pour tout entier naturel n :

$$|f(u_n) - f(1)| \leq \frac{3}{4}|u_n - 1|$$

Puisque $f(u_n) = u_{n+1}$ et que $f(1) = 1$, il vient, **pour tout entier naturel n** :

$$|u_{n+1} - 1| \leq \frac{3}{4}|u_n - 1|$$

d. Montrons par récurrence la propriété P_n , définie pour tout entier naturel n , par :

$$|u_n - 1| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

Initialisation :

P_0 est vraie car on a :

$$|u_0 - 1| = \left| \frac{1}{2} - 1 \right| = \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4}\right)^0$$

Hérédité :

On suppose P_n vraie, pour une valeur de l'entier naturel n , c'est-à-dire :

$$|u_n - 1| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

On montre que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire :

$$|u_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$$

On a, d'après l'hypothèse de récurrence et la question 2.c :

$$|u_{n+1} - 1| \leq \frac{3}{4}|u_n - 1| \leq \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$$

Ceci assure que P_{n+1} est vraie.

D'après le principe de récurrence, on peut conclure que, **pour tout entier naturel n** , on a :

$$|u_n - 1| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

e. Puisque $-1 < \frac{3}{4} < 1$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$$

Cette limite, l'inégalité de la question 2.d, ainsi que le théorème des gendarmes, assurent que **la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente** et que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$$

3.a. Les calculs donnent :

$$J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 1+1 \\ 1+1 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2J$$

b. La relation peut s'établir en utilisant la formule du binôme de Newton, ou par récurrence. Montrons par récurrence la propriété P_n , définie pour tout entier naturel n , par :

$$A^n = I + \frac{1}{2}(3^n - 1)J$$

Initialisation :

P_0 est vraie car on a :

$$I + \frac{1}{2}(3^0 - 1)J = I + 0J = I = A^0$$

Hérédité :

On suppose P_n vraie, pour une valeur de l'entier naturel n , c'est-à-dire :

$$A^n = I + \frac{1}{2}(3^n - 1)J$$

On montre que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire :

$$A^{n+1} = I + \frac{1}{2}(3^{n+1} - 1)J$$

On a, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$A^{n+1} = A^n A = \left(I + \frac{1}{2}(3^n - 1)J \right) (I + J) = I + \frac{1}{2}(3^n - 1)J + J + \frac{1}{2}(3^n - 1)J^2$$

Puisque, d'après la question 3.a, $J^2 = 2J$, il vient :

$$A^{n+1} = I + \frac{1}{2}(3^n - 1)J + J + (3^n - 1)J = I + \left(\frac{1}{2}(3^n - 1) + 1 + (3^n - 1) \right) J = I + \left(\frac{3}{2} \cdot 3^n - \frac{1}{2} \right) J$$

Soit, après simplification :

$$A^{n+1} = I + \frac{1}{2}(3^{n+1} - 1)J$$

Ceci assure que P_{n+1} est vraie.

D'après le principe de récurrence, on peut conclure que, **pour tout entier naturel n** , on a :

$$A^n = I + \frac{1}{2}(3^n - 1)J$$

c. D'après la question 3.a, on a, pour tout entier naturel n :

$$A^n = I + \frac{1}{2}(3^n - 1)J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(3^n - 1) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(3^n - 1) + 1 & \frac{1}{2}(3^n - 1) \\ \frac{1}{2}(3^n - 1) & \frac{1}{2}(3^n - 1) + 1 \end{pmatrix}$$

Après simplification, il vient donc, **pour tout entier naturel n** :

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(3^n + 1) & \frac{1}{2}(3^n - 1) \\ \frac{1}{2}(3^n - 1) & \frac{1}{2}(3^n + 1) \end{pmatrix}$$

4.a. Montrons par récurrence la propriété P_n , définie pour tout entier naturel n , par :

$$X_n = A^n X_0$$

Initialisation :

P_0 est vraie car on a :

$$A^0 X_0 = IX_0 = X_0$$

Hérédité :

On suppose P_n vraie, pour une valeur de l'entier naturel n , c'est-à-dire :

$$X_n = A^n X_0$$

On montre que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire :

$$X_{n+1} = A^{n+1} X_0$$

On a, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2p_n + q_n \\ p_n + 2q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = AX_n = AA^n X_0 = A^{n+1} X_0$$

Ceci assure que P_{n+1} est vraie.

D'après le principe de récurrence, on peut conclure que, **pour tout entier naturel n** , on a :

$$X_n = A^n X_0$$

b. D'après les questions 4.a et 3.c, on a, pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = X_n = A^n X_0 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(3^n + 1) & \frac{1}{2}(3^n - 1) \\ \frac{1}{2}(3^n - 1) & \frac{1}{2}(3^n + 1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(3^n + 1) + 3^n - 1 \\ \frac{1}{2}(3^n - 1) + 3^n + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \cdot 3^n - \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \cdot 3^n + \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(3^{n+1} - 1) \\ \frac{1}{2}(3^{n+1} + 1) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On a donc, **pour tout entier naturel n** :

$$p_n = \frac{1}{2}(3^{n+1} - 1) \text{ et } q_n = \frac{1}{2}(3^{n+1} + 1)$$

5.a. Montrons par récurrence la propriété P_n , définie pour tout entier naturel n , par :

$$u_n = \frac{p_n}{q_n}$$

Initialisation :

P_0 est vraie car on a :

$$\frac{p_0}{q_0} = \frac{1}{2} = u_0$$

Hérédité :

On suppose P_n vraie, pour une valeur de l'entier naturel n , c'est-à-dire :

$$u_n = \frac{p_n}{q_n}$$

On montre que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire :

$$u_{n+1} = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$$

On a, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$u_{n+1} = f(u_n) = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2} = \frac{2 \frac{p_n}{q_n} + 1}{\frac{p_n}{q_n} + 2} = \frac{2p_n + q_n}{p_n + 2q_n} = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$$

Ceci assure que P_{n+1} est vraie.

D'après le principe de récurrence, on peut conclure que, **pour tout entier naturel n**, on a :

$$u_n = \frac{p_n}{q_n}$$

b. Il résulte des questions 5.a et 4.b qu'on a, **pour tout entier naturel n** :

$$u_n = \frac{p_n}{q_n} = \frac{\frac{1}{2}(3^{n+1} - 1)}{\frac{1}{2}(3^{n+1} + 1)} = \frac{3^{n+1} - 1}{3^{n+1} + 1}$$

Il vient donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{n+1} - 1}{3^{n+1} + 1} = 1$$

Car :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^{n+1} = +\infty \text{ (car } 3 > 1) \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1$$

Ainsi a-t-on **retrouvé la limite de la suite** $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, obtenue à la question 2.e.

EXERCICE 4

1.a. La puce se trouvant sur le sommet 1 à l'instant 0, elle sera à l'instant 1 sur le sommet 1 avec la probabilité $\frac{2}{3}$ ou sur le sommet 3 avec la probabilité $\frac{1}{3}$.

La loi de probabilité de X_1 est donc donnée par le tableau :

| | | |
|-------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| k | 1 | 3 |
| P([X₁ = k]) | $\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{3}$ |

b. L'espérance de X_1 est donc :

$$E(X_1) = \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 3 = \frac{5}{3}$$

On a :

$$E(X_1^2) = \frac{2}{3} \cdot 1^2 + \frac{1}{3} \cdot 3^2 = \frac{11}{3}$$

On en déduit, par la formule de Koenig-Huygens, que :

$$V(X_1) = E(X_1^2) - (E(X_1))^2 = \frac{11}{3} - \frac{25}{9} = \frac{8}{9}$$

2. Si la puce se trouve sur le sommet 1 à l'instant 1, elle sera à l'instant 2 sur le sommet 1 avec la probabilité $\frac{2}{3}$ ou sur le sommet 3 avec la probabilité $\frac{1}{3}$; si elle se trouve sur le

sommet 3 à l'instant 1, elle sera à l'instant 2 sur le sommet 2 avec la probabilité $\frac{1}{2}$ ou sur le sommet 4 avec la probabilité $\frac{1}{2}$.

On a donc :

$$\begin{aligned}
 P([X_2 = 1]) &= P([X_2 = 1] \cap [X_1 = 1]) = P([X_1 = 1])P_{[X_1=1]}([X_2 = 1]) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9} \\
 P([X_2 = 2]) &= P([X_2 = 2] \cap [X_1 = 3]) = P([X_1 = 3])P_{[X_1=3]}([X_2 = 2]) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \\
 P([X_2 = 3]) &= P([X_2 = 3] \cap [X_1 = 1]) = P([X_1 = 1])P_{[X_1=1]}([X_2 = 3]) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9} \\
 P([X_2 = 4]) &= P([X_2 = 4] \cap [X_1 = 3]) = P([X_1 = 3])P_{[X_1=3]}([X_2 = 4]) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

La loi de probabilité de X_2 est donc donnée par le tableau :

| | | | | |
|-------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| k | 1 | 2 | 3 | 4 |
| P([X₂ = k]) | $\frac{4}{9}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{2}{9}$ | $\frac{1}{6}$ |

3.a. En appliquant la formule des probabilités totales au système complet d'événements $\{[X_n = 1], [X_n = 2], [X_n = 3], [X_n = 4]\}$, on obtient, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 :

$$P([X_{n+1} = 1]) = \sum_{k=1}^4 P([X_n = k] \cap [X_{n+1} = 1]) = \sum_{k=1}^4 P([X_n = k])P_{[X_n=k]}([X_{n+1} = 1])$$

D'après les hypothèses de l'énoncé, on a :

$$P_{[X_n=1]}([X_{n+1} = 1]) = \frac{2}{3}, P_{[X_n=2]}([X_{n+1} = 1]) = \frac{1}{2} \text{ et } P_{[X_n=3]}([X_{n+1} = 1]) = P_{[X_n=4]}([X_{n+1} = 1]) = 0$$

On a donc, **pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 :**

$$P([X_{n+1} = 1]) = \frac{2}{3}P([X_n = 1]) + \frac{1}{2}P([X_n = 2])$$

b. On obtient de même, **pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 :**

$$P([X_{n+1} = 2]) = \sum_{k=1}^4 P([X_n = k])P_{[X_n=k]}([X_{n+1} = 2]) = \frac{1}{2}P([X_n = 3]) + \frac{1}{3}P([X_n = 4])$$

$$P([X_{n+1} = 3]) = \sum_{k=1}^4 P([X_n = k])P_{[X_n=k]}([X_{n+1} = 3]) = \frac{1}{3}P([X_n = 1]) + \frac{1}{2}P([X_n = 2])$$

$$P([X_{n+1} = 4]) = \sum_{k=1}^4 P([X_n = k])P_{[X_n=k]}([X_{n+1} = 4]) = \frac{1}{2}P([X_n = 3]) + \frac{2}{3}P([X_n = 4])$$

c. Puisque la puce se trouve sur le sommet 1 à l'instant 0, on a :

$$P([X_0 = 1]) = 1 \text{ et } P([X_0 = 2]) = P([X_0 = 3]) = P([X_0 = 4]) = 0$$

Donc il vient, d'après la question 1.a :

$$\frac{2}{3}P([X_0 = 1]) + \frac{1}{2}P([X_0 = 2]) = \frac{2}{3} = P([X_1 = 1])$$

$$\frac{1}{2}P([X_0 = 3]) + \frac{1}{3}P([X_0 = 4]) = 0 = P([X_1 = 2])$$

$$\frac{1}{3}P([X_0 = 1]) + \frac{1}{2}P([X_0 = 2]) = \frac{1}{3} = P([X_1 = 3])$$

$$\frac{1}{2}P([X_0 = 3]) + \frac{2}{3}P([X_0 = 4]) = 0 = P([X_1 = 4])$$

D'après les questions 1.a et 2, il vient :

$$\frac{2}{3}P([X_1 = 1]) + \frac{1}{2}P([X_1 = 2]) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9} = P([X_2 = 1])$$

$$\frac{1}{2}P([X_1 = 3]) + \frac{1}{3}P([X_1 = 4]) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} = P([X_2 = 2])$$

$$\frac{1}{3}P([X_1 = 1]) + \frac{1}{2}P([X_1 = 2]) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9} = P([X_2 = 3])$$

$$\frac{1}{2}P([X_1 = 3]) + \frac{2}{3}P([X_1 = 4]) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} = P([X_2 = 4])$$

Ainsi les relations précédentes sont-elles encore valables pour $n = 1$ et $n = 0$.

d. Puisque $\{[X_n = 1], [X_n = 2], [X_n = 3], [X_n = 4]\}$ est un système complet d'événements, on

a, pour tout entier naturel n :

$$P([X_n = 1]) + P([X_n = 2]) + P([X_n = 3]) + P([X_n = 4]) = 1$$

4. D'après la question 3.c, on a, pour tout entier naturel n :

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} P([X_{n+1} = 1]) \\ P([X_{n+1} = 2]) \\ P([X_{n+1} = 3]) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}P([X_n = 1]) + \frac{1}{2}P([X_n = 2]) \\ \frac{1}{2}P([X_n = 3]) + \frac{1}{3}P([X_n = 4]) \\ \frac{1}{3}P([X_n = 1]) + \frac{1}{2}P([X_n = 2]) \end{pmatrix}$$

D'après la question 3.d, on a, pour tout entier naturel n :

$$P([X_n = 4]) = 1 - P([X_n = 1]) - P([X_n = 2]) - P([X_n = 3])$$

Il vient donc, pour tout entier naturel n :

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}P([X_n = 1]) + \frac{1}{2}P([X_n = 2]) \\ -\frac{1}{3}P([X_n = 1]) - \frac{1}{3}P([X_n = 2]) + \frac{1}{6}P([X_n = 3]) + \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3}P([X_n = 1]) + \frac{1}{2}P([X_n = 2]) \end{pmatrix}$$

Soit encore :

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P([X_n = 1]) \\ P([X_n = 2]) \\ P([X_n = 3]) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} U_n + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = AU_n + B$$

On a bien établi, pour tout entier naturel n , la relation :

$$U_{n+1} = AU_n + B$$

5.a. L étant une matrice à trois lignes et une colonne, posons :

$$L = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

On a les équivalences :

$$L = AL + B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{6}(4x + 3y) \\ y = \frac{1}{6}(-2x - 2y + z) + \frac{1}{3} \\ z = \frac{1}{6}(2x + 3y) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 0 & (L_1) \\ 2x + 8y - z = 2 & (L_2) \\ 2x + 3y - 6z = 0 & (L_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 0 & (L_1) \\ 11y - z = 2 & (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\ 6y - 6z = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2}y & (L_1) \\ 10y = 2 & (L_2) \\ y = z & (L_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{10} \\ y = z = \frac{1}{5} \end{cases}$$

Une matrice L à trois lignes et une colonne vérifiant $L = AL + B$ est donc :

$$L = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b. Montrons par récurrence la propriété P_n , définie pour tout entier naturel n , par :

$$U_n = A^n (U_0 - L) + L$$

Initialisation :

P_0 est vraie car on a :

$$A^0 (U_0 - L) + L = I(U_0 - L) + L = U_0 - L + L = U_0$$

Hérédité :

On suppose P_n vraie, pour une valeur de l'entier naturel n , c'est-à-dire :

$$U_n = A^n (U_0 - L) + L$$

On montre que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire :

$$U_{n+1} = A^{n+1} (U_0 - L) + L$$

On a, d'après la question 4, l'hypothèse de récurrence et la question 5.b :

$$U_{n+1} = AU_n + B = A(A^n (U_0 - L) + L) + B = A^{n+1} (U_0 - L) + AL + B = A^{n+1} (U_0 - L) + L$$

Ceci assure que P_{n+1} est vraie.

D'après le principe de récurrence, on peut conclure que, **pour tout entier naturel n**, on a :

$$U_n = A^n (U_0 - L) + L$$

6.a. Le calcul donne, en notant I la matrice identité d'ordre trois :

$$RQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -5 & -5 \\ -2 & -4 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} = 10I$$

Cette égalité peut encore s'écrire :

$$R \left(\frac{1}{10} Q \right) = I$$

Ceci prouve que **R est inversible** et que :

$$R^{-1} = \frac{1}{10} Q$$

b. En notant 0 la matrice carrée nulle d'ordre 3, le calcul donne :

$$\begin{aligned} CR - RD = 6AR - RD &= \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 9 \\ -1 & 4 & -3 \\ -1 & -4 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 & 9 \\ -1 & 4 & -3 \\ -1 & -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

Ainsi a-t-on :

$$CR - RD = 0$$

c. D'après la question 6.b, on a les équivalences :

$$CR - RD = 0 \Leftrightarrow CR = RD \Leftrightarrow 6AR = RD \Leftrightarrow A = \frac{1}{6} RDR^{-1}$$

Montrons alors par récurrence la propriété P_n , définie pour tout entier naturel n, par :

$$A^n = \left(\frac{1}{6} \right)^n RD^n R^{-1}$$

Initialisation :

P_0 est vraie car on a :

$$\left(\frac{1}{6} \right)^0 RD^0 R^{-1} = RIR^{-1} = RR^{-1} = I = A^0$$

Hérédité :

On suppose P_n vraie, pour une valeur de l'entier naturel n, c'est-à-dire :

$$A^n = \left(\frac{1}{6} \right)^n RD^n R^{-1}$$

On montre que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire :

$$A^{n+1} = \left(\frac{1}{6} \right)^{n+1} RD^{n+1} R^{-1}$$

On a, d'après l'hypothèse de récurrence et le début de cette question :

$$A^{n+1} = A^n A = \left(\frac{1}{6} \right)^n RD^n R^{-1} \frac{1}{6} RDR^{-1} = \left(\frac{1}{6} \right)^{n+1} RD^{n+1} R^{-1}$$

Ceci assure que P_{n+1} est vraie.

D'après le principe de récurrence, on peut conclure que, **pour tout entier naturel n**, on a :

$$A^n = \left(\frac{1}{6}\right)^n RD^nR^{-1}$$

7. D'après les questions 5.b et 6.c, il vient, pour tout entier naturel n :

$$U_n = A^n (U_0 - L) + L = \left(\frac{1}{6}\right)^n RD^nR^{-1} (U_0 - L) + L$$

Puisque D est une matrice diagonale, on a, pour tout entier naturel n :

$$\left(\frac{1}{6}\right)^n D^n = \left(\frac{1}{6}\right)^n \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{6}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{3}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}$$

Puisque $-1 < \frac{1}{6} < 1$, $-1 < -\frac{1}{3} < 1$ et $-1 < \frac{1}{2} < 1$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^n = 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

Il vient donc, puisqu'on admet que la limite de la matrice U_n lorsque n tend vers $+\infty$ est une matrice U dont les coefficients sont obtenus en prenant la limite des coefficients de U_n lorsque n tend vers $+\infty$:

$$U = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = R \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^n D^n \right) R^{-1} (U_0 - L) + L = R0R^{-1} (U_0 - L) + L = L = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Par définition de U_n , il en résulte que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P([X_n = 1]) = \frac{3}{10} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} P([X_n = 2]) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P([X_n = 1]) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

D'après la question 3.d, on a, pour tout entier naturel n :

$$P([X_n = 4]) = 1 - P([X_n = 1]) - P([X_n = 2]) - P([X_n = 3])$$

Il vient donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P([X_n = 4]) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - P([X_n = 1]) - P([X_n = 2]) - P([X_n = 3])) = 1 - \frac{3}{10} - \frac{1}{5} - \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$$

MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 HEURES.

Il n'est fait usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

S U J E T

Exercice 1

On considère les matrices $N = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \\ 9 & 6 & 7 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $M = \frac{1}{20}N$.

On pose : $A = N - 4I$ et $B = N - 12I$.

- Vérifier que $AB = BA = 0$. En déduire que : $NA = 12A$ et que $NB = 4B$.
- On considère les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par $a_0 = \frac{1}{8}$, $b_0 = -\frac{1}{8}$ et les relations :

$$a_{n+1} = 12a_n \quad \text{et} \quad b_{n+1} = 4b_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

- Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , on a : $N^n = a_n A + b_n B$.
- Quel est le type des suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

Déterminer, pour tout entier naturel n , des expressions de a_n et de b_n en fonction de n .

- Montrer que : $M^n = \frac{1}{8} \left(\frac{3}{5}\right)^n A - \frac{1}{8} \left(\frac{1}{5}\right)^n B$ pour tout entier naturel n .

- Un particulier a acheté une poule. La poule pond chaque semaine entre 0 et 3 œufs. Si une semaine donnée, la poule ne pond pas d'œuf, son propriétaire décide de la manger à la fin de la semaine (elle ne pondra donc plus d'œufs les semaines suivantes). On note pour tout entier n non nul,

- U_n l'événement « la poule est vivante lors de la n -ème semaine et pond un œuf » ;
- D_n l'événement « la poule est vivante lors de la n -ème semaine et pond deux œufs » ;
- T_n l'événement « la poule est vivante lors de la n -ème semaine et pond trois œufs ».

On note u_n , d_n et t_n leurs probabilités respectives. On suppose que la première semaine la poule pond un œuf puis que pour tout entier n non nul, on a :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{7}{20}u_n + \frac{1}{10}d_n + \frac{1}{20}t_n \\ d_{n+1} = \frac{3}{20}u_n + \frac{3}{10}d_n + \frac{1}{20}t_n \\ t_{n+1} = \frac{9}{20}u_n + \frac{3}{10}d_n + \frac{7}{20}t_n \end{cases}$$

On note X_n la matrice $\begin{pmatrix} u_n \\ d_n \\ t_n \end{pmatrix}$.

- a) Justifier que : $X_{n+1} = MX_n$, pour tout entier $n \geq 1$.
 b) Montrer que : $X_n = M^{n-1}X_1$, pour tout entier $n \geq 1$.
 c) En déduire que pour tout $n \geq 1$:

$$u_n = \frac{3}{8} \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} + \frac{5}{8} \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} ; d_n = \frac{3}{8} \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \frac{3}{8} \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \quad \text{et} \quad t_n = \frac{9}{8} \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \frac{9}{8} \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$

- d) Que représente le nombre $1 - (u_n + d_n + t_n)$?

- e) Vérifier que pour tout entier $n \geq 1$ on a : $u_n + 2d_n + 3t_n = \frac{9}{2} \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \frac{7}{2} \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$.

Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} (u_n + 2d_n + 3t_n)$ converge et calculer sa valeur. Que représente ce nombre ?

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x - 2 + e^{-x}$. On nomme \mathcal{C} sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

1. a) Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Montrer que la courbe \mathcal{C} admet en $+\infty$ une droite asymptote \mathcal{D} d'équation $y = x - 2$.

- b) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ puis $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$. Que pouvez-vous dire sur le comportement asymptotique de la courbe de f en $-\infty$?

2. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x . Dresser le tableau des variations de f en y faisant figurer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$.
 3. Justifier que \mathcal{C} coupe l'axe des abscisses en exactement deux points d'abscisses α et β , le premier étant positif, le deuxième étant négatif.

On donne $e \simeq 2,7$. Prouver que $\alpha \in]1, 2[$.

4. Tracer l'allure de \mathcal{C} et \mathcal{D} . On donne $\alpha \simeq 1,84$ et $\beta \simeq -1,14$.

5. On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = 2 - e^{-x}$ et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = g(u_n)$ pour tout entier naturel n .

- a) Montrer que pour tout réel x , on a : $g(x) = x$ si et seulement si $f(x) = 0$.

- b) Calculer la dérivée de g . En déduire le sens de variation de g .

Montrer alors que $1 \leq u_n \leq 2$ pour tout entier naturel n .

- c) Etablir que pour tout réel x appartenant à $[1, 2]$: $0 \leq g'(x) \leq \frac{1}{e}$.

- d) En déduire, en appliquant l'inégalité des accroissements finis que : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{e} |u_n - \alpha|$ pour tout entier naturel n .

- e) Montrer par récurrence que : $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{e^n}$ pour tout entier naturel n . Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice 3

Un immeuble est constitué de 3 étages. Dans le hall de l'immeuble on peut accéder à un ascenseur qui distribue chaque étage. 5 personnes montent ensemble dans l'ascenseur. On suppose que chacune d'elle souhaite monter à l'un des trois étages de manière équiprobable et indépendamment des 4 autres. On suppose également que l'ascenseur dessert les étages demandés dans l'ordre et qu'il ne revient pas en arrière.

On note X_1 la variable aléatoire égale au nombre de personnes s'arrêtant à l'étage numéro 1, X_2 la variable aléatoire égale au nombre de personnes s'arrêtant à l'étage numéro 2 et X_3 celle égale au nombre de personnes s'arrêtant à l'étage numéro 3.

1. a) Reconnaître la loi de X_1 . Décrire l'ensemble $X_1(\Omega)$ des valeurs prises par X_1 . Donner $P(X_1 = k)$ pour chaque k appartenant à $X_1(\Omega)$.
 b) Donner $E(X_1)$ et $V(X_1)$.
 c) Expliquer pourquoi X_2 et X_3 suivent la même loi que X_1 .
2. a) Justifier que $X_1 + X_2 + X_3 = 5$.
 b) En déduire la probabilité $P((X_1 = 0) \cap (X_2 = 0))$.

c) Montrer que la probabilité que l'ascenseur ne s'arrête qu'une fois est $\frac{1}{81}$.

3. On considère la variable aléatoire Z égale au nombre d'arrêts de l'ascenseur. D'après 2.c) on a $P(Z = 1) = \frac{1}{81}$.

Déterminer l'ensemble $Z(\Omega)$ des valeurs prises par Z .

4. Soit Y_1 la variable aléatoire de Bernoulli égale à 1 si l'ascenseur s'arrête au premier étage et à 0 sinon. On définit de même les variables aléatoires Y_2 et Y_3 pour les étages 2 et 3.
 - a) Justifier que $P(Y_1 = 0) = P(X_1 = 0)$.
 - b) En déduire $P(Y_1 = 1)$ puis $E(Y_1)$.
 On admet que Y_2 et Y_3 suivent la même loi que Y_1 et qu'elles ont donc la même espérance.
 - c) Exprimer Z en fonction de Y_1, Y_2 et Y_3 . Calculer $E(Z)$ et vérifier que $E(Z) = \frac{211}{81}$.

Exercice 4

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On considère la fonction f_n définie sur \mathbb{R} par :

$$f_n(t) = (n+1)(n+2)t^n(1-t) \text{ si } t \in [0, 1] \text{ et } f_n(t) = 0 \text{ sinon}$$

1. a) Vérifier que f_n est continue sur \mathbb{R} .
- b) Calculer $\int_0^1 t^n(1-t)dt$.
- c) En déduire que f_n est une densité de probabilité.

Dans la suite de l'exercice on utilisera les fonctions f_n pour $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$.

2. Madame A doit se rendre de Paris à Londres en train. Le haut-parleur de la gare annonce pour son train un retard de moins d'une heure. On admet que la variable aléatoire X égale à la durée (en heures) du retard admet pour densité de probabilité la fonction f_1 . C'est-à-dire :

$$f_1(t) = 6t(1-t) \text{ si } t \in [0, 1] \text{ et } f_1(t) = 0 \text{ sinon}$$

Soit F_1 la fonction de répartition de X .

- a) Déterminer l'expression de $F_1(x)$ lorsque $x < 0$ puis lorsque $x > 1$. Justifier que pour tout $x \in [0, 1]$, $F_1(x) = 3x^2 - 2x^3$.
 - b) Quelle est la probabilité que le train ait moins d'une demi-heure de retard ?
 - c) Quelle est la probabilité que le train ait un retard compris entre un quart d'heure et une demi-heure ?
 - d) Le haut-parleur annonce que l'on sait que le retard sera inférieur à une demi-heure. Quelle est la probabilité qu'il soit supérieur à un quart d'heure ?
3. a) Vérifier que $tf_1(t) = \frac{1}{2}f_2(t)$ pour tout réel t . En déduire l'espérance de X .
 - b) Exprimer $t^2f_1(t)$ en fonction de $f_3(t)$ pour tout réel t . En déduire $E(X^2)$ puis $V(X)$.
4. Une fois que le train arrive à Paris, il continue à prendre du retard sur le chemin entre Paris et Londres. On nomme Y la variable aléatoire égale au retard en heures pris par le train durant ce trajet. On suppose que Y admet pour densité la fonction g définie sur \mathbb{R} par :

$$g(t) = \frac{3}{4}e^{-\frac{3}{4}t} \text{ si } t \in [0, +\infty[\text{ et } g(t) = 0 \text{ sinon}$$

- a) De quelle loi usuelle reconnaissez-vous une densité ? Calculer $E(Y)$.
- b) Soit Z le retard total que cumule le train en arrivant à Londres. Exprimer Z en fonction de X et de Y . En déduire la durée moyenne en heures du retard de Mme A lors de son arrivée à Londres.

CORRIGÉ

Par Bernard Delacampagne, professeur de mathématiques au lycée Madeleine-Michelis, à Amiens.

Exercice 1

1. Les calculs donnent successivement :

$$A = N - 4I = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \\ 9 & 6 & 7 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \\ 9 & 6 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B = N - 12I = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \\ 9 & 6 & 7 \end{pmatrix} - 12 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \\ 9 & 6 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 3 & -6 & 1 \\ 9 & 6 & -5 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 3 & -6 & 1 \\ 9 & 6 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15+6+9 & 6-12+6 & 3+2-5 \\ -15+6+9 & 6-12+6 & 3+2-5 \\ -45+18+27 & 18-36+18 & 9+6-15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 3 & -6 & 1 \\ 9 & 6 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15+6+9 & -10+4+6 & -5+2+3 \\ 9-18+9 & 6-12+6 & 3-6+3 \\ 27+18-45 & 18+12-30 & 9+6-15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi a-t-on :

$$AB = BA = \mathbf{0}$$

On a les équivalences :

$$BA = 0 \Leftrightarrow (N - 12I)A = 0 \Leftrightarrow NA - 12A = 0 \Leftrightarrow NA = 12A$$

$$AB = 0 \Leftrightarrow (N - 4I)B = 0 \Leftrightarrow NB - 4B = 0 \Leftrightarrow NB = 4B$$

Ainsi a-t-on :

$$NA = 12A \text{ et } NB = 4B$$

2.a. Montrons alors par récurrence la propriété P_n , définie pour tout entier naturel n , par :

$$N^n = a_n A + b_n B$$

Initialisation :

P_0 est vraie car on a :

$$a_0 A + b_0 B = \frac{1}{8} A - \frac{1}{8} B = \frac{1}{8} (N - 4I) - \frac{1}{8} (N - 12I) = \frac{1}{8} N - \frac{1}{2} I - \frac{1}{8} N + \frac{3}{2} I = I = I = N^0$$

Hérédité :

On suppose P_n vraie, pour une valeur de l'entier naturel n , c'est-à-dire :

$$N^n = a_n A + b_n B$$

On montre que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire :

$$N^{n+1} = a_{n+1} A + b_{n+1} B$$

On a, d'après l'hypothèse de récurrence, la question 1 et la définition des suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et

$(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$N^{n+1} = NN^n = N(a_n A + b_n B) = a_n NA + b_n NB = 12a_n A + 4b_n B = a_{n+1} A + b_{n+1} B$$

Ceci assure que P_{n+1} est vraie.

D'après le principe de récurrence, on peut conclure que, **pour tout entier naturel n** , on a :

$$N^n = a_n A + b_n B$$

b. Les égalités $a_{n+1} = 12a_n$ et $b_{n+1} = 2b_n$, valables pour tout entier naturel n , assurent que les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont des suites géométriques de raisons respectives $q_a = 12$ et $q_b = 4$.

Il en résulte qu'on a, pour tout entier naturel n :

$$a_n = a_0 q_a^n = \frac{1}{8} \cdot 12^n \text{ et } b_n = b_0 q_b^n = -\frac{1}{8} \cdot 4^n$$

c. Par définition de M , et d'après les questions 2.a et 2.b, on a, pour tout entier naturel n :

$$M^n = \frac{1}{20^n} N^n = \frac{1}{20^n} (a_n A + b_n B) = \frac{1}{20^n} \left(\frac{1}{8} \cdot 12^n A - \frac{1}{8} \cdot 4^n B \right) = \frac{1}{8} \left(\frac{12}{20} \right)^n A - \frac{1}{8} \left(\frac{4}{20} \right)^n B$$

Ainsi a-t-on, après simplification, pour tout entier naturel n :

$$M^n = \frac{1}{8} \left(\frac{3}{5} \right)^n A - \frac{1}{8} \left(\frac{1}{5} \right)^n B$$

3.a. Pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ d_{n+1} \\ t_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{20}u_n + \frac{1}{10}d_n + \frac{1}{20}t_n \\ \frac{3}{20}u_n + \frac{3}{10}d_n + \frac{1}{20}t_n \\ \frac{9}{20}u_n + \frac{3}{10}d_n + \frac{7}{20}t_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{20} & \frac{1}{10} & \frac{1}{20} \\ \frac{3}{20} & \frac{3}{10} & \frac{1}{20} \\ \frac{9}{20} & \frac{3}{10} & \frac{7}{20} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ d_n \\ t_n \end{pmatrix} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \\ 9 & 6 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ d_n \\ t_n \end{pmatrix} = M X_n$$

b. Montrons par récurrence la propriété P_n , définie pour tout entier naturel n non nul, par :

$$X_n = M^{n-1} X_1$$

Initialisation :

P_1 est vraie car on a :

$$M^{-1} X_1 = M^0 X_1 = I X_1 = X_1$$

Hérédité :

On suppose P_n vraie, pour une valeur de l'entier naturel n non nul, c'est-à-dire :

$$X_n = M^{n-1} X_1$$

On montre que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire :

$$X_{n+1} = M^n X_1$$

On a, d'après l'hypothèse de récurrence et la question 3.a :

$$X_{n+1} = M X_n = M M^{n-1} X_1 = M^n X_1$$

Ceci assure que P_{n+1} est vraie.

D'après le principe de récurrence, on peut conclure que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$X_n = M^{n-1} X_1$$

c. On a, par définition de X_n , et puisque la poule pond un œuf la première semaine :

$$X_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ d_1 \\ t_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

D'après les questions 3.a et 2.c, on a, pour tout entier naturel n non nul :

$$X_n = M^{n-1}X_1 = \left(\frac{1}{8} \left(\frac{3}{5} \right)^{n-1} A - \frac{1}{8} \left(\frac{1}{5} \right)^{n-1} B \right) X_1$$

Donc, pour tout entier naturel n non nul, X_n est la première colonne de la matrice

$$\frac{1}{8} \left(\frac{3}{5} \right)^{n-1} A - \frac{1}{8} \left(\frac{1}{5} \right)^{n-1} B, \text{ soit :}$$

$$X_n = \frac{1}{8} \left(\frac{3}{5} \right)^{n-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} - \frac{1}{8} \left(\frac{1}{5} \right)^{n-1} \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \left(\frac{3}{5} \right)^{n-1} + \frac{5}{8} \left(\frac{1}{5} \right)^{n-1} \\ \frac{3}{8} \left(\frac{3}{5} \right)^{n-1} - \frac{3}{8} \left(\frac{1}{5} \right)^{n-1} \\ \frac{9}{8} \left(\frac{3}{5} \right)^{n-1} - \frac{9}{8} \left(\frac{1}{5} \right)^{n-1} \end{pmatrix}$$

Ainsi a-t-on, pour tout entier naturel n non nul :

$$u_n = \frac{3}{8} \left(\frac{3}{5} \right)^{n-1} + \frac{5}{8} \left(\frac{1}{5} \right)^{n-1}, d_n = \frac{3}{8} \left(\frac{3}{5} \right)^{n-1} - \frac{3}{8} \left(\frac{1}{5} \right)^{n-1} \text{ et } t_n = \frac{9}{8} \left(\frac{3}{5} \right)^{n-1} - \frac{9}{8} \left(\frac{1}{5} \right)^{n-1}$$

d. $1 - (u_n + d_n + t_n)$ est la probabilité de l'événement contraire de l'événement « la poule est vivante et pond au moins un œuf la n -ième semaine ». C'est encore la probabilité que la poule ait été mangée avant la n -ième semaine ou qu'elle n'ait pas pondu d'œuf la n -ième semaine. Autrement dit, $1 - (u_n + d_n + t_n)$ est la probabilité que la poule ait été mangée avant le début de la $(n+1)$ -ème semaine.

e. D'après la question 3.c, on a, pour tout entier naturel n non nul :

$$\begin{aligned} u_n + 2d_n + 3t_n &= \frac{3}{8} \left(\frac{3}{5} \right)^{n-1} + \frac{5}{8} \left(\frac{1}{5} \right)^{n-1} + 2 \left(\frac{3}{8} \left(\frac{3}{5} \right)^{n-1} - \frac{3}{8} \left(\frac{1}{5} \right)^{n-1} \right) + 3 \left(\frac{9}{8} \left(\frac{3}{5} \right)^{n-1} - \frac{9}{8} \left(\frac{1}{5} \right)^{n-1} \right) \\ &= \left(\frac{3}{8} + \frac{6}{8} + \frac{27}{8} \right) \left(\frac{3}{5} \right)^{n-1} + \left(\frac{5}{8} - \frac{6}{8} - \frac{27}{8} \right) \left(\frac{1}{5} \right)^{n-1} = \frac{36}{8} \left(\frac{3}{5} \right)^{n-1} - \frac{28}{8} \left(\frac{1}{5} \right)^{n-1} \end{aligned}$$

Ainsi a-t-on, après simplification, pour tout entier naturel n non nul :

$$u_n + 2d_n + 3t_n = \frac{9}{2} \left(\frac{3}{5} \right)^{n-1} - \frac{7}{2} \left(\frac{1}{5} \right)^{n-1}$$

Sous réserve de convergence, on a, d'après ce qui précède et par linéarité :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (u_n + 2d_n + 3t_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{9}{2} \left(\frac{3}{5} \right)^{n-1} - \frac{7}{2} \left(\frac{1}{5} \right)^{n-1} \right) = \frac{9}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{5} \right)^{n-1} - \frac{7}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{5} \right)^{n-1}$$

Il vient donc, après changement d'indice :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (u_n + 2d_n + 3t_n) = \frac{9}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{5} \right)^n - \frac{7}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{5} \right)^n$$

Les séries $\sum_{n=0} \left(\frac{3}{5} \right)^n$ et $\sum_{n=0} \left(\frac{1}{5} \right)^n$ sont des séries géométriques de raisons respectives $x_1 = \frac{3}{5}$

et $x_2 = \frac{1}{5}$; puisque $-1 < x_1 < 1$ et $-1 < x_2 < 1$, ces deux séries sont convergentes et leur somme vaut :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = \frac{1}{1-x_1} = \frac{1}{1-\frac{3}{5}} = \frac{5}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = \frac{1}{1-x_2} = \frac{1}{1-\frac{1}{5}} = \frac{5}{4}$$

Il en résulte que la série $\sum_{n \geq 0} (u_n + 2d_n + 3t_n)$ converge et que sa somme vaut :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (u_n + 2d_n + 3t_n) = \frac{9}{2} \cdot \frac{5}{2} - \frac{7}{2} \cdot \frac{5}{4} = \frac{45}{4} - \frac{35}{8} = \frac{55}{8}$$

Ce nombre est le nombre d'œuf que l'on peut espérer obtenir avant de manger la poule.

Exercice 2

1.a. On a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2 + e^{-x}) = +\infty$$

Car :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$$

On a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x - 2)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2 + e^{-x} - x + 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$$

Donc la courbe C admet pour asymptote au voisinage de $+\infty$ la droite D d'équation $y = x - 2$.

b. On a :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 2 + e^{-x}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x \left(1 - \frac{e^{-x}}{-x} \right) - 2 \right) = +\infty$$

Car :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{-x} = +\infty$$

Puisque :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad (\text{limite remarquable du cours})$$

On a :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(1 - \frac{e^{-x}}{-x} \right) - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{e^{-x}}{-x} - \frac{2}{x} \right) = -\infty$$

Car :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{-x} = +\infty \quad (\text{vu ci-dessus}) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} = 0$$

Donc la courbe C admet au voisinage de $-\infty$ une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des ordonnées.

2. On a, pour tout réel x :

$$f'(x) = 1 - e^{-x}$$

Il vient :

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - e^{-x} > 0 \Leftrightarrow e^{-x} < 1 \Leftrightarrow -x < 0 \Leftrightarrow x > 0$$

D'où le tableau des variations de f :

| | | | |
|----|-----------|----|-----------|
| x | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
| f' | - | 0 | + |
| f | $+\infty$ | -1 | $+\infty$ |

3. f est continue (comme somme et composée de fonctions qui le sont) et strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$, donc f réalise une bijection de $]-\infty, 0]$ sur $f(]-\infty, 0]) = [f(0), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)[= [-1, +\infty[$; puisque 0 appartient à $f(]-\infty, 0])$, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique β dans $]-\infty, 0]$.

De même, f est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$, donc f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $f([0, +\infty[) = [f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[= [-1, +\infty[$; puisque 0 appartient à $f([0, +\infty[)$, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[0, +\infty[$.

Donc C coupe l'axe des abscisses en exactement deux points d'abscisses α et β , le premier étant positif, le deuxième étant négatif.

On a :

$$f(1) = -1 + e^{-1} = -1 + \frac{1}{e} < 0 \text{ (car } e > 1) \text{ et } f(2) = e^{-2} > 0$$

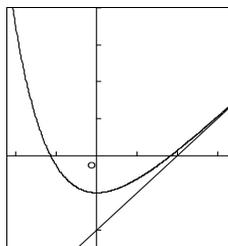
Puisque f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, il vient :

$$f(1) < f(\alpha) = 0 < f(2) \Rightarrow 1 < \alpha < 2$$

Il a bien été montré que :

$$\alpha \in]1, 2[$$

4. L'allure de C et D est donnée sur la figure ci-dessous :



5.a. On a les équivalences :

$$g(x) = x \Leftrightarrow 2 - e^{-x} = x \Leftrightarrow x - 2 + e^{-x} = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$$

Ainsi :

$$g(x) = x \text{ si et seulement si } f(x) = 0$$

b. On a, pour tout réel x :

$$g'(x) = e^{-x}$$

Donc g est (strictement) croissante sur \mathbb{R} , puisque, pour tout réel x , on a :

$$g'(x) > 0$$

Montrons par récurrence la propriété P_n , définie pour tout entier naturel n , par :

$$1 \leq u_n \leq 2$$

Initialisation :

P_0 est vraie car on a :

$$1 \leq u_0 = 1 \leq 2$$

Hérédité :

On suppose P_n vraie, pour une valeur de l'entier naturel n , c'est-à-dire :

$$1 \leq u_n \leq 2$$

On montre que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire :

$$1 \leq u_{n+1} \leq 2$$

On a, d'après l'hypothèse de récurrence et puisque g est croissante sur \mathbb{R} :

$$1 \leq u_n \leq 2 \Rightarrow g(1) \leq u_{n+1} = g(u_n) \leq g(2)$$

Or :

$$g(1) = 2 - e^{-1} = 2 - \frac{1}{e} \geq 1 \quad (\text{car } e \geq 1) \quad \text{et} \quad g(2) = 2 - e^{-2} \leq 2$$

Donc

$$1 \leq u_{n+1} \leq 2$$

Ceci assure que P_{n+1} est vraie.

D'après le principe de récurrence, on peut conclure que, **pour tout entier naturel n** , on a :

$$1 \leq u_n \leq 2$$

c. On a vu à la question 5.b que, pour tout réel x :

$$g'(x) > 0$$

Par ailleurs, on a :

$$x \geq 1 \Rightarrow -x \leq -1 \Rightarrow e^{-x} \leq e^{-1}$$

Ainsi a-t-on, **pour tout réel x appartenant à $[1, 2]$** :

$$0 \leq g'(x) \leq \frac{1}{e}$$

d. g est dérivable sur $[1, 2]$, et d'après la question 5.c, on a, pour tout réel x de $[1, 2]$:

$$|g'(x)| \leq \frac{1}{e}$$

De plus, d'après les questions 5.b et 3, u_n et α appartiennent à $[1, 2]$, donc, d'après l'inégalité des accroissements finis, on a, pour tout entier naturel n :

$$|g(u_n) - g(\alpha)| \leq \frac{1}{e} |u_n - \alpha|$$

Puisque $u_{n+1} = g(u_n)$ et que $g(\alpha) = \alpha$ (conséquence de la question 5.a et de l'égalité $f(\alpha) = 0$), il vient, **pour tout entier naturel n** :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{e} |u_n - \alpha|$$

e. Montrons par récurrence la propriété P_n , définie pour tout entier naturel n , par :

$$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{e^n}$$

Initialisation :

P_0 est vraie car, d'après la question 3, α appartient à $[1, 2]$, donc on a :

$$|u_0 - \alpha| = |1 - \alpha| \leq 1 = \frac{1}{e^0}$$

Hérédité :

On suppose P_n vraie, pour une valeur de l'entier naturel n , c'est-à-dire :

$$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{e^n}$$

On montre que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{e^{n+1}}$$

On a, d'après l'hypothèse de récurrence et la question 5.d :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{e} |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{e^n} = \frac{1}{e^{n+1}}$$

Ceci assure que P_{n+1} est vraie.

D'après le principe de récurrence, on peut conclure que, **pour tout entier naturel n** , on a :

$$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{e^n}$$

Puisque $-1 < \frac{1}{e} < 1$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e} \right)^n = 0$$

La limite et l'inégalité précédentes, ainsi que le théorème des gendarmes, assurent que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$$

Exercice 3

1.a. X_1 est le nombre de réalisations de l'événement « une personne choisit le premier étage », de probabilité $p = \frac{1}{3}$, au cours de $n = 5$ choix identiques et indépendants, donc X_1

suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n = 5, p = \frac{1}{3}\right)$.

On a :

$$X_1(\Omega) = \llbracket 0, 5 \rrbracket$$

Et, pour tout entier naturel k de $\llbracket 0, 5 \rrbracket$:

$$P(X_1 = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{5-k} = \binom{5}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{5-k}$$

b. L'espérance et la variance de X_1 sont :

$$E(X_1) = np = \frac{5}{3} \text{ et } V(X_1) = np(1-p) = \frac{5}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{10}{9}$$

c. Les trois étages jouant un rôle analogue, X_2 et X_3 suivent la même loi que X_1 .

2.a. $X_1 + X_2 + X_3$ est le nombre de personnes montant dans l'ascenseur, donc :

$$X_1 + X_2 + X_3 = 5$$

b. Il résulte des questions 2.a et 1.a que :

$$P((X_1 = 0) \cap (X_2 = 0)) = P(X_3 = 5) = \binom{5}{5} \left(\frac{1}{3}\right)^5 \left(\frac{2}{3}\right)^0 = \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{243}$$

c. L'ascenseur ne s'arrête qu'une fois s'il s'arrête uniquement au premier étage, ou au deuxième, ou au troisième : la probabilité P cherchée est donc, par incompatibilité des événements $(X_1 = 5)$, $(X_2 = 5)$ et $(X_3 = 5)$:

$$P = P((X_1 = 5) \cup (X_2 = 5) \cup (X_3 = 5)) = P(X_1 = 5) + P(X_2 = 5) + P(X_3 = 5)$$

D'après les questions 1.c et 2.b, il vient :

$$P = 3P(X_3 = 5) = 3 \cdot \frac{1}{243} = \frac{1}{81}$$

3. Puisqu'il y a trois étages et que l'ascenseur ne revient pas en arrière, on a :

$$Z(\Omega) = \llbracket 1, 3 \rrbracket$$

4.a. $Y_1 = 0$ si l'ascenseur ne s'arrête pas au premier étage, c'est-à-dire si aucune personne ne s'arrête au premier étage ; on a donc :

$$P(Y_1 = 0) = P(X_1 = 0)$$

b. D'après les questions 4.a et 1.a, il vient :

$$P(Y_1 = 1) = 1 - P(Y_1 = 0) = 1 - P(X_1 = 0) = 1 - \binom{5}{0} \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^5 = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^5 = 1 - \frac{32}{243} = \frac{211}{243}$$

Y_1 étant la variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $p = P(Y_1 = 1) = \frac{211}{243}$, on a :

$$E(Y_1) = p = \frac{211}{243}$$

c. On a :

$$Z = Y_1 + Y_2 + Y_3$$

Par linéarité de l'espérance, et puisque Y_2 et Y_3 suivent la même loi que Y_1 , on a :

$$E(Z) = E(Y_1 + Y_2 + Y_3) = E(Y_1) + E(Y_2) + E(Y_3) = 3E(Y_1) = 3 \cdot \frac{211}{243} = \frac{211}{81}$$

Exercice 4

1.a. f_n est continue sur $]-\infty, 0[$ et $]1, +\infty[$ comme fonction constante nulle, et f_n est continue sur $[0, 1]$ comme produit et différence de fonctions continues.

Etant continue sur $[0, 1]$, f_n est continue à droite en 0 ; f_n est continue à gauche en 0, car :

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} f_n(t) = \lim_{t \rightarrow 0^-} 0 = 0 = f_n(0)$$

Donc f_n est continue en 0.

Etant continue sur $[0,1]$, f_n est continue à gauche en 1 ; f_n est continue à droite en 1, car :

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} f_n(t) = \lim_{t \rightarrow 1^+} 0 = 0 = f_n(1)$$

Donc f_n est continue en 1.

Ce qui précède assure que f_n est continue sur \mathbb{R} .

b. On a :

$$\int_0^1 t^n (1-t) dt = \int_0^1 (t^n - t^{n+1}) dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} - \frac{t^{n+2}}{n+2} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

c. D'après la question 1.a, f_n est continue sur \mathbb{R} .

f_n est nulle, donc positive ou nulle sur $]-\infty, 0[$ et $]1, +\infty[$; si t appartient à $[0,1]$, $t^n \geq 0$ et $1-t \geq 0$, donc f_n est positive ou nulle sur $[0,1]$

Donc f_n est positive ou nulle sur \mathbb{R} .

On a, grâce à la relation de Chasles, par linéarité et d'après la question 1.b :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t) dt &= \int_{-\infty}^0 f_n(t) dt + \int_0^1 f_n(t) dt + \int_1^{+\infty} f_n(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^1 (n+1)(n+2)t^n(1-t) dt + \int_1^{+\infty} 0 dt \\ &= 0 + (n+1)(n+2) \int_0^1 t^n(1-t) dt + 0 \\ &= (n+1)(n+2) \cdot \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 1 \end{aligned}$$

Donc f_n est une densité de probabilité.

2.a. Par définition de la fonction de répartition F_1 de X , on a, pour tout réel x :

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^x f_1(t) dt$$

On a donc, pour tout réel x de $]-\infty, 0[$:

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$$

Et, d'après le calcul de la question 1.c, pour tout réel x de $]1, +\infty[$:

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^x f_1(t) dt = \int_{-\infty}^1 f_1(t) dt + \int_1^{+\infty} 0 dt = 1 + 0 = 1$$

Enfin, pour tout réel x de $[0,1]$, on a :

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^x f_1(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x 6t(1-t) dt = 6 \int_0^x (t-t^2) dt = 6 \left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} \right]_0^x = 3x^2 - 2x^3$$

b. La probabilité que le train ait moins d'une demi-heure de retard est :

$$P\left(X \leq \frac{1}{2}\right) = F_1\left(\frac{1}{2}\right) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

c. La probabilité que le retard soit compris entre un quart d'heure et une demi-heure est :

$$P\left(\frac{1}{4} \leq X \leq \frac{1}{2}\right) = F_1\left(\frac{1}{2}\right) - F_1\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} - \left(3\left(\frac{1}{4}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{4}\right)^3\right) = \frac{1}{2} - \left(\frac{3}{16} - \frac{1}{32}\right) = \frac{1}{2} - \frac{5}{32} = \frac{11}{32}$$

d. Le haut-parleur annonce que l'on sait que le retard sera inférieur à une demi-heure. La

probabilité qu'il soit supérieur à un quart d'heure est :

$$P_{\left(X \leq \frac{1}{2}\right)}\left(X \geq \frac{1}{4}\right) = \frac{P\left(\left(X \geq \frac{1}{4}\right) \cap \left(X \leq \frac{1}{2}\right)\right)}{P\left(X \leq \frac{1}{2}\right)} = \frac{P\left(\frac{1}{4} \leq X \leq \frac{1}{2}\right)}{P\left(X \leq \frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{11}{32}}{\frac{1}{2}} = \frac{11}{16}$$

3.a. On a, pour tout réel t de $[0,1]$:

$$tf_1(t) = 6t^2(1-t) = \frac{1}{2} \cdot 12t^2(1-t) = \frac{1}{2}f_2(t)$$

L'égalité est vraie sur $\mathbb{R} \setminus [0,1]$ puisque $f_1(t) = f_2(t) = 0$.

Il a donc été montré que, **pour tout réel t** :

$$tf_1(t) = \frac{1}{2}f_2(t)$$

Par définition de l'espérance, et sous réserve d'existence, on a :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf_1(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}f_2(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t) dt$$

Puisque f_2 est une densité de probabilité d'après la question 1.c, $\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t) dt$ converge et vaut 1, donc $E(X)$ existe et on a :

$$E(X) = \frac{1}{2}$$

b. On a, pour tout réel t de $[0,1]$:

$$t^2f_1(t) = 6t^3(1-t) = \frac{6}{20} \cdot 20t^3(1-t) = \frac{3}{10}f_3(t)$$

L'égalité est vraie sur $\mathbb{R} \setminus [0,1]$ puisque $f_1(t) = f_3(t) = 0$.

Il a donc été montré que, **pour tout réel t** :

$$t^2f_1(t) = \frac{3}{10}f_3(t)$$

Par définition de l'espérance, et sous réserve d'existence, on a :

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2f_1(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3}{10}f_3(t) dt = \frac{3}{10} \int_{-\infty}^{+\infty} f_3(t) dt$$

Puisque f_3 est une densité de probabilité d'après la question 1.c, $\int_{-\infty}^{+\infty} f_3(t) dt$ converge et vaut 1, donc $E(X^2)$ existe et on a :

$$E(X^2) = \frac{3}{10}$$

La formule de Koenig-Huygens donne alors :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{3}{10} - \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$$

4.a. En posant $\lambda = \frac{3}{4}$, une densité g de Y se présente sous la forme :

$$\begin{cases} g(x) = 0 & \text{si } x < 0 \\ g(x) = \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

On reconnaît que **Y suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{3}{4}$** .

L'espérance de Y est donc :

$$E(Y) = \frac{1}{\lambda} = \frac{4}{3}$$

b. Le retard total Z que cumule le train en arrivant à Londres est la somme du retard X pris à Paris et du retard Y pris durant le trajet ; ainsi :

$$Z = X + Y$$

La durée moyenne en heures du retard de Mme A lors de son arrivée à Londres est l'espérance de Z ; par linéarité de l'espérance, il vient, d'après les questions 3.a et 4.a :

$$E(Z) = E(X + Y) = E(X) + E(Y) = \frac{1}{2} + \frac{4}{3} = \frac{11}{6}$$

Ainsi **la durée moyenne en heures du retard de Mme A lors de son arrivée à Londres est 1 heure et 50 minutes.**

© **GROUPE STUDYRAMA**

34/38, rue Camille-Pelletan - 92309 Levallois-Perret cedex
Imprimerie Maury - 12100 Millau
Imprimé en France - 4^e trimestre 2014

Service éditorial : Fanny Bouteiller, Marjorie
Champetier, Deborah Lopez,
Elodie Sebbah

Conception graphique : e-look

Dépôt légal à parution
ISBN 978-2-7590-3040-8

24 spécialisations et 8 doubles diplômes
175 universités partenaires dans 56 pays
200 projets associatifs dans un bâtiment dédié



Établissement d'enseignement
supérieur privé reconnu par l'État
22, bd du Fort de Vaux
75017 Paris
Tel : 01 40 53 99 99
Fax : 01 40 53 98 98

ISCparis.com

Distribution DILISCO
ISBN 978-2-7590-3040-8

11,90 e

