

Série **A**nnales

**ISC** PARIS  
BUSINESS SCHOOL

2015 > 2016

le monde  
change,  
soyez prêt

**ANNALES OFFICIELLES 2015**  
BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES  
CCIR CORRIGÉES





SÉRIE « ANNALES »

# ANNALES 2015 DE LA BANQUE D'ÉPREUVES COMMUNES CCIR

## SUJETS ET CORRIGÉS

**HEC**

---

**ESSEC**

---

**ESCP-EUROPE**

---

**E.M.LYON**

---

**EDHEC**

---

**ESC**

---

**IÉNA**

---

*Avec le soutien de l'ISC Paris*





# Le mot

## ESPACE PRÉPAS

Nous fêtons cette année la 21<sup>e</sup> édition des Annales de la Banque Commune d'Épreuves (BCE), publiée avec le soutien de l'ISC Paris. Un ouvrage de plus ajoutant du poids à la pile de ceux qui accompagnent les candidats aux concours d'entrée des Grandes Écoles de management ? Pas vraiment. N'en déplaise à ceux qui désespèrent de voir s'allonger la liste des titres de référence en même temps que diminue le nombre de jours jusqu'aux premières épreuves écrites ; ces annales sont incontournables. Elles vous servent à accomplir l'exercice le plus important de votre préparation : l'anticipation, la mise en condition.

Il est essentiel de très bien connaître le programme dans chaque matière, mais au moins aussi important de prendre connaissance des sujets tombés l'année dernière, voire les années précédentes encore, afin de vous familiariser aux formulations et aux contraintes de chaque épreuve, dont les professeurs ne manquent par ailleurs certainement pas de vous parler. Vous disposez ici d'un panel de sujets tombés en 2015 que nous avons voulu le plus représentatif possible de la diversité et de l'exigence du concours. Des épreuves communes et d'autres réservées aux candidats des voies scientifique, économique et technologique ; des matières variées ; des fournisseurs différents. Tous les corrigés sont réalisés par des professeurs de classes préparatoires qui ne manquent pas, lorsque cela est nécessaire, de commenter le sujet et leurs propositions de correction. Pour une immersion maximale dans la préparation au concours, doublée d'une prise de recul bienvenue.

Tout comme peut l'être le magazine *Espace Prépas* qui accompagne depuis 30 ans les préparateurs vers l'intégration dans les Grandes Écoles de management. Reportages sur les campus, décryptage des programmes et des stratégies d'écoles, zooms sur leurs spécificités, articles sur l'actualité de la filière (fusions, budgets, nouveaux statuts, etc.), dossiers d'histoire géographique et de culture générale, cartes de géopolitique, numéros « inscription » et SIGEM pour faciliter les choix, enquêtes sur l'avenir des prépas... Rien de ce que doit connaître un futur étudiant des meilleures *business schools* mondiales (revoyez le classement 2015 des *Masters in Management du Financial Times*) ne manque. Associée à la lecture de ce magazine et d'ouvrages complémentaires de préparation proposés par les éditions Studyama, l'étude des Annales de la Banque Commune d'Épreuves participe à une mise en train idéale pour la bonne conduite des épreuves écrites et avant de penser au tour de France des oraux...

**Stéphanie Ouezman,**  
Rédactrice en chef d'*Espace Prépas*.



# Sommaire

<b>LE MOT D'ESPACE PRÉPAS</b>	<b>3</b>
<b>COEFFICIENTS ET COOPTATION</b>	
<b>LES ÉPREUVES DU CONCOURS ISC PARIS 2016</b>	<b>7</b>
<b>PRÉSENTATION DE L'ISC PARIS</b>	<b>9</b>
<b>ÉPREUVES COMMUNES</b>	
<b>CULTURE GÉNÉRALE</b>	
<b>ÉPREUVE EDHEC-ESSEC</b>	<b>14</b>
<b>ÉPREUVE HEC</b>	<b>19</b>
<b>RÉSUMÉ DE TEXTE</b>	
<b>ÉPREUVE HEC</b>	<b>26</b>
<b>LANGUE VIVANTE 1</b>	
<b>ANGLAIS IÉNA</b>	<b>34</b>
<b>ANGLAIS CCIR</b>	<b>38</b>
<b>ALLEMAND IÉNA</b>	<b>43</b>
<b>ALLEMAND CCIR</b>	<b>47</b>
<b>ESPAGNOL IÉNA</b>	<b>53</b>
<b>ESPAGNOL CCIR</b>	<b>57</b>
<b>ITALIEN IÉNA</b>	<b>62</b>
<b>LANGUE VIVANTE 2</b>	
<b>ANGLAIS IÉNA</b>	<b>66</b>
<b>ANGLAIS CCIR</b>	<b>69</b>
<b>ALLEMAND IÉNA</b>	<b>74</b>
<b>ALLEMAND CCIR</b>	<b>77</b>
<b>ESPAGNOL IÉNA</b>	<b>81</b>
<b>ESPAGNOL CCIR</b>	<b>84</b>
<b>ITALIEN IÉNA</b>	<b>88</b>

## **OPTION SCIENTIFIQUE**

HISTOIRE, GÉOGRAPHIE ET GÉOPOLITIQUE  
DU MONDE CONTEMPORAIN

<b>ÉPREUVE ESCP-EUROPE</b>	<b>91</b>
<b>ÉPREUVE ESSEC</b>	<b>104</b>

MATHÉMATIQUES

<b>ÉPREUVE EM LYON</b>	<b>117</b>
<b>ÉPREUVE ESSEC</b>	<b>146</b>
<b>ÉPREUVE HEC</b>	<b>182</b>

MATHÉMATIQUES II

<b>ÉPREUVE HEC/ESCP EUROPE</b>	<b>224</b>
--------------------------------	------------

## **OPTION ÉCONOMIQUE**

ÉCONOMIE, SOCIOLOGIE ET HISTOIRE  
DU MONDE CONTEMPORAIN

<b>ÉPREUVE ESCP-EUROPE</b>	<b>240</b>
<b>ÉPREUVE HEC</b>	<b>255</b>

MATHÉMATIQUES

<b>ÉPREUVE EM LYON</b>	<b>261</b>
------------------------	------------

## **OPTION TECHNOLOGIQUE**

ÉCONOMIE

<b>ÉPREUVE ESC</b>	<b>277</b>
<b>ÉPREUVE ESSEC</b>	<b>290</b>

MANAGEMENT ET GESTION DE L'ENTREPRISE

<b>ÉPREUVE HEC</b>	<b>316</b>
--------------------	------------

DROIT

<b>ÉPREUVE ESC</b>	<b>346</b>
<b>ÉPREUVE ESSEC</b>	<b>356</b>

MATHÉMATIQUES

<b>ÉPREUVE ESCP-EUROPE</b>	<b>366</b>
<b>ÉPREUVE ESC</b>	<b>384</b>

RÉSUMÉ DE TEXTE

<b>ÉPREUVE ESC</b>	<b>398</b>
--------------------	------------

# ISC PARIS

[iscparis.com](http://iscparis.com)

**Préparez vos écrits et retrouvez gratuitement  
toutes les annales depuis 2006 sur notre site internet.**

LE MONDE CHANGE,  
SOYEZ PRÊTS



**LES ÉPREUVES ISC PARIS DU CONCOURS 2016**

**PRÉSENTATION DE L'ISC PARIS**

# ÉPREUVES ÉCRITES ET COEFFICIENTS ISC PARIS AUX CONCOURS 2016

<b>OPTION SCIENTIFIQUE</b>	<b>Concepteur</b>	<b>Coefficient</b>	<b>Durée</b>
Dissertation de culture générale	EM LYON	5	4h
Contraction de texte	HEC	3	3h
Mathématiques	EM LYON	4	4h
Langue vivante I	IÉNA	8	4h
Langue vivante II	IÉNA	5	3h
Histoire, géographie et géopolitique du monde contemporain	ESCP-Europe	5	4h

<b>OPTION ÉCONOMIQUE</b>	<b>Concepteur</b>	<b>Coefficient</b>	<b>Durée</b>
Dissertation de culture générale	EM LYON	4	4h
Contraction de texte	HEC	3	3h
Mathématiques	EM LYON	3	4h
Langue vivante I	IÉNA	7	4h
Langue vivante II	IÉNA	5	3h
Economie, sociologie et histoire du monde contemporain	ESCP-Europe	8	4h

<b>OPTION TECHNOLOGIQUE</b>	<b>Concepteur</b>	<b>Coefficient</b>	<b>Durée</b>
Dissertation de culture générale	ESC	3	4h
Résumé de texte	ESC	3	3h
Mathématiques	ESC	3	4h
Langue vivante I	IÉNA	4	4h
Langue vivante II	IÉNA	3	3h
Économie/ Droit	ESC	5	4h
Management et Gestion de l'entreprise	ESC	9	4h

<b>OPTION A/L UIm et ENS Lyon</b>	<b>Concepteur</b>	<b>Coefficient</b>	<b>Durée</b>
Contraction de texte	HEC	3	3h
Langue vivante I	IÉNA	7	4h
Langue vivante II	IÉNA	5	3h
Moyenne concours	ENS	15	

<b>OPTION B/L</b>	<b>Concepteur</b>	<b>Coefficient</b>	<b>Durée</b>
Contraction de texte	HEC	3	3h
Dissertation littéraire	ESSEC	5	4h
Dissertation philosophique	ESSEC	4	4h
Histoire ou géographie	ESCP-Europe	4	4h
Langue vivante I	IÉNA	5	4h
Langue vivante II	IÉNA	3	3h
Épreuve à options	ESSEC	6	4h



## LE MONDE CHANGE, SOYEZ PRÊTS

### INTERLOCUTEURS

Président du groupe :	Yves Hinnekint
Directeur Général :	Bruno Neil
Directeur Général adjoint / Académie et Recherche :	Sébastien Tran
Directeur des Entreprises Étudiantes :	Mathieu Millet
Directrice des Relations Entreprises :	Martine Verbrughe
Coordinatrice Communication :	Gabriéla Alvarez
Responsable de la promotion :	Lionel Theulier
Responsable du concours :	Emmy Youbi
Responsable des Relations Entreprises :	Claire Régnier

### INFORMATIONS GÉNÉRALES

#### *Principaux repères*

#### **Une formation académique, internationale et professionnelle sur 3 ans**

- Création : 1963 (association loi 1901) ;
- Situation : **Paris**, ville privilégiée pour l'emploi, les stages, les partenariats ;
- Reconnaissance par l'État : 1969, Diplôme visé à Bac+5 par le Ministère de l'Éducation Nationale et conférant le Grade de Master ;
- Membre de la Conférence des Grandes Écoles ;
- Membre du Chapitre des Écoles de Management ;
- Membre de l'AACSB ;
- Membre de l'EFMD (*European Foundation for Management Development*) ;
- Membre de l'UGEI (Union des Grandes Écoles Indépendantes) ;
- Membre de la FNEGE (Fondation Nationale pour l'Enseignement et la Gestion des Entreprises) ;
- Membre de l'EAIE (*European Association for International Education*) ;
- Membre de la NAFSA (*Association for International Educators*) ;
- Membre de Campus France.

#### *Quelques chiffres*

- **2400** étudiants ;
- **56** professeurs permanents et enseignants chercheurs et **300** professionnels d'entreprises ;
- **20** spécialisations dont **6** doubles diplômes en 3<sup>e</sup> année ;

- **18** Entreprises Étudiantes (culture & arts, sports & aventures, service aux étudiants, humanitaire) ;
- **155** accords internationaux dans **51** pays ;
- Au minimum 12 mois de stages ;
- Plusieurs centaines d'entreprises et organismes partenaires ;
- **35 000 €** de salaire annuel au 1<sup>er</sup> emploi ;
- **Plus de 16 000** anciens élèves.

**Frais de scolarité : 10 950 €** pour l'année scolaire 2016-2017 (frais réévalués chaque année).

**Financement des études** : bourses d'État, **bourses ISC Paris** (de 500 à 1 600 €), prêts bancaires à taux préférentiels. Job service interne (ISC Network, missions rémunérées 10 € de l'heure), emploi du temps aménagé et contrat de professionnalisation possible.

## LE MONDE CHANGE, SOYEZ PRÊTS

Dans un monde interpellé par la globalisation de l'économie, les multiples changements du système économique et social, les évolutions technologiques incessantes, la mission de l'ISC Paris est d'assurer aux élèves sélectionnés une formation généraliste au management, de haut niveau académique assise sur une activité de recherche diversifiée, réellement professionnalisante et conduisant à une insertion professionnelle de qualité.

**Dans le cadre de cette formation, l'ISC Paris se donne aussi pour mission :**

- d'accompagner les élèves à devenir acteurs responsables de leur formation et de l'acquisition de leurs connaissances, à construire leur identité professionnelle et à développer leur capacité à donner du sens au travail.
- de développer les capacités décisionnelles des élèves par une pédagogie de l'action stimulant l'esprit d'entreprise, par la mise en œuvre d'enseignements transversaux et par l'acquisition d'une bonne pratique des réseaux.
- de conduire des activités de recherche diversifiée : recherche à visée managériale, à visées théoriques et à visée pédagogique.
- d'encourager les élèves à la prise de risque en milieu complexe et incertain, en leur donnant le goût de l'entrepreneuriat, et en développant leurs capacités d'analyse et de synthèse, de créativité et d'innovation, de prise de décision.
- de construire des communautés apprenantes favorables à l'apprentissage collaboratif, source d'intelligence collective et de création de valeur.
- de préparer les élèves à la conduite du changement par l'hybridation des savoirs, par la capacité à l'approche globale des problématiques de l'entreprise, par l'ouverture d'esprit et la culture générale, par le développement du leadership.
- de prédisposer les élèves à assurer des responsabilités professionnelles dans un environnement international par une exposition aux réalités internationales et une approche multiculturelle du management.
- d'amener les élèves à prendre conscience des exigences de l'éthique des affaires, de la responsabilité sociale de l'entreprise et de créer les conditions favorables d'une pratique de l'altérité, du respect de l'autre et de la solidarité.

## DEVENIR EXPERT ET TROUVER SA VOIE

*Objectif : dispenser une formation académique de qualité et personnalisée.*

Marketing, droit, communication, gestion... avec 44 matières à valider au cours de vos deux premières années d'études, vous aurez la possibilité d'acquérir les connaissances nécessaires pour mener à bien les principales missions d'un manager : définir une stratégie marketing et commerciale, diriger une équipe, gérer un budget ...

Cette polyvalence et cette pluridisciplinarité, fortement appréciées des recruteurs, seront complétées par 5 pré-spécialisations au choix.

En 3<sup>e</sup> année, entre 300 à 350 heures de spécialisation, vous maîtriserez parfaitement l'un de nos domaines d'expertise. De la finance au marketing, du luxe aux nouvelles technologies, des ressources humaines à l'international, chacun pourra trouver le domaine de compétence qui conviendra le plus à sa vocation.

Ces spécialisations construites comme de véritables Masters vous ouvriront les portes des recruteurs les plus exigeants.

## LES 20 SPÉCIALISATIONS ET 6 DOUBLES DIPLÔMES DE 3<sup>E</sup> ANNÉE

### MARKETING/COMMUNICATION ET RELATIONS COMMERCIALES

- Management des relations commerciales
- Marketing digital et e-business
- Marketing stratégie
- Marketing communication
- Marketing management des industries créatives
- Marketing management des industries du luxe
- Marketing et Management du Sport
- Management des études Marketing et d'Opinions DD

### MANAGEMENT

- Entrepreneuriat
- Innovation in European Business DD
- Management des Systèmes d'Information
- Management et Marketing des Technologies de l'information et de la communication DD
- Achats et Supply Chain Management
- International Business and Management
- Management des Ressources Humaines

### FINANCE ET AUDIT

- Expertise Juridique et Fiscale / Ingénierie du Patrimoine DD
- Finance
- Gestion des Risques Financiers DD
- Gestion des Instruments Financiers DD
- Expertise Audit et Contrôle

DD = Double-diplôme

## METTRE LE CAP SUR L'INTERNATIONAL POUR S'OUVRIR AU MONDE

*Objectif : vous ouvrir les portes de l'international.*

Conscient du caractère primordial des langues sur le marché du travail, l'ISC Paris vous offre la possibilité d'étudier jusqu'à trois langues étrangères.

**C'est pour vous une triple opportunité :**

- **Perfectionner votre niveau en anglais**, langue des affaires par excellence, et valider une qualification officielle (TOEFL et/ou TOEIC). À l'ISC Paris, les meilleurs étudiants en anglais pourront suivre un cursus entre bilingue et International ;
- **Renforcer vos compétences dans une 2<sup>e</sup> langue déjà étudiée ou en découvrir une nouvelle ;**
- **S'ouvrir à des cultures plus originales**, avec la possibilité de choisir une 3<sup>e</sup> langue (arabe, chinois, coréen, espagnol, italien, japonais, portugais, russe...) afin de vous préparer à aborder les nouveaux marchés en pleine effervescence !

Au-delà de votre niveau linguistique, ce sont vos expériences réelles à l'international qui feront la différence aux yeux des recruteurs.

À l'ISC Paris, vous aurez la possibilité en 1<sup>re</sup> année de faire un stage de 4 mois à l'international ; en 2<sup>e</sup> ou 3<sup>e</sup> année de partir 1 ou 2 semestres chez un de nos partenaires avec la possibilité d'un diplôme de l'université d'accueil ; d'effectuer un stage de 6 à 8 mois à l'étranger et enfin de suivre un MBA en 4<sup>e</sup> année !

Pour ceux dont l'objectif professionnel n'est pas orienté vers l'international, il faudra néanmoins valider le « passeport international » en validant le TOEIC avec un score minimum de 785 points et/ou son TOEFL à 79 points, et vivre au moins une expérience à l'international : lors d'un stage de 16 semaines minimum et/ou lors d'un échange dans l'une de nos 155 universités partenaires dans 51 pays.

## S'IMMERGER EN ENTREPRISE ET DEVENIR PROFESSIONNEL

*Objectif : faire de l'entreprise un lieu d'acquisition des compétences.*

Lors de vos recherches de stages et d'emplois, les recruteurs seront particulièrement attentifs à vos expériences professionnelles. En bref : à ce que vous savez faire !

L'ISC Paris a donc développé sa pédagogie autour de l'acquisition d'expériences, en proposant 12 à 26 mois de stage au cours des trois années. Ces expériences de terrain vous permettront d'appréhender les missions d'entreprises, de tester différents secteurs d'activités et d'acquérir des compétences professionnelles. De plus, vous pourrez choisir de passer 12 mois en entreprise entre votre 2<sup>e</sup> et 3<sup>e</sup> année, c'est l'année d'expérience professionnelle. Pour vous aider à aborder ces stages de façon efficace et professionnelle, vous bénéficierez d'un coaching personnalisé.

Autre atout : vous profiterez à Paris, d'une situation géographique exceptionnelle, qui vous donnera accès à un important réseau d'entreprises dans des domaines d'activités variés.

### ***Des moyens mis en place pour accompagner la recherche de stage***

- L'Entreprise Étudiante, Partner ISC, propose à tous les étudiants de l'école des offres de stage en France et à l'international. L'année dernière, ce sont près de 5 000 offres de stages qui ont été proposées.
- MyISCstage permet aux recruteurs de déposer leurs offres de stage à partir de notre site internet et à nos étudiants de les consulter en temps réel. Cet outil permet aussi à nos étudiants d'être en contact avec les différents recruteurs afin d'échanger avec eux sur les missions proposées.

Des outils pour trouver son 1<sup>er</sup> emploi :

- Les forums ISC Paris : permettent deux fois dans l'année à nos étudiants de rencontrer les entreprises qui recrutent ;
- La semaine des métiers et la quinzaine des secteurs d'activité ;
- Les ateliers CV/emploi ;
- CV des jeunes diplômés en ligne, consultables par les entreprises ;
- La rédaction et la soutenance d'un projet professionnel pour chaque étudiant de 3<sup>e</sup> année ;
- Un réseau actif de près de 16 000 anciens ;
- Plus de 3000 offres d'emploi déposées par an ;
- 1<sup>ère</sup> au TOP 40 des écoles préférées des recruteurs (Multiposting - Janvier 2015) ;
- Une nouvelle plateforme exclusive en partenariat avec Job Teaser.

### **UN PÉDAGOGIE PAR L'ACTION : « ENTREPRENDRE POUR APPRENDRE »**

*Objectif : créer un pont entre connaissances et expérience professionnelle grâce à l'univers des Entreprises Étudiantes.*

Dès votre première année, et pendant toute votre scolarité, vous pourrez allier formation académique et missions réalisées au sein de votre Entreprise Étudiante. L'intérêt premier de cette « alternance » est de vous permettre d'appliquer l'ensemble des connaissances enseignées en cours lors de missions d'entreprises réelles.

Point d'orgue du parcours, les Entreprises Étudiantes vous obligeront à gérer un emploi du temps conséquent, à l'image des managers en activité. Des expériences qui vous apprendront à vous organiser, à planifier, à déléguer, à anticiper... des qualités attendues par les entreprises.

**Depuis plus de 50 ans, l'ISC Paris accompagne ses élèves sur le chemin de la réussite.**

# CULTURE GÉNÉRALE

**DURÉE : 4 HEURES.**

*Il sera tenu compte des qualités de plan et d'exposition, ainsi que de la correction de la langue. Il n'est fait usage d'aucun document et l'utilisation de tout matériel électronique n'est pas autorisée.*

## SUJET

### DISSERTATION

**Faut-il toujours préférer la vérité ?**

## CORRIGÉ

*Par Gilbert Guislain, professeur de culture générale, interrogateur en classes préparatoires Commerciale-Frilly à Paris.*

Les sujets de la session 2016 ont manifesté un caractère original : crépuscule de la vérité pour HEC, et plus classique pour EM Lyon : la fidélité au réel définit-elle le vrai ? Faut-il toujours préférer la vérité, tel était celui proposé pour EDHEC ESSEC. Souvent comme ici, le libellé commence par faut-il, ou bien doit-on, peut-on ? Préférer désigne l'exercice d'une liberté, d'un jugement, la considération de la vérité comme meilleure, supérieure. La préférence est une distinction ; or, la vérité est sans doute de l'ordre de la simplicité, de l'évidence. Toujours désigne un caractère absolu, sur le plan moral, mais comme adverbe de temps, renvoie à une perspective historique. La vérité doit être confrontée à son antonyme, l'erreur, mais dire la vérité, c'est le contraire de mentir, de voiler, de dissimuler, de tromper. Mais toute vérité est-elle bonne à dire ?

Après l'examen de la valeur du détour, de l'artifice, nous ferons apparaître l'exigence démocratique de vérité et de transparence, avant de mettre en cause la volonté systématique de vérité.

#### **Toujours la vérité ?**

Après la mode de la communication qui avait marqué les années 1980, qui s'était concrétisée un peu plus tard par la télé réalité, le « déballage » médiatique d'affaires en place publique à l'image de la presse anglo-saxonne, des philosophes ont fait l'éloge de la distance, de la réserve. Différent du mystère, qui peut recevoir une explication scientifique, le secret comme dissimulation peut apparaître légitime parce que différent du mensonge, qui est une falsification. Le mensonge veut faire croire comme vrai ou faux ce qu'on ne considère pas comme tel, il veut faire passer le faux pour le vrai. Un débat ancien a opposé les philosophes sur son sujet. Saint Augustin et Kant (*Sur un prétendu droit de mentir par humanité*) y ont vu une transgression de la loi morale, en opposition à l'impératif catégorique et aussi une confiance brisée. D'autres ont pensé que la vérité n'était pas toujours préférable. On avance les arguments de l'intérêt, ou mieux, de la complexité, de l'humanité

pour justifier la dissimulation, voire le mensonge. Benjamin Constant, dans *Des réactions politiques*, explique que l'on peut cacher un innocent pour lui sauver la vie et donc ne pas le dénoncer. La vie sociale serait impossible si la vérité était dite, d'autre part, l'omission n'est pas la falsification. Dans *Le fondement de la morale*, Schopenhauer définit le mensonge comme légitime défense, le mensonge altruiste peut être l'arme de la justice, en s'accordant à l'éthique. Dans le *Traité des vertus*, Jankélevitch définit ce même mensonge comme un mal pour un bien. Par amour, devant un malade qui va mourir, on tait au moins la vérité. Il faudrait donc dire la vérité de manière opportune, manifester un esprit de finesse – ce que le xvii<sup>e</sup> appelait « l'honnête dissimulation » – savoir laisser « mûrir » la vérité, avec préparation et pédagogie. Par souci de la morale ou du savoir-vivre, des vérités dites inutiles ou inopportunes doivent être écartées.

De même que l'erreur joue un rôle dans la constitution de la vérité, le détour et l'apparence importent dans les relations humaines. La scène, le secret, la distance constituent ces relations. Cela est clair dans l'art baroque qui est un art des apparences, comme le montrent Gracian (*L'homme de cour*) et Castiglione (*Le Livre du courtisan*). Le courtisan manie l'art du paraître, qui finit par devenir naturel. Cette aisance peut également être celle du dirigeant qui peut être dissimulé même s'il ne le paraît pas. Il dupe le peuple, comme le montrent Montaigne et Pascal, emploie la ruse et la force avec un bon usage du temps (Machiavel, *Le Prince*). Réaliste et pessimiste dans le même temps, Machiavel montre ce qui est nécessaire pour tenir et conserver le pouvoir : dissimuler et voir sans être vu. Des arts de gouverner sont ainsi constitués aux xvi<sup>e</sup> et au xvii<sup>e</sup>, lorsque croît l'absolutisme (Mazarin, *Le bréviaire des politiciens*). Le secret d'Etat est contemporain de l'affirmation de la souveraineté.

En art, nous pourrions affirmer la nécessité de donner la préférence à la vérité. Ainsi, proscrivant le romantisme lyrique et idéaliste, le réalisme en art a défendu la conformité au réel comme gage de vérité contre l'illusion. Les romanciers du xix<sup>e</sup> choisissent des sujets et des situations « vrais » en laissant de côté l'académisme et la mythologie, l'esthétisme, la rhétorique, et en tentant d'étudier exhaustivement la société. Mais la vérité d'une histoire n'est pas dans la copie exacte de la réalité et il est difficile de préférer naturellement « la » vérité esthétique. L'art est un choix subjectif, une illusion du vrai, comme le montre Maupassant dans la préface de *Pierre et Jean*. L'art est un choix, la vérité est souvent stylisation, et plusieurs points de vue de narration, dits focalisations, sont possibles, selon l'« effet de réel » (Roland Barthes). De même, toute représentation d'un paysage est construite, certes préférée subjectivement, mais ce n'est la vérité naturelle et aveuglante. C'est à travers l'art que nous voyons la nature ; l'art est toujours artifice, souvent métamorphose du monde, comme dans les romans de Zola. Céline écarte le style académique, mais sa vérité stylistique émotive est travaillée, elle n'est pas la vérité naturelle.

***L'exigence démocratique de transparence : la vérité blesse, mais le mensonge tue***

Ce second temps doit nous aider à préciser la valeur de la vérité. L'harmonie sociale n'est comme transparence. Les rapports sociaux doivent éviter la politesse hypocrite, les silences complices et lâches. L'harmonie sociale n'est pas une fin en soi, tout ordre doit servir des valeurs. C'est le point de vue d'Alceste dans le *Misanthrope* de Molière, qui défend une estime méritée : « sur quelque préférence une

estime se fonde/ Et c'est n'estimer rien qu'estimer tout le monde. » Dans la *Lettre à d'Alembert sur les spectacles*, Rousseau reproche à Molière d'avoir ridiculisé Alceste, il fait, à la fin de son essai, l'éloge des fêtes civiques et antiques, fondées sur la transparence sociale et politique et met en cause le théâtre qui sépare la salle de la scène en désocialisant les spectateurs : tout n'y est qu'artifice et mensonge. Dans le texte liminaire aux *Confessions*, il proclame, face aux hommes, de manière fulgurante et personnelle, sans rhétorique académique, la préférence qu'il accorde à la vérité : « je veux montrer... un homme dans toute la vérité de la nature, et cet homme, ce sera moi. »

Par ailleurs, le peuple a droit à la vérité, qui est un devoir pour les dirigeants. Les Grecs donnaient la priorité à la *parrhesia*, à la parole droite et directe, à la franchise contre les conventions hypocrites, la rhétorique et ses artifices. Les citoyens libres avaient droit de parole à l'assemblée. L'orateur devait dire vrai. Toute une tradition française, de Rabelais à Céline, en passant par Verlaine, Rimbaud, Paul Nizan, a justement dénoncé les artifices de l'éloquence académique, les introductions longues et creuses, la fausse modestie, les faux-fuyants... Dans *Voyage au bout de la nuit*, Céline s'emploie à démythifier les « bobards patriotiques », Barbusse présente sans fard les horreurs de la guerre dans *Le Feu*. En 1914, Poincaré ment en prétendant que « la mobilisation, ce n'est pas la guerre », à la veille de l'hécatombe du mois d'Août, dont les responsabilités incombèrent à un Etat-Major déconnecté du réel (Pierre Servent, *Le complexe de l'autruche, les défaites françaises*). La vérité et les faits doivent être opposés à l'idéologie, qui est parfois un refus de la vérité, ou à la culture officielle, même si le concept de fait mérite d'être interrogé. Retarder la vérité est vain : Zola écrivait à propos de l'affaire Dreyfus, dans un article de 1897 : « la vérité est en marche, rien ne peut plus l'arrêter ».

Les Lumières ont fortement contribué à cette préférence accordée à la vérité. Diderot affirmait qu'on doit toujours enseigner la vérité aux hommes et qu'il n'y a jamais d'avantage réel à les tromper. Ne pas mentir est un impératif moral et politique, en démocratie, dont le fondement est le pouvoir du peuple. L'exigence de transparence et d'instruction des citoyens doit l'emporter, car le pouvoir requiert le savoir. L'instruction, distincte de l'éducation, signifie diffusion des connaissances et de l'esprit critique. Condorcet, philosophe des Lumières, défend cette exigence : la vérité est « l'ennemi du pouvoir comme de ceux qui l'exercent ; plus elle se répand, moins ceux-ci peuvent espérer tromper les hommes » (*Mémoire sur l'Instruction publique*). La vérité est un service rendu à tous... La diffusion de la vérité va de pair avec l'émancipation politique. Mais les hommes des Lumières posent plutôt cette question au sens d'un progrès de l'esprit humain plus qu'au sens d'une instruction populaire. D'autre part, les Lumières sont réservées face aux passions du peuple jugées mauvaises et le culte de la démocratie directe, de la transparence n'est pas exactement l'héritier des Lumières. Platon dénonçait déjà les mensonges des sophistes mais pensait qu'une éducation était nécessaire pour atteindre la vérité.

En revanche, cette exigence démocratique de transparence, ce souci de toujours préférer la vérité restent très contemporains. Malgré leur discours formellement démocratique, les pouvoirs oligarchiques d'aujourd'hui sont dominés par le secret, la « raison d'Etat », l'information officieuse, sélective et fermée, qui taisent les conflits d'intérêt, les décisions opaques, les scandales financiers, dénoncés aujourd'hui par les lanceurs d'alerte, artisans d'une démocratie active. Le complexe militaro-industriel est coutumier de la dissimulation. Des erreurs judiciaires devenues légendaires ont masqué la vérité. Les opérations secrètes ne sont connues que des décennies plus tard, malgré la presse d'investigation. Dans nos sociétés qui

souffrent d'un sévère déficit démocratique, les citoyens ont un faible pouvoir réel et sont souvent soumis, comme La Boétie et Tocqueville le montraient déjà. Par ailleurs, les intellectuels sont majoritairement en retrait de l'espace public ; or, Péguy écrivait : « celui qui ne gueule pas la vérité est parmi les faussaires ».

Au moment où se développe la surveillance de masse, ce que fait l'Etat doit être observé par les citoyens. Et défendre la transparence publique ne veut pas dire pour autant transgresser l'espace privé.

### **La vérité en question**

Enfin, nous pouvons contester la volonté systématique de vérité, « Les vérités sont des illusions dont on a oublié qu'elles le sont », écrivait Nietzsche. La vérité est un concept immuable qui masque le devenir. Le monde des apparences est le seul réel. Par idéalisme et intellectualisme, nous imposons des concepts au monde. Pour le scepticisme, les vérités sont relatives, et non pas absolues. Nietzsche dénonce la soi-disant objectivité de l'historien, l'idée d'une vérité en Histoire, en particulier dans la *Seconde considération intempestive*. L'Histoire est un discours sur l'Histoire, cette dernière n'est que « conception continue de fantômes qui planent sur les brouillards de l'insondable réalité. « Tous les historiens racontent des choses qui n'ont jamais existé, sauf dans la représentation. » Nietzsche annonce Michel Foucault, qui a travaillé ensuite sur les représentations et les discours. Ainsi, « préférer la vérité » a peu de sens, ceci exprime plutôt un confort intellectuel. De quelle vérité parle-t-on en effet ? Telle est l'interrogation philosophique. « Ce que nous nommons vérité n'est qu'une accumulation d'erreurs » écrivait Clémenceau.

Discours sur l'histoire, l'Histoire est une série de représentations, qui occultent, dévalorisent et mythifient tel moment du passé, tel personnage, tel régime. Dans *Nos ancêtres les Gaulois et autres fadaïses*, l'essayiste François Reynaert s'en prend au « roman national », Nicolas Offenstadt dénonce les « historiens de garde » à la mode comme Nizan dénonçait les « chiens de garde » gardiens de l'idéologie dominante. En fait, les Gaulois ont été mythifiés par l'histoire républicaine au XIX<sup>e</sup>, comme l'avaient été, antérieurement, les Francs valorisés par l'aristocratie du XVIII<sup>e</sup>, alors que d'autres les présentaient comme des barbares vivant dans des marécages et vénérant des idoles de bois. L'identité nationale posée comme essence éternelle et devenue vérité politique est un concept à interroger toujours. Les peuples celtes, à l'origine de la culture européenne différaient totalement de la France moderne, capétienne ou républicaine.

Ce sujet pourrait nous mener aux deux conclusions suivantes : ou bien, la vérité existe, la chercher est un choix actif, une éducation, un effort renouvelé, par le chemin des erreurs par exemple, ou bien elle s'impose seule, car le temps fait son œuvre, comme le montre la philosophie hégélienne – la vérité se dévoile avec la rationalité et la réalité historique. Ou bien elle est aveuglante et elle apparaît toujours, indépendamment de notre volonté ; nous n'aurions pas à la préférer. Elle compose donc avec la nature immédiate ou avec l'engagement de notre volonté. Ou bien enfin, nous pouvons la nier comme illusion.

### **Bibliographie sur le thème 2015-2016 de culture générale**

*La nature*, Dissertations et méthodes, Sophie Guillouet, Ellipses

*La nature*, ouvrage collectif, Armand Colin

*La nature, leçons philosophiques*, Frédéric Laupies, PUF

Magazine *Espace Prépas*

### **Bibliographie de culture générale**

*Cent Fiches de culture générale*, collectif, Bréal

*Éléments de culture générale*, J. Bonniot, G. Guislain, P. Dumont, Ellipses

*QCM commentés de culture générale*, G. Guislain, Studyrama

*L'Intégrale de la culture générale*, E. Caquet, G. Guislain, F. Grolleau, Ellipses

*250 Fiches de culture générale*, Studyrama

*Exercices de contraction et de synthèse de textes*, G. Guislain, Y. Terrades, Ellipses

*Réussir la synthèse de textes*, Cl. de Oliveira Gomes, Studyrama

*Dictionnaire de culture générale*, coord. Frédéric Laupies, PUF

# CULTURE GÉNÉRALE

**DURÉE : 4 HEURES.**

*Il sera tenu compte des qualités de plan et d'exposition, ainsi que de la correction de la langue.*

*Il n'est fait usage d'aucun document et l'utilisation de tout matériel électronique n'est pas autorisée.*

## SUJET

### DISSERTATION

Crépuscule de la vérité

## CORRIGÉ

*Par Tony Brachet, agrégé de philosophie, E.N.S. St-Cloud, correcteur des Grandes Ecoles de commerce.*

Cet étrange sujet – n'a-t-il pas lui-même quelque chose de « crépusculaire » ? – frappe, non seulement par son libellé inhabituel (l'absence de déterminant) mais encore par la minceur – apparente – des références possibles.

Une fois remis en mémoire, dans leur généalogie, le « Crépuscule des Dieux », puis le « Crépuscule des idoles » qui, publié la même année que « Nietzsche contre Wagner », lui fait écho – mais pour saluer en Bizet l'« aube de la nouvelle musique », en l'opposant aux chants du cygne du Maître de Bayreuth –... il ne reste guère, semble-t-il, en contre-jour, qu'Hegel et son hibou « prenant son envol à la tombée de la nuit ».

Les états « crépusculaires » ne manquent pourtant, ni en psychiatrie (où un Henri Ey les situe entre la confusion et le rêve) ni dans le registre poétique – Lamartine, Victor Hugo, Verhaeren y suffiraient. Jacques Maritain a publié (en 1939) un *Crépuscule de la civilisation*. Duvivier met en scène une vieillesse aussi déchirante que sarcastique dans *La fin du jour*.

Enfin, *Le Déclin de l'Occident* de Spengler, qui vient – avant l'hittérisme et ses divers flambeaux – faire le lit de notre « civilisation » ; ou bien encore, « entre deux crépuscules » (car il en est aussi un « du matin ») cette « longue nuit » du Moyen-Age dont l'invention irrite tant d'historiens, à commencer par l'auteur de l'*Index scolastico-cartésien* : Gilson. Mais (le) crépuscule – de surcroît, sans article – de la vérité ?

Tout décline ou – au gré de la subjectivité – disparaît, mais le vrai passe pour intemporel : tel semble être l'enjeu de ce paradoxal sujet.

Interrogeons d'abord l'image, voire l'inconscient. Verdiglione, psychanalyste, évoque, entre nuit et jour (dont Jaspers affirmait qu'« ils ne sont conciliés dans aucune existence ») pas un « fil du crépuscule » – où il situe, entre refoulement et résistance, la « voie royale » du rêve, ainsi que le temps lui-même.

Nous voilà donc « entre chien et loup » – le chien de Nietzsche qui aboie au clair de lune lors de la « révélation » de l'Éternel Retour (devant le Portique du Vrai) ; le loup de Hobbes (sans foi ni loi) « à l'aube des temps ».

Tout un bestiaire philosophique est là : à défaut des « animaux de Zarathoustra » (l'aigle et le serpent, qui sont comme le plein jour et la toute nuit) le double oxymore du « cygne noir » probabiliste (quelle probabilité de tirer une boule grise d'une urne qui n'en contient que de blanches et de noires ?) et de l'« oiseau de Minerve » hégélien, emblème, entre autres, du crépuscule annoncé des langues anciennes – et de l'humanisme.

C'est dire si nous sommes menacés ici par la métaphore – qui ne doit, en principe, pas tenir lieu de concept – et son abus.

Le sujet résonne comme le titre d'une conférence ou d'un poème, voire, d'un tableau (de Kandinsky, par exemple). Incongru, il *évoque, interpelle, décrit, donne à voir* (en contre-jour) mais le moins qu'on puisse dire est qu'il n'est, linguistiquement, pas disert. Comment le transformer en une dissertation ? Une culture générale doit aussi relever ce défi.

Récemment – également pour l'épreuve d'HEC – nous nous étions interrogés sur les images – *auront-elles toujours raison de nous ?* Image résolument singulière que celle du crépuscule.

Le *crépuscule* n'est pas seulement l'« image négative » de la cessation ou privation du jour – ou, à la rigueur, l'« image mixte », platonicienne, du jour et de la nuit. Il est l'image-*limite* où s'évanouit la représentation.

Toute sensation, ou perception, supposant, si l'on suit Aristote, un sujet, un objet et un médium (ici, la lumière), le crépuscule, lui, voit disparaître le médium avec l'objet. Il est cette disparition, somme toute, l'être d'un néant. *La figure de ce monde s'évanouit*, écrit Hugo dans un vers saisissant, évoquant, probablement, la mort – *Où va le chien ?* – mais aussi, et plus généralement, la temporalité.

Le crépuscule est comme la mort du jour : c'est pourquoi il figure aussi aisément, pour l'individu la fin de la vie – animale tout aussi bien qu'humaine. De Kortchnoï, joueur d'échecs vaincu, on écrira par exemple, visant à la fois l'âge, la dissidence et le déclin : « *il a quarante-sept ans et le jour baisse* ». Le vaincu, même sans être en passe de périr, est prostré : il ne regarde plus rien en face, mais courbe l'échine aussi sûrement que Régulus aveuglé, renvoyé avec mépris aux Romains par Carthage – ou que décline la rose chez Ronsard.

Cependant, si le vrai est – comme le veut la tradition – en dehors, au-delà même de l'image, le crépuscule serait plutôt l'image de la *vérité* à laquelle il permet d'accéder (« Malheur aux vaincus ! »). Ainsi en est-il chez Hegel : « *quand la philosophie peint gris sur gris sa vérité dans la réalité, celle-ci ne se laisse point rajeunir, mais seulement reconnaître. L'oiseau de Minerve ne prend son envol qu'à la tombée de la nuit.* ». Musicalement, la vérité est un Nocturne – est-ce pour cela que beaucoup privilégient l'ouïe, disqualifient la vision ?

Si par contre – comme il est d'usage en Sophistique et dans une certaine « modernité », voire « contemporanéité » (celle du monde dit « virtuel » avec l'incontournable référence de mode, *Matrix*) le vrai n'est qu'une image – fausse monnaie chassant la bonne, « semblance » ou « semblant » au sens de Verdigrone et de Lacan, alors le crépuscule de l'image – au soleil couchant de la culture – est aussi le crépuscule du vrai.

Une problématique s'esquisse ainsi dans le « faux-jour » du doute (*Faux jour* est un roman de Troyat dont le narrateur lutte pour arracher, de l'image d'un père déplorable dans sa vie, une vision honorable dans la mort). Notre sujet commence à prendre forme.

Il semble tirer son « âme » de la toute première philosophie grecque – celle qui oppose la « lumière » parménidienne aux « ténèbres » d'Héraclite, des métaphores du « char étincelant » où est juchée la Déesse « Vérité », celle qui fait justice de l'illusion et de l'oubli, par opposition à la Nuit où s'en retourne chacun, le soir, loin des consensus tout aussi illusoire, et injustes, du jour.

Entre les deux, le Crépuscule peut figurer l'Équité. Verdiglione :

- *Mille et une Nuits* – mais nous voilà leurrés par la jouissance, par l'érotisation d'une Nuit qui ne finit jamais, jusqu'à que nous décrétons pas le *crépuscule des sirènes*, « rompant les charmes » – fussent-ils ceux de la psychanalyse ou plutôt du transfert.
- *Un jour et mille* – chaque jour est interminable (« comment fabrique-t-on des années si courtes avec des journées si longues ? » demande Jankelevitch) et le désir, mensonger lui aussi, appelle la mort aussi sûrement que la sollicite le bûcheron de la Fontaine, du moins jusqu'à sa rencontre – qui relance le désir. *La mort nous aide à supporter la vie.*
- *Mille et l'autre crépuscule* – car ce crépuscule est unique comme le rêve, et il accompagne la Vérité, entre Certitude et Illusion.

Le Crépuscule a la structure de la *Phénoménologie de l'Esprit* : on y chemine de l'inconscience de la Nuit (où toutes les vaches sont noires, dit l'allemand) à la fausse-conscience du Jour (où tout ce qui brille est or) sur un fil – en effet – qui mène au « gris » de la vérité.

Conceptuellement, trois parties se dessinent pour « sculpter » ce sujet :

1/ La vérité est ce qui se détache du crépuscule dont elle constitue, en quelque sorte, le nom propre – pour parodier Lacan : « *Moi, la Vérité, je ne parlerai qu'au crépuscule* ». Le crépuscule entretient une relation d'ordre sémiologique au vrai, dont il est l'indice. La vérité s'éclaire elle-même, en révélant les ténèbres – ou le faux-jour.

Ainsi, le prisonnier de Platon est-il, au sortir de la caverne, « ébloui » par la révélation (intellectuelle) de la pénombre qui y régnait. Ainsi, au sortir de la « nuit obscure » – franchissant donc le « crépuscule du matin » – l'adepte de Jean de la Croix fait-il son deuil du crépuscule du soir – de la mort.

2/ Le crépuscule, au contraire, emporte tout – y compris la vérité, qui est finalement l'illusion ou la passion suprême. Nietzsche, précédé de Hume et des Sceptiques, suivi des « hypermodernes » (les Cioran, les Lipotevski, les Houellebecq) est omniprésent ici : la vérité n'est qu'une *valeur*, la plus fragile à l'épreuve du nihilisme, l'ombre *voyageuse* qui accompagne, dans *Zarathoustra*, « l'homme qui veut périr » ou le « dernier homme ».

Ce « dernier homme » n'est, bien entendu, pas celui de la « fin de l'histoire » (Fukuyama : *La fin de l'histoire et le dernier homme*) puisqu'au-delà de cet homme crépusculaire – plus précisément, le « nihiliste passif », qui n'est plus que l'ombre de l'humain – il y a encore, selon le prophète de Sils-Maria, « un pont vers le Surhomme », qu'on ne franchit qu'avec la Nuit.

3/ Le crépuscule (des idoles) préludant au « Chant de Minuit » (*Zarathoustra*, III) et sa révélation, est ce pont – les Dieux marchent bien sur un rayon de lune dans l'*Or du Rhin*. Hegel – avec sa « fin de l'histoire » – est seulement *l'homme qui veut périr*, mais il ne le sait pas, ou plutôt ne « veut pas » le savoir, car il ne supporterait pas la révélation du « Retour Eternel », Vérité pure, « Etre de l'étant » au dire d'Heidegger. L'« Eternel Retour », associée à la « transvaluation » réduit tous les Crépuscules – ceux du soir comme ceux du matin, y compris le « Grand Soir » et le « Premier Matin du monde » – à un seul.

Ici, la Vérité transfigure, peut-on dire, le Crépuscule. Elle est, comme le soutient Deleuze dans *Nietzsche et la philosophie*, « sélective ». Il y a, en effet, un crépuscule qui tue (ou accompagne la mort – du nihiliste « passif » – quitte à faire lever le Hibou) et un crépuscule qui vivifie le nihiliste actif, capable d'attendre Minuit – en compagnie d'un chien Stoïcien et d'une peu humaine araignée qui « rampe au clair de lune » – devant le Portique du Temps, où se joignent et séparent, d'une manière peu aristotélicienne, le Passé et l'Avenir.

Peu importe, « après » cette Révélation, la distinction entre ce qui a été vécu et ce qui ne l'a pas été, puisque tout est Eternel, de même qu'une méditation sur le crépuscule quel qu'il soit – ou sur l'aurore – y a perdu son sens. De même, opposer le vrai et le faux, s'il s'agit de connoter des événements (tels que le passage de la nuit au jour, ou du jour à la nuit) sera caduc.

Vérité et Crépuscule, au lieu de se succéder comme dans la philosophie « classique » sont désormais des « co-mourants » – rappelons que cette notion vise, en droit, la situation engendrée par la disparition simultanée de personnes dont l'une aurait dû normalement succéder à l'autre, tels qu'un père et son fils – et ce fantôme, correspondant à un *auto-engendrement* serait précisément, selon Pierre Klossowski, celui de Nietzsche, son « cercle vicieux »...

Nous allons reprendre méthodiquement cette articulation encore « intuitive », mais seule à même de nous guider sur le fil – crépusculaire, arachnéen, labyrinthique – du sujet, qui constitue sa propre métaphore.

1/ Le Crépuscule est comme l'envers de la Lumière, dont il constitue l'« Annonciation ». Clair de lune (clair *dans* l'obscur, « *Lichtung* » de Heidegger, soit une clairière ou un éclaircissement) ou « clair de terre » (Breton) à la façon des paysagistes romantiques, il est de toute façon un oxymore. Il laisse transparaître la Vérité dans la nuit commençante à la façon dont l'arc-en-ciel va éclipser les nuages.

Ainsi en est-il de l'obscurité de la pensée elle-même selon les cartésiens, dont on pourrait illustrer la « psychologie » à l'aide des vers de Valéry :

« *La confusion morose qui me sert de sommeil/ Se dissipe dès la rose apparence du soleil* ».

C'est au crépuscule que nous pensons au soleil, voire, que nous trouvons beau (*c'est dans la nuit*, écrit Edmond Rostand, *qu'il est beau de croire en la lumière*) ce soleil que nous ne pouvons, de toute manière, pas plus regarder en face que la Mort de la Nuit.

Mais si le crépuscule nous donne à voir le Soleil (voire le Soleil de l'Esprit) c'est qu'il est Soleil – l'essence de la Vérité étant sa manifestation, comme l'avancent Michel Henry et toute la phénoménologie, nous pouvons avancer sans paradoxe que, maintenant, *Crépuscule et Vérité sont identiques* – tout comme le sont, à l'aube des temps, *l'Etre et la Pensée* – et ceci, tant pour Parménide que pour son « rival » Héraclite.

2/ Conséquentement, le Crépuscule devient théâtre d'ombres quand la Lumière vient à manquer, ou bien il est lumière *négative*, au sens de Kant – plus exactement, *privation*, « concept du manque d'un objet » (« si la lumière n'a pas été donnée aux sens, on ne peut se représenter l'obscurité »). Ainsi, l'aveugle de naissance ignore le crépuscule – l'expérience de travailler avec un aveugle quand le soir tombe et que nous-mêmes n'osons réclamer de la lumière est des plus impressionnantes.

« *Rendre la lumière suppose d'ombre une morne moitié* ». Faute de l'œil crépusculaire du hibou d'Hegel ou de celui, diurne, de la colombe de Platon qui n'en vole que mieux dans le vide, souligne le penseur de Koëningsberg, ce sont les choses elles-mêmes – gages de vérité – que nous ne verrions pas. On ne voit rien – si ce n'est-ce qu'on veut bien croire – dans la lumière éblouissante de la Chose en soi, et Socrate lui-même n'y voit goutte au sortir de la Caverne.

3/ Le Crépuscule – le Vrai – partage l'Ombre et la Lumière tout comme, selon la *Genèse*, l'a fait Dieu à l'aube des temps – l'envers du Crépuscule, quand le Néant vient à l'Etre. En ce sens, le Crépuscule est Justicier : il redistribue la donne d'un monde faussé, à la façon du révolutionnaire, du « minoritaire » (Laruelle) qui rétablit la vérité contre l'aveuglant consensus, contre la métaphysique dominante.

Socrate en ce sens, mais aussi bien Galilée, Comte, Heidegger – tout penseur qui « en finit » avec un ou des prédécesseurs, relègue leurs pensées dans le crépuscule des idées. Ce crépuscule-là – relativisé et anthropologisé – est un « curseur ». Il s'efforce à distinguer les « précurseurs sombres » des « épigones distingués » qui n'ajoutent que du langage au Faux.

– *Hegel, qu'est-ce que la dialectique ?* lance Goethe au philosophe venu le solliciter. *C'est l'esprit de contradiction, qui existe naturellement en tout homme, et qui, bien formé et éduqué, sert à distinguer le vrai du faux, répond l'auteur de la Phénoménologie de l'esprit.* Et Goethe : *j'ai bien peur que cela ne conduise plus souvent à confondre le faux avec le vrai !* Hegel répond que cela n'arrive qu'aux esprits mal tournés – ceux, en somme, qui n'ont jamais su voir au-delà des apparences.

L'« histoire des idées » est faite de ces « règlements de compte » entre les différents porteurs d'une sorte de « flamme olympique » invisible et – jusqu'à Hegel – non nommée, où la fin du jour est aussi occultée que son commencement. Ainsi, l'aristotélisme marque-t-il le « crépuscule » – certains diraient qu'il sonne le glas – de l'atomisme antique, tout comme le cartésianisme est à son tour son « fossoyeur » après le procrastinateur d'Aquin, accusé par les « modernes » de « retenir la nuit ». Toutefois, des idées on ne saurait dire – comme le croque-mort qui vient, dans *l'Assommoir*, conclure d'une phrase adéquate : « quand on est mort, c'est pour longtemps ».

A peine enterré (à l'échelle des siècles), Aristote ressuscite par exemple aujourd'hui, de la manière la plus inattendue, dans la « Métaphysique analytique » – alors que l'on croyait la métaphysique « anéantie » successivement par Hume, Kant, à sa façon Hegel, Nietzsche, Husserl, Heidegger, et enfin Bertrand Russell lui-même.

Il faut s'y résigner : pour les idées, le crépuscule n'est pas la mort. Mais si les Idées « ressuscitent », c'est peut-être qu'elles sont éternelles ? Est-ce alors au sens de « l'Eternel retour » (qui a suscité, au fond, tant d'adeptes, des Stoïciens jusqu'à Boltzmann) ou au sens où elles sont déliées de tout rapport avec le Temps ? Le crépuscule, serait-ce, dès lors, l'Eternité ?

Croisons, maintenant, l'image et le concept.

*Crépuscule de la Vérité* signifie d'abord *crépuscule du faux*. Si « c'est une même chose que de penser (vrai) et d'être », alors la vérité de l'Être, éblouissante comme un éclair dans la Nuit, révèle, pour la première fois, l'obscurité de l'erreur, illuminant l'homme sincère ou « bien tourné » qui y perçoit, enfin distinctement, le Néant – ou du moins le Néant mêlé d'Être, le « mixte » platonicien, l'*idée confuse* de Descartes. Dans la pénombre, écrit Chrysippe, je prends la corde pour un serpent – mais, dans l'ombre, je ne vois rien du tout. Ainsi, pour les Stoïciens, la « représentation compréhensive » nous fait passer de l'obscur au confus, puis au clair. Dans l'ombre – comme dans la lumière seule, précisera Kant – on ne voit « que du feu », c'est-à-dire *rien*.

Sortis de la caverne ou de la foire aux idoles – on songe à Bacon – la « lumière naturelle » nous apprend à distinguer le vrai du faux, et à voir clair dans les ténèbres, voire dans les « Caves de l'existence » (Alain Coulon) – ce qui marque, pour un homme « éclairé », « éveillé » voire « illuminé », la fin de l'illusion.

Dans cette *première* acception, le crépuscule, en tant que perception, est l'*effet* de la Vérité qui transparait en lui et le sépare de la Nuit – comme Dieu a séparé la Nuit du Jour. Mais, autant, pour Dieu, il existe un Jour et une Nuit *absolus* (et contemporains) autant, pour l'homme, ne sont donnés qu'un jour et une nuit *relatifs* : leur limite « amovible » étant le Crépuscule.

C'est pourquoi Fichte, par exemple et par référence aux Lumières (tout philosophe, comme tout politicien, prétendant « illuminer » le présent, en opposition à l'obscur du passé) n'hésite pas à publier un « Rapport clair comme le jour ».

Dans la *seconde* acception, le crépuscule est au contraire un événement qui affecte la Vérité. Autant, au premier sens, il est, dans la lignée du Vrai, intemporel et lié à l'« instantanéité » de la pensée, autant il appartient ici à une supposée « flèche du Temps ». Ce sera, par exemple, la *décadence* (Niedergang, Untergang) qui figure, pour Spengler ou Nietzsche, le crépuscule de l'Histoire – une seule fois pour le premier, mais *éternellement* pour le second, pour qui l'histoire est un perpétuel recommencement.

Dans la *troisième* acception enfin, le crépuscule constitue un événement que l'on pourrait dire *alternatif* en ceci que, partageant Nuit et Jour (ou alternant avec l'*Aurore*, le « crépuscule du matin » dont Nietzsche a également utilisé le signifiant pour titre), il décide de la Vérité elle-même. Il est alors – à l'échelle seulement humaine désormais – *acte* et *cause*, ce qui est possible en ce qu'il concerne seulement les « idées » dans leur succession historique.

Ainsi, le concept de « déconstruction » de Jacques Derrida (qui prétend ramener les concepts aux métaphores) davantage encore, celui de « déconstruction généralisée » de François Laruelle, supposé suspendre les effets de la « décision philosophique » dite avoir déterminé jusqu'à présent la pensée prétendant instituer un *avant* et un *après* de la philosophie elle-même, générant ainsi chacune un « au-delà du crépuscule » : crépuscule du signifié au bénéfice du *signifiant* pour le premier, crépuscule de l'Être au bénéfice de l'*Un* pour le deuxième.

Dans son *Nietzsche contre Heidegger* précisément, Laruelle oppose, au leit-motiv heideggerien de la « fin de la métaphysique », celui du « nihilisme actif » de Nietzsche, et finalement la *créativité* elle-même, cette possibilité de faire *apparaître*, non ce qui est – la création étant déjà, affirmait Hegel, une abstraction du Néant – mais des *valeurs* – la Vérité étant, éminemment, pour les nietzschéens, Valeur.

Peu importerait dès lors le *contenu* « des » ou de « la » Vérité(s) concernées, chacune annonçant avec fracas la mort de la précédente. Pour parodier, s'il est permis, l'*Apocalypse*, nous savons qu'il y a, en philosophie aussi, une « mort de la mort » : l'anéantissement – rêvé – de l'adversaire est dialectique. Ainsi, à *L'Écroulement des philosophes* d'Al-Ghazali répond *L'Écroulement de l'écroulement* d'Averroès. Le « crépuscule des Idées » – quelles qu'elles soient – est transitoire là où celui de la vie ne l'est pas C'est bien ainsi que l'a entendu Hegel écrivant que *la vie véritable est la vie de l'Esprit*, plus à même que l'autre – et ce, quand bien même elle ne serait pas éternelle – de traverser et surmonter ce « peu profond ruisseau calomnié » qu'est la mort.

La mort est crépuscule définitif (où le monde, écrit Wittgenstein, ne disparaît pas, mais cesse) ; l'Esprit, crépuscule transitoire, que ce soit au sens de « l'histoire des idées » et de sa comédie éternellement renaissante, ou en celui de la foi. Les tenants du *Retour éternel* – des Stoïciens à Richard Sünder, en passant par Nietzsche et Boltzmann – tiennent tous, et d'autant que plus rigoureux, pour la palingénèse.

La résurrection, plus radicalement, sépare la vérité du crépuscule. Ce n'est pas une réincarnation et la vie demeure unique, quand bien même elle se répéterait à l'identique...

Il y a deux crépuscules : celui de la vie individuelle, et celui de l'identité. Le premier est *temporel* puisque l'on meurt définitivement. Le second – dans l'hypothèse dite « ergodique » – plutôt *spatial* puisque l'on y « dé-meurt », mais dans une finitude identique à celle déjà donnée, (à moins que la résurrection ne soit agie par Dieu ou le « karma »). Il y aurait, alors, une fin de la vie, mais, en *vérité*, pas de « fin du monde », et l'aphorisme précité de l'auteur du *Tractatus* prend alors toute sa force.

En vérité, le crépuscule de notre vie n'est pas celui du monde. Le crépuscule du monde vaudrait la fin du monde, le retour – Descartes *dixit* – à l'impossible, ou illogique, Néant.

Or, Wittgenstein nous en avertit : « *on ne peut penser contre la Logique, car ce serait penser illogiquement* ». On peut en conclure que

...la Vérité toujours ignorera le Crépuscule.

# RÉSUMÉ DE TEXTE

**DURÉE : 3 HEURES.**

*Résumez en QUATRE CENTS MOTS plus ou moins 5 % (soit 380 - 420 mots), le texte suivant, en vous attachant à mettre en valeur les idées essentielles et les articulations de la pensée de l'auteur.*

*Mentionnez le décompte par 50 mots et, en fin de copie, reportez le nombre de mots utilisés.*

*Cet exercice doit rester impersonnel dans le fond comme dans la forme, et respecter STRICTEMENT les limites imposées.*

*La copie doit être entièrement rédigée : la correction et la clarté de la langue entrent pour une part dans l'appréciation du correcteur.*

*Il n'est fait usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*

## SUJET

Passons maintenant à la force pragmatique des images, qui agit même lorsqu'elles sont mal comprises ou à peine entrevues. Des millions d'étudiants et des milliers de professeurs sont passés entre la place du Panthéon, à Paris, et la Sorbonne sans avoir jamais regardé les figures de marbre, nues ou en vêtements antiques, qui, aux frontons de ces deux édifices, exaltent la Patrie et la Science : ils ne les ont jamais regardées ; ils ne sauraient pas d'avantage dire combien le Panthéon a de colonnes en façade. Les psychologues ont montré depuis longtemps qu'on n'a guère conscience du décor quotidien dans lequel on évolue à l'aveuglette, mais à coup sûr.

Les suggestions du milieu n'en produisent pas moins leur effet. Ces blancheurs de marbre à peine entrevues suffisent à rappeler qu'il existe un ordre supérieur de grands mots, de grandes idées vagues, qui s'imposent à tous les membres de la collectivité. Comme le dit Zanker, « il suffisait d'un regard oblique au passage pour les enregistrer, serait-ce inconsciemment » ; la publicité moderne, ajoute-t-il, agit en partie par cet effet fugitif sur un spectateur ou auditeur inattentif<sup>1</sup>. Zanker a raison de supposer à celui-ci une attention distraite : œuvres d'art, images pieuses, affiches publicitaires et constructions publiques ne sont pas des objets de contemplation, sauf pour un esthète, un iconolâtre ou un historien ; elles agissent à la manière d'un signal ; un instant suffit pour reconnaître qu'on est devant un monument public ou une image sacrée ou impériale.

N'étant pas de la propagande, le faste ne détaille pas, n'énumère pas les scènes successives d'une frise historiée comme autant d'arguments. Il opère en gros, il occupe l'espace et montre tout un édifice. Le décor de la colonne Trajane<sup>2</sup> en rehaussait la splendeur, mais c'était le monument en son ensemble qui donnait la principale leçon, et il suffisait d'une seconde de vision globale pour le savoir. Elle

1. Citation d'un article de Paul Zanker, historien de l'art et archéologue.

2. La colonne trajane, dans le forum de trajan à Rome, célèbre les victoires de l'empereur Trajan par un bas relief qui s'enroule autour d'elle, et dont les parties les plus élevées sont invisibles depuis le sol.

était surmontée d'une statue du prince, ce qui fait comprendre ce qu'était ce monument : l'exagération d'un type architectural vieux de vingt-sept siècles, la statue élevée au sommet d'une colonne. Elle évoquait à la fois le triomphe de l'empereur, ses funérailles et son apothéose.

Voici comment un visiteur antique a vu en 357 les trois colonnes Trajane, Antonine et Aurélienne avec leur escalier intérieur et la statue impériale qui les couronnait : c'étaient « des cimes élevées qui surgissent en un étage accessible et supportent une image des princes d'autrefois<sup>3</sup> ». La vision populaire recevait cette leçon, car elle distinguait les catégories du public et du privé ; elle savait que le Louvre était le palais du roi et elle ne mettait pas les palais du Palatin dans le même genre que les *horrea Galbana*<sup>4</sup> qui occupaient une surface du même ordre de grandeur. Le décor urbain, l'environnement suggèrent leur identité politique aux habitants.

Car la socialisation ne se fait pas seulement par la parole ou l'iconographie. Il y a d'un côté la propagande ou l'enseignement, qui sont des entreprises discursives, et de l'autre il y a une socialisation involontaire qui s'impose par imprégnation silencieuse. Nous avons tendance à privilégier ce qui « dit » quelque chose, textes ou iconographie, mais un cadre muet, non tendancieux, quotidien, imprègne plus efficacement les esprits et est reçu avec moins de méfiance qu'une prédication intentionnelle et discursive. A notre époque, l'enseignement par l'école ne peut pas remplacer l'apprentissage, fort différent, des règles sociales ou politiques par le cadre de vie et l'exemple familial et social, d'où l'inefficacité dramatique de l'éducation civique scolaire. L'enseignement silencieux par l'environnement est plus efficace, qui enseigne qu'une puissance supérieure fait partie du cadre où l'on vit, comme peut en faire partie une chaîne de montagnes.

Et puis le mot « propagande », qui s'est imposé à la suite du communisme, du fascisme et du nazisme, est disproportionné quand on l'applique à l'Antiquité. Nous verrons dans le dernier chapitre de ce livre qu'à partir de l'arc des Sévères sur le Forum romain, en l'an 203, l'art officiel au service des empereurs a adopté un style populiste et abandonné le noble style classique. Mais ce « populisme » des bas-reliefs impériaux suffisait-il à agir sur les populations ? L'empereur (ou les artistes qui pensaient servir son image) avait-il seulement l'intention d'agir sur elles ? N'était-ce pas plutôt que l'empereur, en croyant peut-être faire merveille, faisait ou laissait représenter l'idée qu'il avait de lui-même, de ce qu'il voulait ou croyait être ? On méconnaît le narcissisme des puissants, leur besoin de s'exprimer et leur méconnaissance des attitudes populaires. Et suffisait-il d'élever un arc à Rome ou de graver des légendes monarchiques au revers des monnaies (j'ai failli écrire : sur les timbres-poste) pour mettre un peuple en condition ? En réalité, le souci des artistes ou des bureaux impériaux était moins d'hypothétiques spectateurs que de donner de l'empereur une image digne de lui-même.

Au xx<sup>e</sup> siècle, la propagande des régimes dictatoriaux a eu de tout autres fins et une tout autre envergure ; elle n'a dû son succès qu'à des circonstances politiques et sociales particulières qui rendaient des foules prêtes à recevoir le message politique. Dans l'Antiquité, mieux valait une propagande par les spectacles, qu'ont

3. Ammien Marcellin, XIV, 10, 14.

4. Entrepôts situés au sud de la Rome antique.

faite Néron et Commode, ces artistes : voilà le genre de messages que le peuple était prêt à recevoir. L'étude culturelle de l'iconographie impériale romaine ou de la rhétorique des panégyriques est une chose, la question de savoir si cette « propagande » prétendue mordait sur les esprits en est une autre, qu'on ne s'est guère posée. Et puis la propagande au vrai sens du mot est un phénomène de l'ère des foules démocratiques ; avant le <sup>xix</sup><sup>e</sup> siècle, les masses paysannes, c'est-à-dire les trois quarts de la population, étaient étrangères à la politique.

Nous allons retrouver ici la différence entre faste et propagande. On ne peut pas qualifier de propagande tout message qui émane du Pouvoir ; les préambules moralisateurs des édits impériaux, avec leur considérations alambiquées, censées émaner du monarque, qu'on survolait à la lecture, ne relèvent pas de la propagande, mais de l'art du sermon : l'empereur s'y conforme à son image de censeur des mœurs, plus qu'il ne cherche à agir sur l'opinion ; les hommages que le peuple et le Sénat rendaient au souverain, les éloges emphatiques de l'empereur qui étaient de rigueur dans toute déclaration publique, n'étaient pas non plus de la propagande, mais un rituel monarchique et patriotique. Propagande et cérémonial font deux.

Prenons l'exemple des images du souverain qui, autrefois et aujourd'hui, étaient et sont exposées dans l'espace public. De nos jours, dans toute dictature, des images géantes du Chef sont élevées ou affichées à tous les coins de rue ; c'est de la propagande. Dans l'Antiquité, une statue de l'empereur régnant s'élevait sur la place publique de chaque cité ; c'était du cérémonial. La statue impériale avait été élevée à l'empereur, par le conseil municipal, *comme* un hommage dû au prince. En revanche, l'effigie du dictateur est proposée à la population, comme pour répondre au besoin qu'elle aurait d'avoir dans cesse devant les yeux l'image du chef bien-aimé. Et proposée *par* qui ? Par des foules enthousiastes ? Par un ministère de la Propagande ? On n'ose répondre ; mieux vaut croire que le besoin suffit à créer son organe... L'omniprésence de cette effigie impose à tous le sentiment pesant du pouvoir.

En revanche, dans l'Antiquité, la statue de l'empereur se fondait dans le décor de la place publique ; en temps normal, on ne la remarquait pas plus que nous ne remarquons le drapeau national qui est planté inévitablement au fronton des édifices publics. Certes, le portrait de l'empereur, lors de son avènement, avait été accueilli en grande cérémonie, et si des émeutiers renversaient cette image sacrée, c'était là un crime encore plus grave que chez nous d'arracher le drapeau national au cours d'une manifestation. Mais, écrit Peter Brown, « ce serait une erreur de croire que, lorsque les images des empereurs n'étaient ni accueillies ni renversées, elles étaient adorées. Loins de là : elles allaient de soi [*they were being taken absolutely for granted*] : sur les places publiques, elles risquaient constamment d'être cachées par les statues de personnages plus excitants, comédiens, cochers du Cirque, chasseurs de fauves dans l'arène. Que je sache, personne, en voyant le visage impérial, ne fondait en larme d'émotion<sup>5</sup>. » Un coup d'œil suffisait aux passants pour constater que le nouvel empereur dont la statue venait d'être érigée avait le visage d'un farouche défenseur de l'Empire et de l'ordre moral, comme Caracalla, ou au contraire que sa physionomie était pleine de douceur, comme celle de Sévère Alexandre ou de Théodose II. Et le passant songeait en soupirant que, doux ou farouches, « ils » étaient tous les mêmes, car enfin les impôts étaient toujours aussi pesants et les frontières aussi menacées. Voilà pour la « propagande impériale ».

5. P. Brown. *Society and the Holy in Late Antiquity*.

Pour plus de netteté, commençons par une définition : la propagande, comme la publicité, est l'entreprise de conquête d'une opinion encore incertaine ; « la propagande se rapporte à une opinion, non à un consensus ; elle concerne seulement les questions controversées et non celles sur lesquelles toute dissension est exclue<sup>6</sup>. » Elle vise à convaincre des gens qui ne sont pas convaincus d'avance ou qui sont sans opinion, elle cherche à conquérir des consommateurs, des électeurs, des partisans. La *propaganda fides* de la Contre-Réforme était bien une propagande, car elle s'adressait à des non-croyants, à des hérétiques.

La Rome antique n'avait pas ignoré la chose ; le conflit entre Octave et Antoine avait vu paraître une littérature de pamphlets ; à toute époque, de « faux » Oracles sibyllins avaient été l'instrument favori des propagandes extrémistes, des soulèvements d'esclaves. Sous l'Empire, les tentatives d'usurpation donnaient lieu à ce qui pourrait être une propagande, mais le désir de gagner des partisans ou de faire basculer le Sénat pourrait n'en être pas le seul motif. En 360, voilà Julien proclamé empereur à Paris par ses fidèles soldats et devenu usurpateur, face à la vaste armée palatine de Constance II. Alors, écrit Zosime, il envoya des lettres au Sénat romain et aux cités grecques. Nous est parvenue sa *Lettre au Sénat et au peuple d'Athènes*, « un des meilleurs manifestes qui existe en aucune langue » (Gibbon), où il expose les perfidies, la cruauté, et l'avarice de Constance à son égard et se justifie des griefs d'irrespect, d'ambition, d'intrigue et d'ingratitude ; il n'y a là ni programme de gouvernement, ni argumentation politique ; Julien ne critique pas la politique de Constance ; il ne parle pas de religion, il n'essaie pas de rallier quelque « parti païen ». Il s'en tient à des questions de vertu personnelle et de relations éthiques interindividuelles.

Pourquoi cette propagande, si c'en est une ? Serait-ce pour faire basculer l'opinion des cités provinciales, qui entraîneraient par leur exemple les troupes locales ? Le simple désir désintéressé et tout humain de faire penser du bien de soi n'aurait-il pas joué aussi son rôle ? En 1718, le régent Philippe d'Orléans décida de déclarer la guerre à l'Espagne et fit rédiger par Fontenelle un manifeste justifiant sa décision. Mais, écrit Saint-Simon, lors de la publication « le public ne fut pas docile » et il apparut à cette occasion que la « disposition de la nation » n'était pas aussi favorable à cette guerre que le régent avait pu l'espérer<sup>7</sup>. Le manifeste n'eut d'autre conséquence, favorable ou défavorable, et ne pouvait en avoir ; du reste, on n'en attendait pas davantage. Quant à Julien, le Sénat, à la réception de son manifeste, évita prudemment de prendre parti en faveur du jeune prétendant.

Laissons cette forme douteuse de propagande et passons au faste. Celui-ci ne vise pas à conquérir les sujets du roi, car on ne suppose pas un instant qu'ils puissent douter de leur maître. Le culte, l'encens, la « flatterie » qui entouraient Elisabeth d'Angleterre ou Louis XIV célébraient l'office de leur gloire et ne se proposaient pas de les installer sur le trône ; le château de Versailles pourra faire de Louis XIV un roi plus grand que les autres, mais non pas le rendre plus roi : il l'était, si l'on peut dire, « toujours déjà ».

On fait de la propagande afin de devenir dictateur ou de le rester, tandis que le faste est déployé parce qu'on est le roi. La propagande est de la rhétorique, elle cherche à convaincre, aussi peut-on parler d'une propagande mensongère,

6. H.D Lasswell et A. Kaplan, *Power and Society*.

7. L. de Saint-Simon. *Mémoires* début 1719.

tandis que parler d'un faste royal mensonger n'aurait guère de sens : le roi ne peut mentir, puisqu'il ne dit rien ; il ne fait que se montrer tel qu'il est, il ne fait rien de plus que d'être lui-même, tandis que la propagande est assertorique. Individu grand par nature, le monarque n'appartient pas au règne des règles et conventions ; nous prenons le faste pour de la propagande parce que nous réduisons la monarchie à des institutions et à des effets de pouvoir, en en méconnaissant l'opacité psychique. Quels que fussent les fondements idéologiques ou juridiques du césarisme, une pente psychologique mène au sentiment monarchique et elle avait entraîné les esprits ; Auguste, premier magistrat et champion de la République, fut bientôt imaginé sous les traits d'un monarque. De nos jours, à Washington ou à Brasilia, et dans l'Antiquité, sur l'Accropole d'Athènes, le faste n'appartient plus qu'à une abstraction, la Cité, l'État, la Nation.

Et pourtant le faste est aussi efficace que la propagande, mais il l'est par des voies opposées. La propagande, cette rhétorique, cherche à persuader du droit de commander ; le faste, lui, présuppose que ce droit existe et que tout le monde en est persuadé. Mais présupposer est une manière d'imposer : le faste aboutit au même résultat que la propagande, mais il le fait et doit le faire comme à son insu. Cette expression impressionnante de soi-même maintient les sujets dans leur conviction de la grandeur royale. Ou, pour mieux dire, elle évite de leur laisser perdre cette conviction ; elle procure au monarque non un *plus* (comme le fait la propagande), mais *l'absence d'un moins*. Le monarque sent très bien que, s'il n'était pas assez fastueux, la conviction de ses sujets en souffrirait. Une démocratie paisible peut se passer de propagande, une monarchie est impensable sans faste. Vers 1450, à Florence, Pitti, ayant conquis le pouvoir par la violence et voulant paraître légitime, se fit aussitôt construire le palais gigantesque que l'on sait.

Le faste est censé n'être le fruit d'aucun calcul : un air de grandeur n'est pas une attitude que l'on puisse prendre de propos délibéré : le roi est fastueux par nature, or on ne peut pas vouloir être naturel. Il est légitimé non par la volonté du peuple, mais par son droit personnel, parce qu'il s'appelle lion, or il n'est pas de lion sans crinière ; son faste est l'aspect physique de sa grandeur naturelle. Le faste appartient à une espèce particulière d'actions qu'un sociologue wébérien définit en ces termes : les actions qui, pour atteindre leur but, doivent ignorer celui-ci<sup>8</sup>. Lorsqu'on commence à réfléchir aux manières et moyens de maintenir une conviction, c'est que celle-ci est déjà languissante. Le faste est une expression de soi qui ne cherche pas à faire de l'effet et qui, précisément pour cela, en fait, parce qu'il semble être une production de la nature royale, indifférente, comme l'est la nature, à l'existence de spectateurs.

On le voit bien, à notre époque, par l'échec de la propagande dans les régimes dictatoriaux. Lorsque, dans un État contemporain, le dictateur fait placer son portrait dans toutes les rues, cela prouve que cet homme est partout le maître, mais il n'arrive pas à être senti comme légitime et ne peut se passer d'une police politique. Dans les défuntes « démocraties populaires » soviétiques, des hauts-parleurs diffusaient des discours officiels dans les rues. Le pouvoir prouvait par ce fait, « pragmatiquement », qu'il occupait l'espace public, mais ses discours de propagande avaient le tort d'être discursifs : ils argumentaient au lieu de présupposer, si bien qu'ils ne convainquaient personne et étaient qualifiés de « langue de bois ».

8. J.C. Passeron, « La forme des preuves dans les sciences historiques », *Revue européenne des sciences sociales*, 39, n° 120, 2001.

Le cas d'Auguste lui-même, disions-nous, avait été différent. Avec lui, les monuments, les cérémonies et l'iconographie avaient pris une importance politique toute nouvelle. Dans un livre remarquable, Zanker a analysé cette politique à travers l'architecture, l'iconographie et la stylistique. On vit se multiplier partout des symboles idéologiques très simples, répétitifs, compris de tous, qui montraient à tous qu'une ère nouvelle s'ouvrait, et quel héros l'avait ouverte<sup>9</sup>. L'effet pragmatique fut peut-être encore plus puissant : la Rome d'Auguste est une ville métamorphosée par l'implantation d'un vaste décor architectural et sculptural ; aux yeux les plus distraits et les plus ignorants, elle est devenue un théâtre préparé pour quelque grande action inédite.

Ce qui ressort du livre de Zanker est un *tertium quid*<sup>10</sup> ; ni propagande, ni faste, mais charisme. Entendons par propagande une entreprise d'organisation de l'opinion par quelque régime fort ; le faste royal, en revanche, est un attribut déployé automatiquement autour de tout monarque, comme il l'a été autour de ses prédécesseurs, comme il le sera autour de ses successeurs et comme le déploieront, en effet, les successeurs d'Auguste. Il en avait été autrement du fondateur lui-même : dans son cas, on ne peut parler de propagande, car une opinion, convaincue plus qu'à demi, est allée d'elle-même au-devant du prince. Les images officielles ne cherchaient pas à conquérir l'opinion, « *sie warben nicht* », écrit Zanker : « c'était à peine utile au près du peuple », qui était déjà conquis, « et inefficace auprès de l'opposition aristocratique<sup>11</sup> ». Il ne faut pas non plus parler de faste, car, au lieu de la vénération qui est due automatiquement à tout monarque, Auguste a été l'objet d'une exaltation *sui generis*<sup>12</sup>, celle que vouent au chef d'une croisade ceux qui suivent son entreprise avec enthousiasme, celle que désigne le mot « charisme », si souvent employé à tort.

Un chef charismatique doit éviter de déployer trop de faste ; il laisse cela au tout-venant des rois. Auguste n'en déployait guère ; son vêtement était aussi modeste que son logis. Il mit de l'éclat non sur sa personne ni sur sa couronne, mais sur sa mission et sur sa dynastie. Dès le lendemain de sa victoire<sup>13</sup> commence à s'élever son mausolée familial, monument à demi triomphal célébrant Auguste comme celui qui, par sa victoire, a sauvé la République et qui s'est révélé comme le seul champion assez puissant pour la réformer ; et son succès sera assez complet, selon la conception antique, pour que son pouvoir passe naturellement à ses descendants. Sa *domus*, son modeste hôtel particulier, est comme soudée au temple d'Apollon, ce qui fait de lui l'élu du dieu pour cette mission de régénération. Ainsi s'est mis en place ce qui restera l'originalité unique (bien plus que la « couverture idéologique ») du Césarisme pendant quatre siècles : le prince est un bon citoyen qui a pu se mettre en avant pour prendre en main les intérêts de ce qui s'appellera jusqu'à la fin la République.

L'autorité d'Auguste fut celle d'un champion de la République qui devait son autorité à son mérite ; il avait été élu par les dieux pour remplir une mission patriotique : régénérer Rome ou du moins lui rendre un visage moral et religieux qui fût

9. P. Zanker : *Augustus und die Macht der bilder*.

10. « *tertium quid* » : un troisième terme.

11. P. Zanker : *Augustus und die Macht der bilder*.

12. « *sui generis* » : spécifique, de son propre genre.

13. Il s'agit de la bataille d'Actium, en 31 avant J.C. où Octave (qui prendra le nom et le titre d'Auguste quelques années plus tard) défait Marc Antoine, et mit fin aux guerres civiles qui déchiraient Rome depuis la mort de Jules César.

digne d'elle (le visage public, officiel, de la patrie est ce qui importe le plus à une opinion patriotique dont l'amour-propre s'inquiète des apparences) et ouvrir en espoir, en intention (l'enthousiasme n'en demande pas davantage), un âge de paix et de prospérité. Auguste ne faisait que suggérer tout cela, il n'a pas organisé et contrôlé de campagne, écrit Zanker, il n'a pas eu de ministre de la Propagande. Sur le forum d'Auguste, l'éloge de l'empereur a été confié aux bons soins du Sénat ; même les adversaires du principat ne pouvaient prétendre que l'*Ara Pacis*<sup>14</sup> exaltait la personne du prince plus que sa mission. Auguste ne s'est pas fait adorer : cités, provinces, et *ordines* rivalisaient à l'exalter, à multiplier ses portraits – sans parler des poètes et de leur sincérité évidente.

Cette exaltation d'un chef de croisade par ses croisés est de tous les temps ; ce charisme, personnel par définition, est bien différent de l'attachement, aussi machinal que le faste, qui entourait jadis chaque souverain, ses prédécesseurs et ses successeurs. A Rome, des portraits de la famille impériale, images grossières et peu coûteuses, étaient visibles dans chaque boutique ou même étaient accrochés au-dessus du lit conjugal. Répétons-le, nous retrouvons ici les trois idéaux-type du pouvoir selon Max Weber : le pouvoir institutionnel moderne, avec programme et éventuelle propagande ; le pouvoir traditionnel, avec faste cérémonial et amour du roi ; le pouvoir charismatique, avec charisme du chef et culte de sa personnalité.

Paul Veyne, *L'Empire Gréco-romain*. Editions du Seuil, 2005.  
« *Buts de l'art, propagande et faste monarchique* », pp. 406-416.

---

14. L'*Ara Pacis* est l'autel de la Paix, célébrant la paix retrouvée après les guerres civiles.

## CORRIGÉ

Par Jean-François Bréchet, professeur de lettres classiques.

L'homme évolue dans un décor qui l'influence sans qu'il en ait conscience, selon les psychologues.

Le faste donne à voir un monument dans sa totalité : la colonne Trajane suggérait le triomphe, les funérailles et l'apothéose de l'empereur. La socialisation se fait par le discours ou l'image, mais aussi, par le cadre de vie des individus ; moins orienté que le discours, il est mieux reçu. En outre, parler de propagande dans l'Antiquité est déplacé, car artistes et institutions impériales voulaient donner une représentation digne de l'empereur et non séduire le public. Les dictateurs du <sup>xx</sup>e siècle recourent à la propagande pour séduire les foules démocratiques, déjà réceptives à leurs propos.

Il faut distinguer le faste de la propagande. Tout discours produit par le Pouvoir n'est pas de la propagande : les préambules moralisateurs des textes impériaux, comme les hommages du Sénat ou du peuple, relèvent d'une obligation monarchique et patriotique. Les statues des dictateurs modernes participent à la propagande ; en revanche, celles de l'empereur antique, même érigées solennellement, appartiennent au décorum des places publiques, sans plus.

Pour être clair, il faut définir les termes. La propagande veut entraîner l'adhésion des indécis : l'affrontement entre Octave et Antoine en est un exemple antique. Mais en 360, Julien, choisi par ses troupes comme empereur, est un usurpateur pour le Sénat. Pour le convaincre, il oppose ses qualités morales et son éthique aux manquements de Constance – empereur en poste – sans emporter l'adhésion du Sénat. Le faste exprime l'essence même du roi ; de là, vient la représentation d'Auguste en monarque. L'efficacité est semblable à celle de la propagande, mais les moyens sont opposés. Les sujets ne contestent pas le droit de régner du monarque : il le tient de sa nature imperturbable que le faste donne à voir. En revanche, le dictateur multiplie son portrait pour combler son absence de légitimité.

Avec Auguste, les manifestations du pouvoir changent de nature : il modifie fondamentalement la Rome monumentale et sculpturale, du fait de son charisme ; le peuple était déjà conquis. Vivant modestement dans une demeure, mitoyenne du temple d'Apollon, il est un citoyen choisi par les dieux, pour assurer repos, paix et prospérité. Sénat, cités, artistes sincères, portraits omniprésents de la famille impériale participaient à son exaltation. Il incarne les trois pouvoirs définis par Weber : pouvoir charismatique, pouvoir institutionnel moderne et pouvoir monarchique traditionnel.

401 mots

## LV1 - ANGLAIS

DURÉE : 4 HEURES.

*(La note sur 80 sera divisée par 4 pour obtenir la note sur 20, les deux chiffres après la virgule arrondis au dixième supérieur.)*

*Les candidats ne sont pas autorisés à modifier le choix de la première langue dans laquelle ils doivent composer.*

*Ils ne doivent faire usage d'aucun document, dictionnaire ou lexique (sauf pour le latin ou l'usage d'un dictionnaire latin-français est autorisé) ; l'utilisation de toute calculatrice ou de tout matériel électronique est interdite.*

*Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.*

## SUJET

## HOW NOT TO TREAT BRAND BRITAIN

1

The campus of Department of Management Studies (DMS) is a vision of India's future disguised as the past. Shoeless gardeners sprawl on dusty grass or haul ancient mowers. Yet the business school, a faculty of the elite Indian Institute of Technology in Delhi, is one of India's best and its students among India's – which means the world's – brightest and most driven.

5

10

Oxford and Cambridge accept one in five of their applicants. The DMS interviews 3,000 candidates for 65 places. All computer aces – the school specialises in data analytics – its students are typically in their mid-twenties and have spent a couple of years with a top Indian technology company. After their MBA, they go on to global IT or consulting firms, such as Accenture or KPMG. They are the sort of high-flying Indians who helped build Silicon Valley, are remaking India's global image and whom David Cameron yearns to impress. Wooing the new India is “at the top of the priorities of the UK's foreign policy,” the prime minister told his Indian counterpart, Narendra Modi, on November 16th. The DMS is therefore a good place from which to gauge his progress.

15

20

A group of students gathered to enlighten your columnist after hearing a pitch from an American analytics firm. [...] All the students wanted to work abroad, where “the levels of innovations are much higher than in India.” Two-thirds wanted to work in America, and a third in Europe, which generally meant Britain. Of 34 students, 21 had a “strongly positive” impression of Britain and nine a “positive” one. [...] This sunny view was not mainly for professional reasons; asked how they felt about Britain as a place to study and work, only one felt “strongly positive” and 14 “positive”. Their regard was mainly cultural: “I'm not an extrovert”, said Konark, who had visited both countries, “so I prefer British manners to American ones.”

25

None of the students was interested in India's colonial past, but many liked the shared inheritance it had left: "Our political system and institutions are from Britain", said Rahul. Just as Britons often overestimate how well they understand India because of this, so the students had one or two odd notions. "Traditionally, Irish and Scots like India but the English and Welsh don't," said Abhishek confidently. Yet the advantage Britain enjoys from its far-flung culture was more obvious. It was the country most of the students most wanted to visit on holiday – to see Stonehenge, Old Trafford, the home of Manchester United, and Lord's Cricket Ground. [...]

Yet there was a cloud on their western horizon, in the form of Mr Cameron's immigration policy. As Britain's visa regime has tightened on his watch, the number of Indians studying in British universities has more than halved. Rahul was offered a place by the London School of Economics, but denied a visa to take it up – "because they didn't think I would leave, even though I go to one of the best business schools in India," he said crossly. Most said Britain was still accessible for study but, because foreign students must find employment within a month of graduating, hard to work in. "Study abroad is a long-term thing for us because we need to work to pay off the debt," Utsav complained. "So people are less interested in going to the UK," said Pavan. Half the students had a more negative view of Britain because of this. Only three realised Mr Cameron wanted to improve British-Indian ties, and one assumed that meant "trying to sell us jet fighters".

Senior Tories acknowledge the problem. When Mr Cameron, in opposition, pledged to bring annual net migration below 100,000, Britain's net immigration from EU countries, which it cannot control, was around 60,000. Because of the euro crisis, it has soared, to around 130,000 immigrants this year, forcing the Tories to squeeze non-EU immigration in a failing effort to keep their pledge. This is self-defeating. On his first visit as prime minister, Mr Cameron dared to imagine a new "special relationship" with India; one two later trips he was barracked over visas. Viewed generously, his recent pledge to curtail EU freedom of movement is an effort to fix this. "If we have fewer low-skilled Europeans we'll have more high-skilled Indians," says a Tory minister. But that is not straightforward. With other European governments primed to slam Mr Cameron's proposals, which he promises to unveil shortly, it risks leading Britain out of the EU.

*The Economist*, Nov 22nd 2014.

## I. VERSION

(sur 20 points)

Traduire à partir de : "Senior Tories" ... jusqu'à "... leading Britain out of the EU."  
(lignes 46 à 57)

## II. QUESTIONS

(sur 40 points)

### 1. Question de compréhension du texte

Explain what the following sentence means:

"None of the students was interested in India's colonial past, but many liked the shared inheritance it had left." (lignes 26-27)

(100 mots + ou – 10 %\* ; sur 10 points)

**2. Question de compréhension du texte**

Explain what the following sentence means:

“As Britain’s visa regime has tightened on his watch, the number of Indians studying in British universities has more than halved.” (lignes 35-36)

(100 mots + ou – 10 %\* ; sur 10 points)

**3. Question d’expression personnelle**

To what extent does a country’s reputation have an impact on its economy?

(300 mots + ou – 10 %\* ; sur 20 points)

\* Le non-respect de ces normes sera sanctionné. Indiquer le nombre de mots utilisés.

**III. THÈME**

(sur 20 points)

(traduire le titre)

**Ashford, terre d’élection pour les jeunes Français**

Depuis sept ans, deux fois par jour, Fabien Henissart change de pays, traverse la mer et décale sa montre d’une heure, dans un sens puis dans l’autre. « *Question d’habitude* », sourit ce Boulonnais de 40 ans. Chaque matin, il saute dans sa voiture, prend quelques collègues au passage et file vers le tunnel sous la Manche. Ensemble, ils empruntent le Shuttle et trente-cinq minutes plus tard, rejoignent Ashford, première ville britannique à la sortie du tunnel. C’est là que se trouve SBE-UK, la société d’électronique qui les emploie. « *Porte à porte, c’est une heure trente de trajet : pas plus que si je devais me rendre à mon travail en région parisienne* », assure Fabien, responsable technique. S’il gagne une heure à l’aller, il en perd une au retour, et rentre rarement chez lui avant 20 heures. Mais pour rien au monde il ne changerait de vie.

*Le Monde*, 28 août 2014.

## CORRIGÉ

Par Alain Goudot, professeur de Chaire supérieure d'anglais en CPGE économique et commerciale au lycée Bellepierre à Saint-Denis de la Réunion.

IENA

CORRIGÉ

### I. VERSION

---

Les ténors du parti conservateur admettent ce problème. Quand Monsieur Cameron, alors dans l'opposition, fit la promesse de faire baisser le taux de migration net annuel au-dessous de 100 000, l'excédent migratoire en provenance des pays de l'UE, que la Grande-Bretagne ne peut contrôler, avoisinait 60 000. A cause de la crise de l'Euro, il est monté jusqu'à 130 000 immigrants environ cette année, obligeant les Conservateurs à réduire les flux migratoires des pays hors de l'UE, dans une vaine tentative de tenir leur promesse. C'est une stratégie contre-productive. Lors de sa première visite en Inde en tant que Premier Ministre, Monsieur Cameron osa imaginer une nouvelle « relation privilégiée » avec l'Inde ; au cours de deux visites ultérieures, il fut violemment critiqué au sujet des visas.

Sa promesse récente de restreindre la liberté de circulation dans l'UE est un effort de règlement de ce problème, selon un point de vue partisan. « Si nous accueillons moins d'Européens peu qualifiés, nous aurons plus d'Indiens très qualifiés » observe un ministre Tory. Mais ce n'est pas simple. Confrontés à d'autres gouvernements européens prêts à descendre en flammes les propositions de Monsieur Cameron, qu'il promet de bientôt révéler, cette politique risque de faire sortir la Grande-Bretagne de l'Union européenne.

### III. THÈME

---

#### Ashford, a chosen home for young French people

For seven years, twice a day, Fabien Henissart has travelled from one country to the other, crossed the sea and set his watch ahead one hour and then back. "You get used to it" / "It's just a question of habit" says the forty-year-old man from Boulogne with a smile. Every morning, he jumps into his car, picks up a few colleagues on his way and makes for / heads for the Chunnel. Together they drive onto the shuttle and thirty-five minutes later, they reach Ashford, the first British town at the exit of the Chunnel. This is where the electronics company SBE-UK, which they work for, is located. "From door to door, it is a one hour and thirty minute trip: no longer than if I had to go to work in the Paris area", claims Fabien, a technical manager. If he gains one hour on his trip to England, he loses one on the return journey / on his way back and rarely gets back home before 8 pm. But for nothing in the world would he change his way of life.

SCIENT. ECO. TECHNO. KHÂGNE

LV1 - ANGLAIS

# LV1 - ANGLAIS

**DURÉE : 4 HEURES.**

*Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document, dictionnaire ou lexique ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.*

## 1. TRADUCTIONS

**DURÉE DE L'ÉPREUVE : 2 HEURES.**

### I. TRADUCTION DE FRANÇAIS EN ANGLAIS

Ce furent de bonnes vacances. Les choses étaient plus faciles qu'à Bois-Colombes, pas seulement entre nous, en général. Sur la plage, je restais allongée près de Simone pendant que Philippe s'initiait à la plongée. Nous ne parlions à personne, ne cherchions pas à faire de nouvelles connaissances, il n'y avait pas à expliquer pourquoi cette mère passait ses vacances seule avec ses enfants, au contraire, si la situation paraissait insolite à un commerçant, à un voisin de place, cela laissait planer sur nous un mystère peut-être douloureux et respectable. A la gare de Collioure, voyant cette mère s'épuiser à porter une lourde valise, un homme s'était offert de l'aider. Comme il avait saisi la valise et nous précédait, elle avait murmuré « Ah, quand même ! » parce qu'il est vrai, je l'avais remarqué aussi, il nous avait observés quelques secondes avant de se décider à traverser le hall pour nous rejoindre. J'avais eu peur qu'il n'ait entendu la réflexion et une fois de plus j'en voulais à ma mère d'être décidément grincheuse. Mais quand il fut parti, elle manifesta son contentement, ce n'était pas à Paris que les gens se seraient montrés aussi serviables. Et je voyais bien qu'elle était flattée d'avoir eu affaire à un homme galant.

Catherine Millet, *Une enfance de rêve*, Flammarion, 2014.

### II. TRADUCTION D'ANGLAIS EN FRANÇAIS

Rolling silently off the bed and creeping across the corridor, Kit threw on a pair of flannels and a sports jacket, detached his cell-phone from its charger and dropped it into his jacket pocket. Pausing at the door to Emily's bedroom for sounds of waking, and hearing none, he tiptoed down the back staircase to the kitchen to make himself a pot of coffee, and essential prerequisite for putting his master plan into effect: only to hear his daughter's voice addressing him from the open doorway leading to the orchard.

'Got a spare mug on you, Dad?'

Emily, back from her morning run with Sheba.

At any other time, Kit would have relished a cosy chat with her: not just

on this particular morning, though he was quick to sit himself opposite her at the pine table. As he did so, he caught sight of the purpose in her face and knew she had turned back from her run when she spotted the kitchen lights on her way up Bailey's Hill.

'Mind telling me what's going on exactly, Dad?' she enquired crisply, ever bit her mother's child.

'Going on?' – lame smile. 'Why should anything be going on? Your mum's asleep. I'm having a coffee.'

But nobody fobs off Emily. Not these days. Not after that scoundrel Bernard two-timed her.

'What happened at Bailey's yesterday?' she demanded. 'At the leather stall. You knew the man but you wouldn't acknowledge him. He called you Paul and left some foul note in Mum's handbag.'

John Le Carré, *A Delicate Truth*, Viking, 2013.

## 2. EXPRESSION ÉCRITE

**DURÉE DE L'ÉPREUVE : 2 HEURES.**

There is a certain type of joy only felt the first time one makes history, and you can't really describe to anyone who hasn't experienced it. Yesterday about 10,000 young people from across the country discovered what it's like.

19 November 2014, the date of the Free Education march, will surely be remembered as the start of a new student movement. Without the support of any major party or institution, abandoned even by their own National Union of Students, organisers nonetheless managed to mobilise thousands, including teenage college students and schoolchildren, supported by a smattering of veterans from the mobilisation of 2010.

Still, unlike the occupiers of 2010, this was not a defensive action, not a call to halt the cuts, students were calling for a complete reversal of the entire direction of higher education policy – and by extension, the direction this society as a whole has taken – for the last 30 years.

The authorities seemed at a loss what to make of it. At Parliament Square, marchers brushed past layers of fences and police squads defending the entrance to no avail; they snaked in columns through the surrounding lanes, outwitting would-be kettles (1); they lit flares and sparklers, splattered paint across the doors of the entrance to the Department for Business, Innovation and Skills, and generally made a playground of the corridors of state. The whole spirit was one of ebullient contempt for the pretensions of power; an action that, despite some scuffles and arrests, resulted in no serious injuries, or even any serious property damage.

Organisers left full of plans, including a day of occupations on 3 December, plus a day of community outreach on 6 December, with visions of larger and more radical actions (possibly a Quebec-Style student strike) in the months to come.

Where did this newfound sense of confidence come from? Despite the grinding burden of debt being imposed on a new generation of students, there's also an understanding that, in intellectual terms, the other side has simply lost the battle. There are virtually no good arguments left for the current system. If ever a "reform" has been proved an utter failure, the higher education reforms of 2010 are surely it. As Andrew McGettigan has pointed out, they've managed to cost the government money, and create mass student indebtedness at the same time. The loan policy in particular is a flaming catastrophe.

But even a moment's reflection shows the reforms could never really have been about economic efficiency. These were the new government's first reaction to the financial crash of 2008. In that year, the education system was trundling along perfectly serviceably. The financial system, in contrast, performed its job so badly that it came very close to causing global economic collapse. Common sense would dictate that if there was to be a reform, it should be to make the financial system more like education – not the other way round.

The only way to explain why the coalition took the opposite course is to recognise what happened as an ideological offensive; a kind of pre-emptive strike against any possible alternative. In that one moment, it was revealed that almost everything we had been told about self-regulating markets and the wisdom of the investor class had been a lie. About the only argument left for the system was that there was nothing else. And historically, from where are alternative visions and movements to bring them into being more likely to emerge than from institutes of higher learning?

The Brown review, on which the reforms were based, proceeded from the assumption that no student pursues education because of a desire to understand the world, but only to maximise their overall life income. At the time, nothing could have been further from the truth. But it was used as a pretext to create policies of engineered mass indebtedness, designed to make it impossible for students to approach education any other way. The fact that turning young graduates into debt peons could only have the effect of stifling the imaginations and creativity of a generation – to obvious deleterious economic effects – was not considered an impediment; it fact, it was precisely the point.

Claims that this country somehow cannot afford free higher education should be treated with exactly the contempt the students showed them yesterday. It's ridiculous to pretend that Scotland, Ireland, or Mexico can afford free universities, but somehow England can't. Germany has already abandoned its failed experiment with tuition fees. If England did the same, and managed it well, it would probably save us money.

But in a way that isn't the point. It would also change the course of history. It would be a way of reminding ourselves that education doesn't just exist for the sake of the economy, the economy exists to give us the means to pursue education. It is ironic that we are reduced to a situation where it is our children who have to point this out to us, as our adult leaders descend to the moral equivalent of Vandals, Goths, and Huns.

(1) areas where police enclose groups of demonstrators to contain violence.

David Graeber, *The Guardian online*, Thursday 20 November 2014.

**Répondre en ANGLAIS aux questions suivantes :**  
**(Environ 250 mots pour chaque réponse)**

1. According to the author of the text, what interpretation may be given for the Free Education march staged in London in November 2014?  
 Answer the question in your own words.
2. Do you agree that in English-speaking countries higher education exists mainly for the sake of the economy?  
 Justify your answer.

## CORRIGÉ

*Par Philippe Rayet, agrégé d'anglais, professeur en classes préparatoires au lycée Notre-Dame du Grandchamp à Versailles.*

### I. TRADUCTION DU FRANÇAIS À L'ANGLAIS

Those were nice holidays. Things were (much) easier than in Bois-Colombes, not only between us but in general. On the beach I would stay stretched out [lying] beside Simone while Philippe was trying to learn how to dive. We never spoke to anybody, never tried to make new acquaintances [to meet new people]. There was no need to explain why mother spent her holidays alone with her children. On the contrary, if the situation seemed (to be) unusual to a shopkeeper or a person next to us [or one of our neighbours] on the beach, it did allow some mystery around us, perhaps something painful that might earn us people's respect. At Collioure railway station, a man seeing mother exhausting herself carrying the heavy suitcase (had) kindly offered to help (her). As he had taken [got] hold of the suitcase and was walking ahead of us, she (had) whispered, "Ah! At last!" Because actually – I had noticed it too – he had been watching us for a few moments before he finally made up his mind to cross over the hall to us. I was afraid he had overheard her words, and once again I bore [had] a grudge against my mother for always being that [so] grumpy. However, once he was gone, she showed her satisfaction; it was not in Paris that people would have proved (themselves) [would have shown themselves] (to be) so helpful. And I could perfectly see that she was (most) flattered to have been noticed by such a gallant [courteous] man.

*Catherine Millet, Une enfance de rêve, 2014.*

### II. TRADUCTION DE L'ANGLAIS AU FRANÇAIS

Sans faire de bruit, Kit se laissa glisser hors de son lit et traversa le couloir à pas de loup, puis il enfila à la [en toute] hâte un pantalon de toile [de flanelle] et une veste sport, débrancha son téléphone portable du chargeur et le fourra dans la poche de sa veste. Il s'arrêta devant la porte de la chambre d'Emily et tendit l'oreille pour savoir si elle était réveillée. N'entendant pas de bruit, il descendit l'escalier de service sur la pointe des pieds et alla dans la cuisine se faire du café – condition *sine qua non* de la mise en œuvre de son plan –, mais il entendit la voix de sa fille s'adresser à lui par la porte ouverte qui donnait sur le verger :

« T'en aurais pas une tasse en rab pour moi, Papa ? »

C'était Emilie, qui revenait de son (petit) jogging matinal avec Sheba (sur les [ses] talons). A tout autre moment, Kit eût [aurait] été heureux de faire un brin de causette avec sa fille mais vraiment pas\* ce matin-là. Pourtant, il s'installa aussitôt en face d'elle à la table en (bois de) pin. Ce faisant, il remarqua son air résolu et comprit qu'elle avait rebroussé chemin quand elle avait aperçu la lumière de la cuisine alors qu'elle gravissait la colline de Bailey.

- Ça t'ennuierait de me dire ce qui se passe au juste [exactement], Papa ? lui demanda-t-elle sèchement [d'un ton sec], en digne fille de sa mère.

- Ce qui se passe ? répéta-t-il avec un semblant de sourire [en esquissant un sourire]. Pourquoi se passerait-il [Pourquoi voudrais-tu qu'il se passe] quelque chose ? Ta mère dort et moi, je bois mon café.

Mais on n'emboîrait pas Emilie comme cela. Plus maintenant. Plus depuis que ce salaud de Bernard l'avait trompée.

- Qu'est-ce qui s'est passé, hier, à la foire de Bailey ? insista-t-elle. Au stand de la maroquinerie. Tu connaissais cet homme mais tu as fait comme si ce n'était pas le cas. Il t'a appelé Paul et a laissé un mot insultant [choquant] dans le sac à main de Maman.

John Le Carré, *A Delicate Truth*, 2013.

\* "not just" dans le sujet du concours semble incohérent. On lit, en effet, "just not" dans l'ouvrage original.

# LV1 - ALLEMAND

**DURÉE : 4 HEURES.**

*(La note sur 80 sera divisée par 4 pour obtenir la note sur 20, les deux chiffres après la virgule arrondis au dixième supérieur.)*

*Les candidats ne sont pas autorisés à modifier le choix de la première langue dans laquelle ils doivent composer.*

*Ils ne doivent faire usage d'aucun document, dictionnaire ou lexique (sauf pour le latin ou l'usage d'un dictionnaire latin-français est autorisé) ; l'utilisation de toute calculatrice ou de tout matériel électronique est interdite.*

*Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.*

## SUJET

### DER NEUE DEUTSCHE PAZIFISMUS

1 Deutschland diskutiert über Bodentruppen gegen die Terrororganisation „Islamischer Staat (IS)“. Die Grünen haben im Bundestag diesen spektakulären Vorschlag gemacht, der Wellen schlägt.

5 Das weckt Erinnerungen an den Kosovo-Konflikt Ende der neunziger Jahre. Es war eine bedeutsame Zäsur in der Geschichte der Republik. Erstmals beteiligten sich Bundeswehrsoldaten nämlich an einem Kampfeinsatz. Inzwischen ist der deutsche Pazifismus ausgeprägter als damals. Deshalb liegen zwischen dem Vorschlag und seiner Realisierung hohe Hürden. Die erste ist das UN-Mandat, das die Grünen zur Voraussetzung für einen Militäreinsatz in Syrien fordern. In diesem Fall müsste man zuvor Russland und China davon überzeugen, das Vorhaben  
10 zumindest nicht zu blockieren.

Das nächste Hindernis ist das kategorische Nein der Bundesregierung, die nicht einmal eine Beteiligung an den Luftschlägen gegen den „IS“ erwähnt hat. Und schon die materiellen Probleme der Bundeswehr würden einen Syrien-Einsatz  
15 in Frage stellen. Auch wenn sich die Transportfrage lösen ließe, welches Bundeswehrbataillon wäre vorbereitet auf den Kampf gegen die Terrorkrieger?

Anfang 2014 forderte Bundespräsident **Joachim Gauck** ein klares internationales Engagement Deutschlands. Mit bekannten Argumenten: von der klassischen Diplomatie über humanitäre Hilfe bis hin zur entwicklungspolitischen  
20 Kooperation. Erst zum Schluss forderte er auch die Bereitschaft, deutsche Soldaten an internationalen Einsätzen zu beteiligen, wenn alle anderen Mittel zur Konfliktbekämpfung erfolglos seien. Doch mit diesem Anspruch liegt der populäre Präsident konträr zur deutschen Stimmungslage, denn die Mitverantwortung bei der militärischen Krisenbewältigung gilt inzwischen als riskant, kontraproduktiv,  
25 ja gar unmoralisch. Auch die „Große Koalition“ ist entschlossen, sich neuen mili-

tärischen Herausforderungen zu entziehen. Die Entscheidung für eine Beteiligung in Afghanistan im Jahr 2001 war die letzte ihrer Art.

30 Das erklärt, warum eine Beteiligung der Bundeswehr an den Luftangriffen gegen den „IS“ nicht einmal diskutiert wurde. Die 17 internationalen Einsätze, an denen die Bundeswehr derzeit beteiligt ist, ändern daran wenig. Es handelt sich bei ihnen hauptsächlich um kleine technische oder humanitäre Hilfsoperationen, Ausbildungs- oder Überwachungsmissionen.

35 In den letzten Jahren gab es bereits einige Indizien für diese Tendenz: die Enthaltung im UN-Sicherheitsrat beim Libyen-Einsatz, das Drängen der schwarz-gelben Bundesregierung auf ein schnelles Ende des Afghanistan-Einsatzes, das Plädoyer der Bundeskanzlerin, lieber Regionalmächten mit Waffen und Ausbildung zu helfen, als mit eigenen Soldaten zu intervenieren. Der aktuelle Stand des deutschen Desengagements erinnert an die Zeit nach der Einheit. Als im Dezember 40 1990 die gerade souverän gewordene Bundesrepublik vor der Frage stand, wie sie sich am 2. Golfkrieg beteiligen werde, war klar: auf keinen Fall militärisch. Zu lebendig war der Nachkriegspazifismus, der sich zum einen aus historischer Schuld, zum anderen aus der Gewissheit speiste, dass Krieg in Zeiten der Blockkonfrontation die nukleare Katastrophe bedeutet hätte.

45 Erst der Bürgerkrieg in Jugoslawien mit seinen 200.000 Toten, den ethnischen Vertreibungen und Massakern bewirkte die Neuorientierung. Dann folgte die Beteiligung am Krieg gegen Serbien. Zwei Jahre später, nach den Anschlägen des 11. September, schickte die Bundesregierung deutsche Soldaten nach Afghanistan. Der Antimilitarismus der Nachkriegszeit wurde von einem skeptischen Interventionismus abgelöst.

50 Die Revision kam mit dem Irakkrieg 2003. Die Rot-Grüne Koalition antwortete auf **George Bushs** militärisches Abenteuer mit einem kategorischen Nein. Mit Recht, denn der Irakkrieg erwies sich als ein Desaster, das bis heute alle militärischen Intentionen delegitimiert: eine Lüge als Begründung, Tausende von zivilen Opfern, die Entfesselung eines Bürgerkriegs, die Destabilisierung der ganzen Region. Und „Afghanistan“ gilt allgemein als teurer, blutiger Fehlschlag. 55 Dabei übersieht man, wie die Entwicklung ohne das militärische Engagement verlaufen wäre.

60 Besonders aktuell ist im Krisenjahr 2014 ein Argument, das vor zwanzig Jahren schon gegen humanitäre Interventionen vorgebracht wurde: Man wisse gar nicht, wo man mit dem Intervenieren beginnen und wo man aufhören solle. Mit der Inflation der Krisenherde wächst die Überforderung. Doch die Tatsache, dass unsere Mittel und der materielle Zustand der Bundeswehr nicht ausreichen, um in allen humanitären Brandzonen die Menschenrechte zu verteidigen, hindert uns nicht daran, es zu versuchen.

Nach einem Artikel von Matthias GEIS « *DIE ZEIT* », n° 43, 19 Oktober 2014.

**I. VERSION***(sur 20 points)*

Traduire le titre et les paragraphes 2 et 3, depuis : «Das weckt Erinnerungen an den Kosovo-Konflikt Ende der neunziger Jahre ...» jusqu'à : «... welches Bundeswehrbataillon wäre vorbereitet auf den Kampf gegen die Terrorkrieger?» (de la ligne 4 à la ligne 16)

**II. QUESTIONS***(sur 40 points)***1. Question de compréhension du texte**

Was erklärte den deutschen „Antimilitarismus der Nachkriegszeit“ und warum wurde er durch einen „skeptischen Interventionismus“ ersetzt?

*(100 mots + ou – 10 % \* ; sur 10 points)***2. Question de compréhension du texte**

Inwiefern betrachten viele Deutsche heute die „militärische Krisenbewältigung als riskant, kontraproduktiv, ja gar unmoralisch“?

*(100 mots + ou – 10 % \* ; sur 10 points)***3. Question d'expression personnelle**

Sollen/Können die westlichen Länder die Rolle des „Gendarmen der Welt“ spielen und somit ihr Modell der Demokratie exportieren?

*(300 mots + ou – 10 % \* ; sur 20 points)*

*\* Le non-respect de ces normes sera sanctionné.*

*(Indiquer le nombre de mots sur la copie après chaque question.)*

**III. THÈME***(sur 20 points)***Mödlareuth, le « petit Berlin », se remémore sa chute du Mur**

*Mödlareuth*, un village d'environ 50 habitants, est situé à la frontière entre la Thuringe et la Bavière. C'était déjà depuis le <sup>xix</sup><sup>e</sup> siècle une étrangeté : une seule communauté célébrant unie les fêtes du village, mais qui dépendait administrativement de deux Länder distincts !

La limite géographique était formée par un petit ruisseau passant au milieu du bourg. En 1966, celle-ci se transforma en frontière nette entre la République fédérale d'Allemagne et sa voisine communiste, la République démocratique allemande, avec un mur de béton de 700 mètres de long gardé jour et nuit...

« Je n'aurais jamais imaginé que je vivrais le jour où le Mur tomberait », confie l'ancien maire. « C'était fantastique. Le 9 décembre 1989, c'est devenu réalité. Le sentiment d'unité qui existait avant le Mur était intact, les gens se sont embrassés et c'était comme si le village n'avait jamais été divisé. »

D'après un article d'Estelle PEARD, « *LE POINT* », 31.10.2014\*.

*\* (Ces références ne sont pas à traduire.)*

# CORRIGÉ

Par Jean-Gilbert Delarbre, professeur de Chaire supérieure au lycée Michelet à Vanves.

## I. VERSION

### Le nouveau pacifisme allemand

L'Allemagne débat sur l'envoi de troupes au sol contre l'organisation terroriste « Etat Islamique (EI) ». Ce sont les Verts qui ont avancé au Bundestag cette proposition spectaculaire qui crée des remous.

Cela réveille les souvenirs du conflit au Kosovo dans les années 90. C'était là une césure importante dans l'histoire de la RFA. Pour la première fois en effet des soldats de l'armée fédérale prenaient part à une opération de combat. Depuis lors, le pacifisme allemand est encore plus prononcé. C'est pourquoi les barres à franchir entre la proposition et sa réalisation sont hautes. La première est le mandat de l'ONU, condition nécessaire réclamée par les Verts à une intervention militaire en Syrie. En l'espèce, on devrait convaincre au préalable la Russie et la Chine d'au moins s'abstenir pour ne pas bloquer le projet.

L'obstacle suivant est le non catégorique opposé par le gouvernement fédéral qui n'a même pas évoqué une participation aux frappes aériennes contre l'« EI ». Il n'est pas jusqu'aux problèmes matériels de la Bundeswehr qui ne compromettent une intervention en Syrie. A supposer encore qu'on puisse résoudre la question du transport, quel bataillon de l'armée allemande serait prêt à combattre des guerriers terroristes ?

D'après un article de Matthias GEIS, « DIE ZEIT », N° 43-19 octobre 2014.

## III. THÈME

### Mödlareuth, das « Kleinberlin » gedenkt des Mauerfalls

Mödlareuth, ein Dorf von etwa 50 Einwohnern, liegt an der Grenze zwischen Thüringen und Bayern. Es war schon seit dem neunzehnten Jahrhundert ein Sonderfall : Eine einzige Gemeinde feierte geschlossen die Dorffeste, wo sie doch verwaltungsmäßig zu zwei verschiedenen Ländern gehörte!

Die geographische Grenze bildete ein Bächlein, das durch die Ortschaft floss. 1966 verfestigte sie sich durch eine 700 Meter lange Betonmauer, die die BRD von ihrem kommunistischen Nachbarstaat scharf trennte und Tag und Nacht überwacht wurde...

„Ich hätte nie gedacht, dass ich den Tag des Mauerfalls je erleben würde“, gibt der ehemalige Bürgermeister zu. „Es war Wahnsinn“. Am 9. Dezember 1989 wurde es Wirklichkeit. Das Zusammengehörigkeitsgefühl, das vor dem Mauerbau existierte, war intakt, die Menschen haben einander umarmt und es war, als wäre das Dorf nie geteilt gewesen.

Nach einem Artikel von Estelle PEARD, « Le POINT », 31.10.2014.

# LV1 - ALLEMAND

**DURÉE : 4 HEURES.**

*Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document, dictionnaire ou lexique ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.*

*En matière d'orthographe, les graphies antérieure et postérieure à la réforme sont acceptées.*

## 1. TRADUCTIONS

**DURÉE DE L'ÉPREUVE : 2 HEURES.**

### I. TRADUCTION DU FRANÇAIS EN ALLEMAND

Le téléphone avait sonné vers quatre heures de l'après-midi chez Jean Daragane, dans la chambre qu'il appelait le « bureau ». Il s'était assoupi sur le canapé du fond, à l'abri du soleil. Et ces sonneries qu'il n'avait plus l'habitude d'entendre depuis longtemps ne s'interrompaient pas. Pourquoi cette insistance ? A l'autre bout du fil, on avait peut-être oublié de raccrocher. Enfin, il se leva.

« J'aimerais parler à M. Jean Daragane »

Une voix molle et menaçante. Ce fut sa première impression.

« Lui-même »

– C'est au sujet de votre carnet d'adresses, Monsieur. »

Il l'avait perdu le mois dernier dans un train qui l'emmenait sur la Côte d'Azur. Oui, ce ne pouvait être que dans ce train. Le carnet d'adresses avait sans doute glissé de la poche de sa veste au moment où il sortait son billet pour le présenter au contrôleur.

« J'ai trouvé un carnet d'adresses à votre nom. Je vous le rapporte à votre domicile. Le jour et l'heure que vous voudrez ».

« Je préférerais que nous nous rencontrions à l'extérieur ».

Il avait fait un effort pour surmonter son malaise. Mais sa voix, qu'il aurait voulu indifférente, lui sembla brusquement une voix blanche.

Patrick Modiano, *Pour que tu ne te perdes pas dans le quartier*, Gallimard, 2014, p.1-2.

### II. TRADUCTION DE L'ALLEMAND AU FRANÇAIS

Der Abstand zwischen Ost und West war zwar groß und die Aufgabe damit anspruchsvoll, denn immerhin musste die Produktivität in etwa verdreifacht beziehungsweise verdoppelt werden. Aber mit neuesten Maschinen, mit einer modernisierten Ausbildung, mit viel Fleiß und mit der hohen Motivation, die alle hatten, würde das wohl schon klappen. Jedenfalls innerhalb von ein paar Jahren.

Soweit die Vorstellung. Ein großer Irrtum, der zur bitteren Illusion wurde. Ob diese vermeidbar war, muss offenbleiben. Wahrscheinlich war sie es nicht. Heutzutage gieren Politik und Öffentlichkeit nach Zahlen. Und wenn die Wissenschaft sich geweigert hätte, Zahlen zu liefern, dann hätten andere geliefert – mit noch schlimmeren Folgen. Allerdings waren im Fall der Deutschen Einheit die Folgen schlimm genug: Millionen von ostdeutschen Arbeitskräften mussten schon nach wenigen Jahren feststellen, dass die Welt nach ganz anderen Gesetzen funktionierte, als es 1990 den Anschein hatte.

Aber zurück zur Ausgangslage. Wenn schon nicht eins zu drei oder eins zu zwei, wie groß war dann 1990 der West-Ost-Abstand in der wirtschaftlichen Leistungskraft? Die ehrliche Antwort lautet: Wir wissen es nicht. Mehr noch: Wir können es gar nicht wissen. Warum? Weil die vier Dekaden deutscher Teilung zu Veränderungen geführt hatten, die sich jenseits der messbaren Statistiken abspielten.

Zu Beginn der deutschen Teilung gegen Ende der 1940er-Jahre sind West und Ost noch immer in ähnlicher Lage. Der Westen kehrt zurück in die marktwirtschaftliche, kapitalistische Welt, wie sie zuletzt in Deutschland in den 1920er-Jahren bestanden hatte.

Karl-Heinz Paqué, Die Bilanz.  
*Eine wirtschaftliche Analyse der deutschen Einheit*,  
Hanser 2009.

## 2. EXPRESSION ÉCRITE

**DURÉE DE L'ÉPREUVE : 2 HEURES.**

### **Mein Land ist weg! Eine Polemik von Christoph Schröder**

Mit der Deutschlandfahne und einem Transparent „Deutschland Einig Vaterland“ steht am Silvesterabend des Jahres 1989 ein Mann auf der Terrasse seines Hauses hoch über dem Rhein. Im Hintergrund läuft die Neujahrsansprache des Bundeskanzlers. „Das vor uns liegende Jahrzehnt kann für unser Volk das glücklichste des Jahrhunderts werden“, sagt der Kanzler. Der Mann hört nicht länger hin, sondern verliert sich in seinen Gedanken. Das glücklichste aller Jahrzehnte, so lautet sein Fazit, liegt nicht vor uns, sondern geht gerade zu Ende. Die Achtziger, ausgerechnet, die viel gescholtenen<sup>1</sup>.

Eine Romanszene, die sich der Schriftsteller Jochen Schimmang für seinen Roman *Das Beste, was wir hatten* ausgedacht hat. Eine Szene mit hohem Symbolcharakter. Kürzlich war in einem der vielen nun zum 25. Jahrestag des Mauerfalls veröffentlichten Texte zu lesen, es existierte nicht nur das Wort „Westalgie“ nicht, sondern auch nicht das dazu gehörende Gefühl. Denn wonach solle man sich sehnen? Ich kann das sehr genau erklären.

Denn erst jetzt, ganz leise, erheben sich schüchtern die Stimmen, die auszusprechen wagen, was im Bewusstsein einer ganzen Generation als Empfindung, die verteidigt werden muss, vorhanden ist: Auch wir hier im Westen haben in den

<sup>1</sup>. gescholten = kritisiert

Jahren nach 1989 unser Land verloren, immer ein Stückchen mehr und mehr. Es ist untergegangen, eliminiert worden und noch dazu verspottet als miefig, eng, spießig und wie sonst die Modeworte der Berliner Republik noch so heißen mögen. [...]

„Wir haben unsere Identität verloren“, brüllt der Ostchor, „unser Land wurde uns genommen mit seinen Errungenschaften, die Vollbeschäftigung, die Frauenrechte“. Stimmt, das einzige, was geblieben ist, sind Männer: das Ampel – und das Sanmännchen. Das ist doch mal eine Bilanz.

Ich habe in Bezug auf dieses Land etwas, was manche vielleicht nicht haben. Ich nenne es mein Deutschlandgefühl. Und es ist mir im Grunde Komplett abhandengekommen. Die alte Bundesrepublik, in der ich aufgewachsen bin, ist ein friedliches Land und ein schönes. Hessen, irgendwo in der Nähe von Darmstadt. Es ist ein Land, in dem ein einziges höheres Beamtengehalt, das mein Vater bezog, ausreichte, um ein Haus zu bauen, eine vierköpfige Familie zu ernähren, zwei Söhne studieren zu lassen und im Alter keine Sorgen zu haben. So funktionierte dieses Land. [...]

Mein Deutschlandgefühl ist ein Sicherheitsgefühl. Die erste Bedrohung meiner Kindheit war der Bau der Startbahn West am Frankfurter Flughafen. Meine konservativen Eltern packten meinen Bruder und mich damals ein und fuhren in den Stadtwald von Mörfelden-Walldorf, wo wir im Hüttendorf saßen, gemeinsam mit den demonstrierenden Umweltschützern, und dem Schriftsteller Peter Härtling zuhören, wie er aus seinen Büchern vorlas. Das war alles. Hat selbstverständlich nichts genutzt; heute donnern die Flugzeuge im Minutentakt über die Köpfe meiner Eltern (und über meinen). Und wie war das noch mal im Großen? Ein Land, dessen größte Gefährdung in einer Bohème-Guerilla wie der RAF bestand, ist ein glückliches Land. Und dass die DDR dann einen Großteil dieser Witztruppe aufgenommen hat, ist eine weitere ironische Pointe der Geschichte. [...] Ich kenne die Einwände: Mir ist vollkommen klar, dass meine Generation, dass wir alle heute für diese Komfortzone bezahlen, die es unseren Eltern ermöglicht hat, ihr friedliches, zufriedenes und abgesichertes Leben zu führen (und uns davon unsere Kindheit zu bezahlen) – abstreiten zu wollen, dass es dieses wunderbare Land mit all seinen Vorzügen gab, ist allerdings absurd. [...]

Womit wir bei einer, wenn nicht der Symbolfigur unseres schönen untergegangenen Landes (beziehungsweise seiner Endzeit) wären: Es schmerzt mich, diesen stattlichen, wuchtigen und einst mächtigen Mann zu sehen, der von seiner Lebensgefährtin im Rollstuhl durch die Gegend geschoben wird, um seine Lebenserinnerungen zu vermakten. Ich kann über Helmut Kohl als Politiker nichts sagen, weil Politik mich nicht interessiert. [...] Ich kann aber, und das ist Teil meines Deutschlandgefühls, sehr deutlich sagen, dass mir ein katholischer, übergewichtiger, sinnenfroher Pfälzer an der Spitze der Regierung jederzeit lieber ist als ein protestantischer ostdeutscher Prediger und ein Pokerface aus Mecklenburg, dessen Fühlen, Denken und Handeln mir vorkommt, als sei es von einem anderen Stern. Es soll Westdeutsche geben, so wird oft von drüben erschreckt konstatiert, die seien noch nie in den neuen Bundesländern gewesen. Wie solle man sich denn dann ein Bild davon machen? Offen gesagt: Manchmal darf einem das Fremde auch fremd bleiben. Und ich war auch noch nie im Saarland. Aber ich war schon in Thüringen und auf dem flachen, sandigen Brandenburger Land und muss sagen, dass es gerade dort echt nicht schön aussieht.

Die angebliche westdeutsche Mehrheitskultur, die sich in den vergangenen 25 Jahren durchgesetzt haben soll – ich kann sie nicht sehen. Die Berliner Republik ist für mich eine ostdeutsche Republik, die mit mir wenig bis nichts zu tun hat; ein zentralistischer Staat mit einer Einheitskultur, dessen föderale Struktur nur noch eine reine Verwaltungssache ist; eine aufgekratzt heitere Partyzone, in der man sich selbst feiert, bevölkert von wirtschaftlich prekären Existenzen. [...]

Man muss einfach einmal ganz deutlich sagen: Wir Westdeutschen hatten das bessere Land. Wir hatten ein Land, das besser war als die DDR vor der Wiedervereinigung, und wir hatten ein Land, das besser war als das, in dem wir heute leben. Ihr, liebe Ostdeutsche, habt es uns genommen. Dafür könnt ihr nichts. Aber hin und wieder etwas mehr Demut wäre schon ganz schön.

*Zeit-Online, 28/10/2014.*

**Répondre en ALLEMAND aux questions suivantes  
(environ 250 mots pour chaque réponse)**

1. Mit welchen Argumenten behauptet der Autor, die ehemalige BRD sei der Verlierer der Wiedervereinigung?
2. Wie steht es Ihrer Meinung nach um die Beziehungen zwischen der 'alten' BRD und den sogenannten neuen Ländern 25 Jahre nach dem Fall der Mauer? Geben Sie aktuelle konkrete Beispiele aus den Bereichen Gesellschaft, Politik und Kultur.

# CORRIGÉ

Par Jean-Gilbert Delarbre, professeur de Chaire supérieure au lycée Michelet à Vanves.

CCIR

CORRIGÉ

## I. TRADUCTION DE L'ALLEMAND EN FRANCAIS

L'écart Est/Ouest était certes considérable et la tâche de ce fait exigeante car il fallait tout de même pratiquement tripler ou du moins doubler la productivité. Mais avec l'aide de machines ultra-modernes, en actualisant la formation, en redoublant d'ardeur et en profitant de la motivation élevée partagée par tous, cela devrait bien réussir – en tous cas au bout de quelques années.

Voilà pour l'idée. Une grosse erreur, qui se mua en illusion amère. Était-elle évitable ? La question ne peut que rester ouverte. Vraisemblablement pas. De nos jours, le milieu politique et l'opinion publique sont avides de chiffres et si la science s'était refusée à livrer des chiffres, d'autres l'auraient fait – avec des conséquences encore plus graves. D'ailleurs, dans le cas de l'unité allemande, les conséquences ne furent que trop graves : des millions de travailleurs est-allemands durent constater après quelques années seulement que le monde fonctionnait selon des lois bien différentes de ce qu'il paraissait en 1990.

Mais revenons à la situation initiale. Si tant est que le différentiel de productivité entre l'Est et l'Ouest n'était pas de un à trois ou même de un à deux, de combien était-il ? Il faut avoir l'honnêteté de répondre : nous ne le savons pas. Bien plus, nous ne pouvons absolument pas le savoir. Pourquoi ? Parce que les quatre décennies de division allemande avaient induit des changements qui échappent à l'économétrie.

A la fin des années 1940, à l'orée de la division de l'Allemagne, l'Est et l'Ouest sont encore dans une situation analogue. L'Ouest revient dans le monde capitaliste de l'économie de marché, tel qu'il a encore existé en Allemagne dans les années 20.

D'après Karl-Heinz Paqué, *Die Bilanz. Eine wirtschaftliche Analyse der deutschen Einheit*, Hanser 2009.

## II. TRADUCTION DE FRANCAIS EN ALLEMAND

Das Telefon hatte gegen vier nachmittags bei Jean Daragane geklingelt, in dem Zimmer, das er das „Büro“ nannte. Er war auf dem Sofa im hinteren, schattigen Teil des Zimmers halb eingeschlafen. Und dieses Klingeln, das er seit lange nicht mehr zu hören gewohnt war, wollte nicht aufhören. Wie war dieses Drängen zu erklären? Am anderen Ende der Leitung hatte man vielleicht vergessen aufzulegen. Schließlich stand er auf.

- Ich möchte Herrn Jean Daragane sprechen.

Eine weiche und bedrohliche Stimme. Soweit sein erster Eindruck.

- Er selbst am Apparat.

- Es geht um Ihr Adressbuch, Herr Dagarane.

Er hatte es vorigen Monat in einem Zug auf der Fahrt an die französische Riviera verloren. Ja, es konnte nur in diesem Zug passiert sein. Das Adressbuch war ihm wohl aus der Jackentasche geglitten, als er seine Fahrkarte herauszog, um sie dem Schaffner zu zeigen.

- Ich habe ein Adressbuch mit Ihrem Namen gefunden. Ich bringe es Ihnen nach Hause. Am Tag und zu der Zeit, die Sie wünschen.

- Mir wäre es lieber, wenn wir uns irgendwo in der Stadt treffen würden.  
Er hatte sich bemüht, sein Unbehagen zu überwinden. Aber seine Stimme, die Gleichgültigkeit vortäuschen wollte, kam ihm plötzlich tonlos vor.

Nach : Patrick Modiano, Pour que tu ne perdes pas dans le quartier, Gallimard, 2014, p. 1-2.

# LV1 - ESPAGNOL

**DURÉE : 4 HEURES.**

*(La note sur 80 sera divisée par 4 pour obtenir la note sur 20, les deux chiffres après la virgule arrondis au dixième supérieur.)*

*Les candidats ne sont pas autorisés à modifier le choix de la première langue dans laquelle ils doivent composer.*

*Ils ne doivent faire usage d'aucun document, dictionnaire ou lexique (sauf en latin ou l'usage d'un dictionnaire latin-français est autorisé) ; l'utilisation de toute calculatrice ou de tout matériel électronique est interdite.*

*Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.*

## S U J E T

### Circulo vicioso, circulo virtuoso

- 1 Estados Unidos, finales del XIX. La corrupción rampante enerva a la ciudadanía, que decide cambiar la infraestructura de sus instituciones: despolitización masiva y establecimiento de las bases de la gestión pública moderna. El objetivo del movimiento reformista no es tanto la corrupción en sí como el problema de fondo
- 5 del que la corrupción es un síntoma: la acumulación de poder decisorio en unas manos que responden a un único interés, el electoral. El medio elegido por el movimiento reformista no es regular minuciosamente la actividad pública, sino, más bien al contrario, liberar las fuerzas creativas de los trabajadores públicos, que, además de convertirse en contrapesos vivos del poder político, obtienen licencia
- 10 para innovar en la prestación de las políticas públicas.  
Italia, finales del XX. La corrupción rampante enerva a la ciudadanía, que decide cambiar a los políticos de siempre por unos nuevos inquilinos que prometen limpiar la política. El objetivo es la lucha directa contra la corrupción, entendida como un crimen. Y el instrumento favorito es la regulación: más controles legales. A diferencia de EE UU, los protagonistas en Italia no son todos los empleados públicos, sino los agentes anticorrupción, sobre todo los jueces. Dos décadas, un Berlusconi y una infinidad de leyes y reglamentos después, Italia sigue lidiando con la corrupción y la ineficiencia en el sector público.
- 15 España, principios del XXI. La corrupción rampante enerva a la ciudadanía, que debe elegir entre la vía americana o la italiana. Tenemos la ventaja de que conocemos el resultado: los países (como los anglosajones o nórdicos) que han cambiado sus infraestructuras públicas, descentralizando, desregulando y empoderando a sus profesionales tienen mejores sectores públicos que aquellos donde se ha dejado intacta la infraestructura institucional del sector público, como Italia. Pero
- 20 tenemos la desventaja de que la vía italiana es muy atractiva.  
La aprobación de leyes específicas contra la corrupción es muy popular, porque da la sensación de que los políticos se preocupan. Sabemos por varios estudios que la respuesta natural de los ciudadanos a la corrupción política es una mayor desconfianza social que, a su vez, se traduce en una mayor demanda de regula-

- 30 ción. Como no me fío de nadie, que nadie mueva un pie sin la debida autorización. La ironía es que una mayor regulación aumenta las oportunidades de captura del Estado por parte de los grupos de interés mejor organizados, lo que se traslada en mayor corrupción, generándose así un círculo vicioso. Corrupción, desconfianza, regulación... y más corrupción. La evidencia, pues, apoya la máxima de Tácito:
- 35 «Cuanto más corrupto es un Estado, más leyes tiene».
- Un ejemplo son las leyes de financiación de los partidos. Italia y España han experimentado varios cambios legislativos y parece que tendrán muchos más, porque siempre hay algún resquicio por el que se pueden colar las ayudas. Por el contrario, otros países han alcanzado la excelencia con leyes muy sencillas o directamente sin ley de financiación de los partidos. Con las instituciones adecuadas, los controles formales no son tan necesarios ¿Para qué va a querer un empresario sobornar a un político si éste no puede otorgar un trato de favor porque necesitaría la aquiescencia de profesionales que trabajan «con» pero no «para» él?
- 40 Son varios los factores que nos empujan hacia el círculo vicioso de corrupción, desconfianza y regulación. Pero, por otra parte, también empezamos a detectar movimientos dentro del sector público – en la Administración local, autonómica y central – que ven en la gestión profesional una alternativa más efectiva para mejorar el funcionamiento de nuestras instituciones. Esos movimientos deben hacerse visibles para presionar a los partidos políticos, donde también existen voces individuales que llevan tiempo demandando un cambio en la infraestructura de nuestro sector público que nos acerque a las Administraciones más modernas. Esas voces se pueden encontrar en todos los partidos, de Podemos al PP, pasando por PSOE y UPyD.
- 45 Para salir del círculo vicioso y entrar en otro virtuoso de corrupción mínima y eficiencia máxima necesitamos agregar esas voces para que fuercen, en el contexto de un pacto de Estado o una reforma constitucional, un cambio en los incentivos de nuestras Administraciones. La sangría de casos de corrupción y de tratos de favor – legales, pero parciales e inmorales – que sufrimos en España sólo se atajará cuando nuestras Administraciones no recompensen tanto la lealtad política o el
- 50 seguimiento de la norma como la reputación y la autonomía profesional.
- 55
- 60

Victor Lapuente Giné, *El País*, 28/10/2014.

## I. VERSION

(sur 20 points)

Traduire depuis « Esos movimientos deben... » jusqu'à « ...autonomía profesional. »  
(lignes 48 à 60)

## II. QUESTIONS

(sur 40 points)

### 1. Question de compréhension du texte

¿En qué se diferencian las iniciativas norteamericana e italiana de lucha contra la corrupción?

(lignes 1 à 18)

(100 mots + ou -\* 10 % sur 10 points)

### 2. Question de compréhension du texte

¿Cómo se explica el círculo vicioso de la corrupción?

(lignes 32-33)

(100 mots + ou -\* 10 % sur 10 points)

**3. Question d'expression personnelle**

¿Qué comentario le sugiere a usted la opinión según la cual, hoy en día en España, «la corrupción rampante enerva a la ciudadanía»?

(ligne 19) (300 mots + ou - \* 10 % sur 20 points)

\* Le non-respect de ces normes sera sanctionné.

(Indiquer le nombre de mots sur la copie après chaque question).

**III. THÈME**

(sur 20 points)

**Ecrans : les effets pervers d'une fascination**

L'affirmation est surprenante : Steve Jobs limitait le temps passé devant les écrans pour ses enfants. Le journaliste Nick Bilton, qui avait recueilli en 2010 cette confiance du patron d'Apple, a voulu en savoir plus. Il a donc interrogé d'autres dirigeants de la Silicon Valley, et appris qu'ils font de même. Tous disent être attentifs, ne pas autoriser les écrans dans la chambre de leurs rejetons et, pour certains, ne pas leur donner de smartphone avant l'âge de 14 ans.

L'information a de quoi étonner, tant les écrans font désormais partie de l'environnement. Depuis la généralisation du petit écran, la question de son impact sur la santé physique et mentale des enfants et adolescents est posée. Ses effets sont très documentés. Avec la multiplication des écrans de tous types, il n'est que plus légitime de s'interroger sur les traces physiologiques et psychiques que ces usages peuvent laisser sur les enfants et adolescents.

Pascale Santi, *Le Monde*, 27/10/14.

# CORRIGÉ

Par Nicolas Léger, professeur d'espagnol à l'institution des Chartreux à Lyon.

## I. VERSION

---

Ces mouvements doivent gagner en visibilité pour faire pression sur les partis politiques où, depuis longtemps, des voix s'élèvent pour demander un changement dans l'infrastructure de notre secteur public, afin de nous rapprocher des Administrations les plus modernes. On peut entendre ces voix dans tous les partis, de Podemos au PP, en passant par le PSOE et UPyD.

Pour passer d'un cercle vicieux à un cercle vertueux de corruption minimale et d'efficacité maximale, ces voix doivent nous rejoindre pour obtenir, dans le cadre d'un pacte national ou d'une réforme constitutionnelle, un changement dans la stimulation de notre Administration. On n'arrêtera l'hémorragie des affaires de corruption et des traitements de faveur – légaux, mais partiels et immoraux – que nous connaissons en Espagne que lorsque notre Administration cessera de récompenser aussi bien la loyauté politique ou l'obéissance à la norme que la réputation et l'autonomie professionnelle.

## III. THÈME

---

### **Pantallas: los efectos perversos de una fascinación**

Es sorprendente la afirmación: Steve Jobs limitaba el tiempo que sus hijos pasaban frente a las pantallas. El periodista Nick Bilton, que había obtenido esa confesión del patrón de Apple, quiso saber más. Preguntó pues a otros dirigentes de la Silicon Valley, y se enteró de que hacen lo mismo. Todos dicen estar atentos/tener cuidado, no autorizar las pantallas en la habitación de sus hijos, y para algunos, no darles un smartphone hasta (que cumplan) los 14 años.

Es un dato llamativo / puede sorprender la noticia, con el lugar que ocupan ahora las pantallas en nuestro entorno/puesto que ahora las pantallas forman parte de nuestro entorno. Desde la generalización de la televisión, se plantea la cuestión de su impacto en la salud física y mental de los niños y adolescentes. Están muy documentados sus efectos. Con la multiplicación de las pantallas de todo tipo, es más que legítimo preguntarse sobre las huellas fisiológicas y psíquicas que esos usos pueden dejar en los niños y adolescentes.

**DURÉE : 4 HEURES.**

*Les candidats ne doivent faire lisage d'aucun document, dictionnaire ou lexique ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*

*Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.*

## 1. TRADUCTIONS

**DURÉE DE L'ÉPREUVE : 2 HEURES.**

### I. TRADUCTION DU FRANÇAIS EN ESPAGNOL

– A toi je ne peux pas mentir. J'ai un secret.

Mon cœur se mit à accélérer. A ces moments-là, il me semble qu'il m'échappe, que jamais je ne pourrai le rattraper.

– Jeanne, je croyais que j'étais mort. Quoi de plus normal à mon âge ? Et puis voilà...

Il se redressa.

– Jeanne, je vais me remarier. Elle s'appelle...

Du doigt, il me fit signe d'avancer mon oreille. Dans laquelle il déposa un prénom.

–... un vrai trésor, un cadeau, tu n'as pas idée.

Une lumière s'était allumée quelque part derrière ses yeux. Une lumière venue de l'intérieur. Une lumière qui ne lui éclairait pas seulement les yeux mais l'ensemble du visage. Il se tût. J'attendis. Patiemment. Comment aurais-je osé interrompre ce rêve éveillé ? Mais j'avais mon enquête à poursuivre. Je voulais comprendre. Je finis par reposer ma question. A voix très basse. Pour qu'elle se glisse en lui sans le blesser.

– Alors, monsieur Henri, personne mieux que vous... forcément... l'amour qu'est-ce que c'est ?

De nouveau, il se tût. Longtemps. Et puis soudain, sans se retourner vers moi :

– L'amour est une conversation...

Il s'interrompit. Repris son souffle.

– L'amour c'est lorsqu'on ne parle qu'à l'autre. Et lorsque l'autre ne parle qu'à toi. Tu verras.

Erik Orsenna, *Les Chevaliers du subjonctifs*, Editions Stock, 2004.

*NB : On ne traduira pas le titre de l'œuvre*

## II. TRADUCTION DE L'ESPAGNOL EN FRANÇAIS

Qué podía yo entender de papeles, si apenas sé leer y casi no soy capaz ni de escribir mi nombre. Hasta carbón nos faltaba algunos días para calentar el puchero. ¿No os acordáis?

- ¿Cómo quieres que me acuerde, si yo no había nacido?
- Pues tu hermana bien que se acuerda, a que sí.
- Como iba a olvidármeme. Ya tenía nueve años cuando acabó la guerra.
- Nueve años y llevabas adelante la casa y cuidabas a tus hermanos como si fueras una mujer, mientras yo andaba por ahí buscando algo de comer y queriendo averiguar si vuestro padre estaba vivo o lo habían fusilado o si lo iban a condenar a veinte años de cárcel.
- Pero si él no había hecho nada.
- Siempre pagan justos por pecadores.
- Pagan los tontos, y vuestro padre lo era. Se lo creía todo. Se creía la propaganda de los del otro lado: «No tendrá nada que temer quien no se haya manchado las manos de sangre.» Y lo mismo que se creía todo los discursos se creyó las mentiras que le contaba Baltasar sobre los billetes que valdrían y los que no valdrían cuando por fin entraran en Mágina las tropas de Franco.
- ¿Y Baltasar cómo podía saber eso?
- Hija mía, pareces más tonta que tu padre.
- Baltasar era un fascista, aunque lo disimulaba.
- Baltasar no era ni rojo ni fascista, era del que estuviera mandando y de quien él pudiera sacar más provecho arrimándose.

Antonio Muñoz Molina, *El viento de la Luna*, Seix Barral, 2008.

NB : On ne traduira pas le titre de l'œuvre.

## 2. EXPRESSION ÉCRITE

**DURÉE DE L'ÉPREUVE : 2 HEURES.**

### El día en que voté miles de veces

He leído que aún hay millones de brasileños que no han decidido si votarán o no en estas elecciones. Ello me ha hecho recordar una anécdota de mi vida pasada cuando las circunstancias hicieron que yo, que no podía votar, acabé haciéndolo miles de veces.

La historia es esta: a mis 40 años nunca había podido ejercer ese mínimo derecho de la democracia de colocar un voto secreto en una urna. Eran los tiempos de la dura dictadura franquista en España que se extendió por 40 años con un balance de más de un millón de muertos. No había partidos ni libertad política. No se votaba.

Yo estaba entonces en Italia trabajando como periodista en la Radio Televisión (RAI). Los italianos, que fueron siempre tan apasionados por la política como por el fútbol, empezaron a perder el gusto de participar en la vida pública desencantados con la corrupción política. Por primera vez muchos italianos dijeron que no iban a ir a votar.

Yo que nunca había podido votar en mi vida, me sentía frustrado y dolido cada vez que veía a los italianos acudir a las urnas alegres, a veces llevando a sus hijos pequeños para que fueran entrenándose en el ejercicio de las libertades políticas. Los días de las elecciones solían ser una fiesta para ellos.

Empezaba a no serlo en aquellos años 70 porque el desconuelo político comenzaba a agarrarlos. Su gesto de protesta contra los gobernantes que no los entusiasaban era no ir a votar.

Conté al entonces presidente de la RAI, el socialista Sergio Zavali, mi angustia por no haber podido nunca votar y mi desilusión al ver que los italianos, que al revés de nosotros los españoles, llevaban años disfrutando de la democracia. Estaban perdiendo el gusto por acudir a las urnas.

Se quedó pensando unos minutos y me dijo: «Aquí está prohibido hacer ningún tipo de campaña política en la radio el día antes de las elecciones. Sin embargo, voy a hacer una excepción: quiero que cuente a los italianos lo que siente alguien que nunca pudo votar en su vida por vivir en un régimen dictatorial».

Lo hice. Les manifesté llanamente a los italianos, que ya me conocían por mi trabajo en la RAI, aquellos sentimientos. Y me salió espontáneo decir: «Me gustaría pedir que algunos de ustedes que han decidido no votar mañana lo hicieran por mí, para compensar las tantas veces que en mi vida, a los 40 años, no he votado». Y me despedí deseándoles una feliz jornada electoral.

Me volví a mi casa. Poco después sonó el teléfono. Zavali presidente de la RAI me contó: «Puede sentirse satisfecho. Aquí se han bloqueado los teléfonos. Hay fila de personas en línea para pedir que le digan al periodista español que a pesar de que ya había decidido no votar, lo harán por él, para que se sienta menos frustrado».

Fue así que sin poder votar acabé haciéndolo miles de veces.

Es cierto que hoy vuelve a revolotear en todo el mundo el desencanto por la política, por los partidos, por la llamada vieja política, teñida cada vez más de corrupción y de interés personal más que comunitario. Es verdad que la vieja democracia está enferma y que sobre todo las nuevas generaciones de jóvenes la ven con desconfianza y a veces hasta disgusto. Solo quién ha sufrido en su carne las garras de una dictadura sabe la importancia de mantener viva esa flor delicada por frágil e imperfecta que sea.

Los periodistas decimos siempre que es mejor un mal periódico que la ausencia de él, que es el sueño de los dictadores. También hay que recordar, y lo quiero hacer hoy aquí, que mejor una democracia imperfecta que cualquier tipo de dictadura. Cualquier gesto, aunque sea solo el poder votar en libertad, es mejor que la noche de una dictadura en la que se pierden los sueños para dar espacio solo a las peores pesadillas.

Yo tampoco voy a poder votar aquí mañana porque no soy brasileño y ahora voto en la España libre y democrática. Si pudiera hacerlo me pondría sin embargo en fila con los brasileños que acudirán a las urnas. El mío sería un voto de esperanza, no de miedo.

Es legítimo y democrático votar nulo o en blanco. Los gestos de protesta ejercidos en libertad son también un ejercicio de la democracia. No votar acaba siendo un regalo a los descreídos de la democracia sobre todo en estos tiempos en los que esa planta que nos permite respirar en libertad empieza a estar enferma.

Solo en las dictaduras se impide a los ciudadanos el mínimo derecho de votar, que fue conquistado a través de los años con muchas luchas y sangre. Primero podían votar solo los ricos e ilustrados; después se permitió también a las mujeres y hasta a los analfabetos. Hoy todos gozan de ese derecho.

Mejor ejercerlo antes de que volvamos a perderlo. Se empieza con la pereza de acudir a las urnas y se despierta uno un día con la triste sorpresa de no poder ya votar ni aún queriéndolo. Es ese día en que los otros deciden por nosotros cómo debemos vivir y hasta pensar.

Juan Arias – *El País* – 5 de octubre de 2014.

**Répondre en espagnol aux questions suivantes :**  
**(250 mots environ pour chaque réponse)**

1. ¿Como defiende el periodista el acto de votar?
2. Según Usted, ¿Cómo ha ido evolucionando la implicación ciudadana en la vida política española?

## CORRIGÉ

*Par Frédérique Mabilais, professeure agrégée d'espagnol au lycée Jeanne-d'Arc à Caen.*

### I. TRADUCTION DU FRANÇAIS EN ESPAGNOL

- A ti no te puedo mentir. Tengo un secreto.  
Se me aceleró el corazón. En esos momentos, me parece que se me escapa, que nunca podré alcanzarlo.  
- Jeanne, creía yo que estaba muerto. ¿No es lo normal a mi edad? Y mira....  
Se enderezó.  
-Jeanne, voy a volver a casarme. Ella se llama...  
Del dedo me hizo señal de acercar el oído. En el cual dejó un nombre  
- ... un verdadero tesoro, un regalo, no tienes ni idea.  
Una luz se había encendido, allá detrás de sus ojos. Una luz que venía de dentro. Una luz que no solo le alumbraba los ojos sino también toda la cara. Se calló. Me quedé esperando. Pacientemente ¿Cómo hubiera podido yo atreverme a interrumpir ese sueño despierto? Pero yo tenía que seguir con mis averiguaciones. Quería comprender. Acabé por volver a hacerle mi pregunta. En voz muy baja. Para que se escurriera en él sin herirlo.  
- Entonces, señor Henri, nadie mejor que usted... desde luego... el amor... ¿qué es?  
De nuevo, se calló. Durante mucho tiempo. Y de repente, sin volverse hacia mí:  
- El amor es una conversación...  
Se interrumpió. Tomó aliento.  
- El amor es cuando uno solo le habla al otro. Y cuando el otro solo le habla a uno. Ya verás.

### II. TRADUCTION DE L'ESPAGNOL EN FRANÇAIS

- Qu'est-ce que je pouvais y comprendre à la paperasse, alors que je sais à peine lire et que je suis presque incapable d'écrire mon prénom. Certains jours il nous manquait même du charbon pour faire bouillir la marmite. Vous ne vous en souvenez pas ?  
- Comment veux-tu que je m'en souviene alors je n'étais pas né ?  
- Eh bien, ta sœur, elle s'en souvient bien, hein ?

- Je ne vois pas comment j'aurais pu oublier. J'avais neuf ans quand la guerre s'est terminée.
- Neuf ans et tu t'occupais de la maison et prenais soin de tes frères et sœurs comme si tu étais une femme, pendant que moi j'allais ici et là pour chercher quelque chose à manger et essayer de savoir si votre père était toujours en vie ou s'il avait été fusillé ou s'il allait être condamné à vingt ans de prison.
- Mais il n'avait rien fait !
- Les innocents paient toujours pour les coupables.
- Ce sont les idiots qui paient, et votre père l'était. Il croyait tout ce qu'on lui disait. Il croyait à la propagande de ceux de l'autre camp : « Celui qui n'aura pas de sang sur les mains n'aura rien à craindre ». Et tout comme il croyait tous les discours, il a cru les mensonges que lui racontait Baltasar sur ce que vaudraient ou ne vaudraient pas certains billets quand les troupes de Franco entreraient enfin dans Magina.
- Et Baltasar, comment pouvait-il savoir cela ?
- Ma pauvre fille, tu sembles être plus idiote que ton père.
- Baltasar était un fasciste, bien qu'il ne le montrât pas.
- Baltasar n'était ni rouge ni fasciste, il était du côté de celui qui était aux commandes et dont il pouvait tirer le meilleur bénéfice en s'en approchant.

Antonio Muñoz Molina, *El viento de la Luna*, Seix Barral, 2008.

## LV1 - ITALIEN

DURÉE : 4 HEURES.

*(La note sur 80 sera divisée par 4 pour obtenir la note sur 20, les deux chiffres après la virgule arrondis au dixième supérieur.)*

*Les candidats ne sont pas autorisés à modifier le choix de la première langue dans laquelle ils doivent composer. Tout manquement à la règle sera assimilé à une tentative de fraude.*

*Ils ne doivent faire usage d'aucun document, dictionnaire ou lexique ; sauf en latin pour lequel un dictionnaire Latin-Français est autorisé ; l'utilisation de toute calculatrice ou de tout matériel électronique est interdite.*

## SUJET

## L'italiano perfetto non esiste

1 L'italiano è vivo, viva l'e-taliano! Con questa esclamazione di ottimismo si conclude il nuovo saggio-pamphlet dello storico della lingua Giuseppe Antonelli, *Comunque anche Leopardi diceva le parolacce*, un libro fatto apposta per sfidare il perbenismo e il catastrofismo linguistico, per smontare cioè le tesi dei profeti di sventura, i tanti che intravedono nella scrittura digitale (sms, mail, post, chat, tweet eccetera) l'inizio della fine della nostra lingua, quelli che a intervalli regolari gridano al tramonto del congiuntivo, all'imbarbarimento lessicale e alla morte della punteggiatura. Ogni lingua, ricorda Antonelli, è un organismo in continua e incoercibile evoluzione: «Se si ama la propria lingua, non c'è peggior delitto di volerla seppellire viva. Di ibernarla in nome di una mai esistita era glaciale della perfezione».

5 Una lingua viva non è mai perfetta, anzi è naturalmente in una condizione di precarietà e di deriva. A voler giudicare il (basso) livello di consapevolezza, si rischia di censurare persino Dante, Boccaccio e Leopardi, che scrivevano rispettivamente: «perché non ti facci meraviglia», «ove che tu vadi», «io credo che tu abbi in capo una mala intenzione», coniugando i verbi apparentemente a capocchia. Oppure si finisce per correggere Pirandello e Landolfi, che non esitano a scrivere qual'è con l'apostrofo (severamente condannato in un tema scolastico). Siamo sicuri, insomma, di avere imboccato una deriva senza ritorno? Tutt'altro. I ritorni sono tantissimi, a cominciare dalle deprecate abbreviazioni che impazzano non solo negli sms e che recuperano abitudini utilizzate in passato per le stesse ragioni attuali, e cioè per risparmiare tempo e spazio, persino per evitare tariffe postali eccessive. «Un'età dell'oro in cui tutti parlavano (o scrivevano) bene non c'è mai stata» è il titolo di un paragrafo del libro di Antonelli. Un altro è il seguente: «Parole nuove (e straniere) fanno parte da sempre di un continuo e salutare ricambio epidermico». Nel 1961 un illustre saggista lanciava l'allarme contro lo sdoganamento di termini come «libresco», «(stanza di) soggiorno» e «fantascienza».

15 In definitiva, nella lingua, il confine tra giusto e sbagliato è estremamente labile: il raddoppiamento della congiunzione, per esempio «ma però», può essere rafforzamento lecito, secondo uno dei maggiori linguisti, Luca Serianni. Venendo all'italiano scritto nella rete, cioè all'e-taliano, Antonelli vi intravede una potenzialità mai riscontrata prima nella storia della lingua. Se negli anni Sessanta la televisione

ha ampliato enormemente la platea dell'italiano parlato, favorendo il passaggio dal dialetto all'«italiano dell'uso medio» come motore del cambiamento, oggi assistiamo a una seconda rivoluzione, del tutto inaspettata e anzi clamorosa. Il cambiamento viene non più solo dall'oralità ma da quella forma scritta cui finora era assegnato il ruolo di codificazione. Finalmente le innovazioni linguistiche passano dalla scrittura online: quella rapida, immediata, breve, informale che usiamo per gli scambi nei social network o al cellulare.

Una sorta di diffusissimo italiano neopopolare digitato che si è andato imponendo proprio mentre la scrittura tradizionale sembrava limitarsi ai componimenti scolastici o alle liste per la spesa. All'epistola si è sostituita l'e-pistola, suggerisce Antonelli: e non sembra un male, anzi è «una grandissima occasione», perché colma quella fascia di comunicazione rimasta vuota per secoli, se si eccettua la corrispondenza privata: lo scritto informale, come stimolo alla crescita e alla diffusione della nostra lingua, capace di abbattere il secolare «ingessamento» della forma scritta. «Un lavoro sulla lingua, attraverso esercizi di sintesi, battute, giochi di parole, invenzioni creative che non necessariamente — dice Antonelli — sono sinonimo di sciattezza, ma sono il segno di una nuova vitalità, di una semplificazione e di un'efficacia comunicativa che prima non conoscevamo».

D'après Paolo Di Stefano, *Il Corriere della sera*, 26 settembre 2014.

## I. VERSION

(sur 20 points)

Traduire en français depuis le début du texte « L'italiano è vivo, viva l'e-italiano ! » jusqu'à « ...si rischia di censurare persino Dante, Boccaccio, e Leopardi ».

(100 mots + ou – 10 %\* ; sur 10 points)

## II. QUESTIONS

(sur 40 points)

### 1. Question de compréhension du texte

Spiegate: «Negli anni Sessanta la televisione ha ampliato enormemente la platea dell'italiano parlato.»

(100 mots + ou – 10 %\* ; sur 10 points)

### 2. Question de compréhension du texte

Spiegate: «All'epistola si è sostituita l'e-pistola».

(100 mots + ou – 10 %\* ; sur 10 points)

### 3. Question d'expression personnelle

E più importante parlare «perfettamente» una lingua o avere qualcosa da dire?

(300 mots + ou – 10 %\* ; sur 20 points)

\* Le non-respect de ces règles sera sanctionné.

(Indiquer le nombre de mots sur la copie après chaque question)

**III. THÈME***(sur 20 points)*

Deux tours d'environ cent mètres de haut viennent d'être primées par le prestigieux International Highrise Award 2014. Leur particularité : abriter sur les balcons de chaque façade une véritable forêt d'arbres et d'arbustes, sans oublier insectes et oiseaux.

Les Parisiens rêvent de verdure en ville, de murs végétalisés et de potagers sur leurs balcons ? De l'autre côté des Alpes c'est aux Milanais de plébisciter Bosco verticale, une réalisation immobilière qui a été inaugurée le mois dernier, après cinq ans de travaux. Le pari de Stefano Boeri, l'architecte signataire du projet, a consisté à planter l'équivalent d'un hectare de forêt sur les balcons des deux tours, bâties en plein centre-ville.

Pour lutter contre les parasites, plus de mille deux cents coccinelles ont été relâchées sur les tours au mois de mai, ainsi que des papillons.

Si le concept d'un immeuble écologique qui maîtrise sa consommation énergétique n'est pas nouveau, ce projet de poumons verts verticaux est intéressant par la collaboration étroite développée entre architectes et botanistes.

D'après Francesca Alongi, *Le Figaro*, 20 novembre 2014.

## I. VERSION

---

L'italien est vivant, vive l'e-italien ! C'est par cette exclamation optimiste que se termine le nouvel essai-pamphlet de l'historien de la langue Giuseppe Antonelli, *De toute façon, même Leopardi disait des gros mots*, un livre écrit précisément pour défier le conformisme et le catastrophisme linguistique, donc pour démonter les thèses des oiseaux de mauvais augure, tous ceux qui entrevoient dans l'écriture digitale (sms, mail, post, chat, tweet etc.) le début de la fin de notre langue, ceux qui régulièrement hurlent à la mort du subjonctif, à la barbarisation lexicale et à la disparition de la ponctuation. Toute langue, comme le rappelle Antonelli, est un organisme en évolution continue et irrépensible : « Si l'on aime sa langue, il n'y a pas pire crime que de vouloir l'enterrer vivante, de la mettre en hibernation au nom d'une ère glaciaire de la perfection qui n'a jamais existé. »

Une langue vivante n'est jamais parfaite, au contraire ! elle est naturellement en état de précarité et de dérive. En voulant juger le (bas) niveau de sa connaissance, on risque de sanctionner tour à tour Dante, Boccace et Leopardi.

## III. THÈME

---

Due torri alte circa cento metri sono state appena premiate dal prestigioso Highrise Award 2014. La loro particolarità: ospitare sui balconi di ogni facciata una vera foresta di alberi e arbusti, senza dimenticare insetti ed uccelli. I parigini sognano di verde in città, di muri con inverdimento verticale e di orti sui loro balconi? Oltralpe sono i milanesi ad apprezzare molto *Bosco verticale*, una realizzazione immobiliare inaugurata lo scorso mese, dopo cinque anni di lavori. La scommessa di Stefano Boeri, l'architetto responsabile del progetto, è consistita nel piantare l'equivalente di un ettaro di foresta sui balconi di due torri erette proprio in centro.

Per lottare contro i parassiti, più di milleduecento coccinelle e farfalle, sono state liberate sulle torri nel mese di maggio.

Se il concetto di un palazzo ecologico controllando il proprio consumo energetico non è nuovo, questo progetto di polmoni verdi verticali è interessante per la sua stretta collaborazione sviluppata tra architetti e botanici.

Da Francesca Alondi, *Le Figaro*, 20 novembre 2014.

## LV2 - ANGLAIS

DURÉE : 3 HEURES.

*(La note sur 80 sera divisée par 4 pour obtenir la note sur 20, les deux chiffres après la virgule arrondis au dixième supérieur).*

*Les candidats ne sont pas autorisés à modifier le choix de la deuxième langue dans laquelle ils doivent composer. Tout manquement à la règle sera assimilé à une tentative de fraude.*

*Ils ne doivent faire usage d'aucun document, dictionnaire ou lexique (sauf pour le latin ou l'usage d'un dictionnaire latin-français est autorisé) ; l'utilisation de toute calculatrice ou de tout matériel électronique est interdite.*

## SUJET

## York's bid to become a poverty-free city

- 1 On the face of it there would seem to be no obvious reason why the elegant and unostentatiously prosperous city of York – currently striving to become Britain's first “poverty-free” community – should worry about poverty at all.
- 5 **There are, after all, many places where you would consider poverty to be a more urgent and extreme problem, where hardship and destitution is more vividly displayed. This clean, pretty, well-to-do city throngs with tourists and shoppers; yellow bicycles, marking the successful recent arrival of the Tour de France, dot the streets; the economy is booming; unemployment is practically non-existent.**
- 10 **If York is a poster city for the upside of Britain's tentative economic recovery, however, it is also acts as a cautionary tale about its downside: a widening inequality that some fear is slowly changing the fabric and character of a place famed for its historical association with fairness and social justice.**
- 15 **“You can get off at York train station and walk for hours and not see poverty at all,”** says Steve Hughes, editor of the York Press, the local newspaper that has been running an extraordinary “Stamp Out Poverty” campaign over the past year, highlighting York's hidden poverty. “We wanted to get under the veneer. We always felt that York was a tale of two cities; that tale gets lost in the overall message that everything in the garden is rosy.”
- 20 The idea of “hidden” poverty crops up again and again: so what is it? “It's not the sort of poverty you can see as you bomb about in your Audi,” one charity worker tells me ruefully. Another describes it as “behind-closed-curtains” poverty. There is some street poverty, such as begging and rough sleeping, as there is everywhere; but in York you have to seek it out, and it is not in the most obvious places.

- 25 What local campaigners mean is that their prosperous city hides an uncomfortable secret: rising numbers of local people hold down jobs but increasingly don't earn enough to get by. Many locals can no longer afford to live in what has become the most expensive city in the north of England as rents, house prices, and basic living costs such as childcare spiral, leaving those on low and middle incomes struggling.
- 30 Spurred on by Stamp Out Poverty, the council, local businesses, charities and faith groups set up their own poverty-free campaign a year ago this week. It set out to challenge the idea that poverty should exist amid such affluence, but it feels like it has become something bigger: a struggle for the soul of a city. [...]

Patrick Butler, *The Guardian*, 16 July 2014.

## I. VERSION

(sur 20 points)

Traduire le titre et à partir de "There are, after all, ..." jusqu'à "...poverty at all". (De la ligne 4 jusqu'à la ligne 15)

## II. QUESTIONS

(sur 40 points)

### 1. Question de compréhension du texte

Why can it be said that York is "a tale of two cities"?

(150 mots + ou - 10 %\* ; sur 20 points)

### 2. Question d'expression personnelle

Is social inequality an acceptable price to pay for a country's economic success?

(250 mots + ou - 10 %\* ; sur 20 points)

\* Le non-respect de ces normes sera sanctionné.

Indiquer le nombre de mots utilisés.

## III. THÈME

(sur 20 points)

1. S'ils avaient eu plus de temps, ils auraient pu faire leurs achats avant de venir.
2. Y aura-t-il autant de monde à cette réunion que l'année dernière ?
3. D'après les experts, la reprise sera facilitée par la baisse des prix du pétrole.
4. Si votre société devait embaucher un jeune diplômé, quel profil choisirait-elle ?
5. Très peu d'électeurs ont déjà décidé pour quel député ils voteront.
6. La plupart des Européens ont cru que l'Ecosse deviendrait une nation indépendante.
7. Cela fait des mois que les compagnies aériennes cherchent un accord.
8. Ce n'est pas la première fois qu'un écrivain français reçoit le prix Nobel, non ?
9. Aucun des investissements promis par ces deux entreprises n'a été réalisé.
10. Si riche et puissant soit-il, il n'a pu empêcher la faillite de son empire immobilier.

## CORRIGÉ

*Par Alain Goudot, professeur de Chaire supérieure d'anglais en CPGE économique et commerciale au lycée de Bellepierre à Saint-Denis de la Réunion.*

### I. VERSION

---

#### York tente de devenir une ville sans pauvreté

Il existe après tout beaucoup d'endroits où vous considéreriez que la pauvreté est un problème plus urgent et radical, où les difficultés et la misère apparaissent plus nettement / sautent plus aux yeux. Cette ville propre, coquette et prospère regorge de touristes et chalands ; des bicyclettes jaunes, symbolisant la récente arrivée triomphale du Tour de France, jalonnent les rues ; l'économie est florissante ; le chômage n'existe pratiquement pas.

Si York est une ville qui affiche les atouts de la reprise économique hésitante de la Grande-Bretagne, elle raconte néanmoins une histoire édifiante sur ses inconvénients : une inégalité croissante qui selon les craintes de certains risque de modifier la structure et l'identité d'un lieu célèbre pour son association historique avec l'équité et la justice sociale.

« Vous pouvez descendre du train à la gare de York, marcher des heures et ne pas voir le moindre stigmate de pauvreté ».

### III. THÈME

---

1. If they had had more time, they could have done their shopping before coming.
2. Will there be as many people at this meeting as last year?
3. According to experts, the recovery will be eased by the drop in oil prices.
4. Were your company to hire a young graduate, what profile would it/they opt for?
5. Very few voters have already made up their minds about what MP they are to vote for.
6. Most Europeans believed Scotland would turn into an independent country.
7. Airlines have been seeking agreement for many months.
8. It is not the first time a French writer has been awarded the Nobel Prize, is it?
9. None of the investments those two firms promised has materialised.
10. However rich and powerful he may be, he was not able to prevent his real estate empire from going bankrupt.

# LV2 - ANGLAIS

**DURÉE : 3 HEURES.**

*Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document, dictionnaire ou lexique ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*

*Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.*

CCIR

## 1. TRADUCTIONS

**DURÉE DE L'ÉPREUVE : 1 HEURE 30.**

### I. TRADUCTION DU FRANÇAIS À L'ANGLAIS

- C'était une jeune femme d'une énergie et d'une intelligence exceptionnelles, votre grand-mère. Elle lisait, lisait, lisait... Des journaux, des romans, tout ce que lui apportait Alphonse. Le soir, dès heures durant, il l'aidait à faire des exercices de prononciation. Lorsque Andréï est né, elle se débrouillait en français. Un an plus tard, mon père me disait qu'il fallait tendre l'oreille pour percevoir une pointe d'accent.

Il s'arrêta :

- Je dois vous raconter ces détails. Ils sont essentiels pour la suite.
- Je vous en prie, fit Mathias.
- Deux mois après l'arrivée d'Irina, Alphonse l'épousait. C'était un homme de devoir qui a élevé votre père avec une tendresse de chaque instant.

Mathias sentit son regard se brouiller.

- Voilà, poursuivit Federenko. Je m'étais promis que vous sauriez un jour ce qu'a été la vie de votre famille. C'est la vôtre, mais aussi celle de votre peuple.
- Je vous remercie, fit Mathias.

*La Confrérie des moines volants, Metin Arditi  
Editions Grasset & Frasquelle, 2013.*

### II. TRADUCTION DE L'ANGLAIS AU FRANÇAIS

'I said my remarks were not intended personally. If feelings have been hurt, I shall be most happy to explain to the young lady-'

'Mr Walker,' Stoner said. 'You know that isn't the point.'

'Has the young lady been complaining to you?' Walker asked. His fingers were trembling as he put his glasses back on. With them on, his face managed a frown of anger. 'Really, sir, the complaints of students whose feeling have been hurt should not-'

'Mr. Walker!' Stoner heard his voice go a little out of control. He took a deep breath. 'This has nothing to do with the young lady, or with myself, or with anything except your performance. And I still await any explanation you have to offer.'

'Then I am afraid I don't understand at all, sir. Unless...'

'Unless what, Mr Walker?'

'Unless it is a simple matter of disagreement,' Walker said. 'I realize that my ideas do not coincide with yours, but I have always thought that disagreement was healthy. I assumed that you were big enough to—'

'I will not allow you to evade the issue' Stoner said. His voice was cold and level. 'Now. What was the seminar topic assigned to you?'

*Stoner*, John Williams, Vintage 2003.

## 2. EXPRESSION ÉCRITE

**DURÉE DE L'ÉPREUVE : 1 HEURE 30**

The modern digital revolution – with its hallmarks of computer power, connectivity and data ubiquity – has brought iPhones and the internet, not crowded tenements and cholera. But (...) it is disrupting and dividing the world of work on a scale not seen for more than a century. Vast wealth is being created without many workers; and for all but an elite few, work no longer guarantees a rising income.

So far, the upheaval has been felt most by low – and mid-skilled workers in rich countries. The incomes of the highly educated – those with the skills to complement computers – have soared, while pay for others lower down the skill ladder has been squeezed. In half of all OECD countries real median wages have stagnated since 2000. Countries where employment is growing at a decent clip, such as Germany or Britain, are among those where wages have been squeezed most.

In the coming years the disruption will be felt by more people in more places, for three reasons. First, the rise of machine intelligence means more workers will see their jobs threatened. The effects will be felt further up the skill ladder, as auditors, radiologists and researchers of all sorts begin competing with machines. Technology will enable some doctors or professors to be much more productive, leaving others redundant.

Second, wealth creation in the digital era has so far generated little employment. Entrepreneurs can turn their ideas into firms with huge valuations and hardly any staff. Oculus VR, a maker of virtual-reality headsets with 75 employees, was bought by Facebook earlier this year for \$2 billion. With fewer than 50,000 workers each, the giants of the modern tech economy such as Google and Facebook are a small fraction of the size of the 20th century's industrial behemoths.

Third, these shifts are now evident in emerging economies. Foxconn, long the symbol of China's manufacturing economy, at one point employed 1.5m workers to

assemble electronics for Western markets. Now, as the costs of labour rise and those of automated manufacturing fall, Foxconn is swapping workers for robots. China's future is more Alibaba than assembly line: the e-commerce company that recently made a spectacular debut on the New York Stock Exchange employs only 20,000 people. [...]

None of this means that the digital revolution is bad for humanity. Far from it. This newspaper believes firmly that technology is, by and large, an engine of progress, IT has transformed the lives of billions for the better, often in ways that standard income measures do not capture. Communication, knowledge and entertainment have become all but free. Few workers would want to go back to a world without the internet, the smartphone or Facebook, even for a pay increase. [...]

Nonetheless, the growing wedge between a skilled elite and ordinary workers is worrying. Angry voters whose wages are stagnant will seek scapegoats: witness the rise of xenophobia and protectionism in the rich world. In poor countries dashed expectations and armies of underemployed people are a recipe for extremism and unrest. Governments across the globe therefore have a huge interest in helping remove the obstacles that keep workers from wealth.

The answer is not regulation or a larger state. High minimum wages will simply accelerate the replacement of workers by machines. Punitive tax rates will deter entrepreneurship and scare off the skilled on whom prosperity in the digital era depends. The best thing governments can do is to raise the productivity and employability of less-skilled workers. [...]

Yet although governments can mitigate the problem, they cannot solve it. As technology progresses and disrupts more jobs, more workers will be employable only at lower wages. The modest earnings of the generation that technology leaves behind will need to be topped up with tax credits or wage subsidies. That need not mean imposing higher tax rates on the affluent, but it does mean closing the loopholes and cutting the giveaways from which they benefit.

In the 19th century, it took the best part of 100 years for governments to make the investment in education that enabled workers to benefit from the industrial revolution. The digital revolution demands a similarly bold, but swifter, response.

*The Economist online, October 4, 2014.*

**Répondre en ANGLAIS aux questions suivantes :**  
**(environ 200 mots pour chaque réponse)**

1. According to the text, how is the modern digital revolution “disrupting and dividing the world of work on a scale not seen for more than a century”?  
Answer the question in your own words.
2. Do you think developments in technology necessarily lead to progress?  
Illustrate your answer with your own specific examples.

## CORRIGÉ

Par Philippe Rayet, agrégé d'anglais, professeur en classes préparatoires au lycée Notre-Dame du Grandchamp à Versailles.

### TRADUCTION DU FRANÇAIS À L'ANGLAIS

"Your grandmother was an exceptionally energetic and intelligent woman. She spent her life reading: reading newspapers, reading novels and reading everything Alfonso happened to bring her. In the evening, the man spent hours helping her improve her pronunciation with appropriate exercises [drills]. When Andrei was born, she could get by in French. A year later, my father told me [said to me that] no trace of a foreign accent could be detected in her voice unless you pricked up your ears."

He stopped.

"I must go into details," he said, "because they are of (the) utmost importance for what is to follow."

"Please, do, of course," said Mathias [Mathias said].

"Two months after Irina arrived, Alfonso married her. He was a man of conscience [with a sense of duty] who brought up [raised] your father with enduring tenderness.

Mathias felt his eyes mist (over) [cloud] with tears.

"That's all there is to it," Federenko added. I had vowed [I had promised myself] to inform you some day about what the life of your family [your family's life] was [had been]. It's yours but also that of your nation [of your people]."

"Thank you very much," said Mathias.

Metin Arditi, *La confrérie des moines volants*, 2013.

### II. TRADUCTION DE L'ANGLAIS AU FRANCAIS

- J'ai bien spécifié que mes remarques ne devaient pas être prises à titre personnel. Cependant, si je l'ai froissée, je me ferai un plaisir d'expliquer à cette jeune femme que...

Stoner l'interrompt :

- Monsieur [Mister] Walker, là n'est pas le problème et vous le savez très bien.

- La jeune femme s'est-elle plainte auprès de vous ? s'enquit Walker. Il avait les mains qui tremblaient quand il remit ses lunettes, mais une fois qu'elles furent sur son nez, il osa un froncement de sourcils pour marquer son indignation.

- Franchement, monsieur, les récriminations d'étudiant(e)s ulcéré(e)s ne devraient pas...

Monsieur Walker ! – se rendant compte qu'il s'était laissé emporter, Stoner prit une profonde inspiration et baissa aussitôt le ton – cela n'a rien à voir avec cette jeune femme, ni avec moi, ni avec quoi que ce soit si ce n'est votre petit numéro. Et j'attends toujours que vous m'en donniez l'explication.

- Dans ce cas, j'ai bien peur de ne pas comprendre du tout, monsieur. A moins que...

- A moins que quoi, monsieur Walker ?

- A moins que ce ne soit qu'une simple question de points de vue, répondit Walker. Je me rends bien compte que nous ne partageons pas les mêmes opinions [idées], mais j'ai toujours pensé qu'il y avait quelque chose de salutaire dans les désaccords. Je croyais que vous auriez assez d'expérience pour...

- Je ne vous laisserai pas éluder le problème [prendre la tangente] (comme cela), répliqua Stoner d'une voix calme et glaciale [froide]. Maintenant, veuillez répondre à ma question : quel sujet étiez-vous censé traiter dans le cadre de ce séminaire ?

John Williams, *Stoner*, 2003.

CCIR

CORRIGÉ

SCIENT. ECO. TECHNO. KHÂGNE

LV2 - ANGLAIS

## LV2 - ALLEMAND

DURÉE : 3 HEURES.

*(La note sur 80 sera divisée par 4 pour obtenir la note sur 20, les deux chiffres après la virgule arrondis au dixième supérieur.)*

*Les candidats ne sont pas autorisés à modifier le choix de la deuxième langue dans laquelle ils doivent composer.*

*Ils ne doivent faire usage d'aucun document, dictionnaire ou lexique (sauf pour le latin et le grec ancien). L'utilisation de toute calculatrice ou de tout matériel électronique est interdite.*

*Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.*

## SUJET

## ER LEITETE DISKRET EIN IMPERIUM

- 1 **Karl Albrecht** ist im Juli im Alter von 94 Jahren gestorben, vier Jahre nach seinem Bruder **Theo**. Gemeinsam mit ihm gründete er die Geschäftskette *Aldi*, einen der erfolgreichsten Konzerne der Nachkriegszeit. Die beiden Brüder gelten als Erfinder des Discount-Prinzips und haben damit Wirtschaftsgeschichte geschrieben.

- 5 Die damals revolutionäre Idee war, mit einem kleinen Sortiment und einfacher Betriebsorganisation die Kosten zu reduzieren. So konnte *Aldi* viel niedrigere Preise als die Konkurrenz anbieten. Beispielsweise wurde auf die Warenpräsentation verzichtet und direkt aus Kartons verkauft. Gespart wurde ebenfalls am Personal: In den Filialen waren weniger Mitarbeiter beschäftigt als in allen anderen Supermärkten. Nach dem Zweiten Weltkrieg hatten **Theo** und **Karl Albrecht** damit begonnen, aus dem kleinen Laden ihrer Mutter Deutschlands größten Discounter zu entwickeln.

- 10 1962 wurde der erste *Aldi*-Markt (die Abkürzung steht für **Albrecht**-Discount) eröffnet. Heute ist *Aldi* in insgesamt 17 Ländern in Europa, Nordamerika und Australien vertreten.

- 15 Man kann **Karl Albrecht** und seinem Bruder vorwerfen, ihr Geschäftserfolg basiere auf Preisdumping. Er beute seine Lieferanten aus, indem er ihnen rigide Verträge diktiert. Fakt ist aber auch: Über 86 Prozent der Bundesbürger kaufen regelmäßig bei *Aldi* ein. Mit seinen Discountpreisen war *Aldi* der große Gewinner der Wirtschaftskrise nach 2008. Heute ist es einer der größten Discounter der Welt.

- 20 Zum Tod des 94-jährigen Firmengründers teilte das Unternehmen in einer Presseerklärung mit, **Albrecht** habe eine „Firmenkultur gegenseitigen Respekts“ geschaffen. „Er war ein Vorbild, ein gerechter Unternehmer und ein Mann, der seine Überzeugungen und seine christlichen Werte lebte.“ **Karl Albrecht** habe zurückge-

zogen gelebt, keine öffentliche Aufmerksamkeit gewollt und stets die Leistungen seiner Mitarbeiter in den Vordergrund gestellt. Den Mitarbeitern und ihren Talenten habe er vertraut und ihnen Gelegenheit gegeben, diese zu entfalten. „Wir sind stolz auf die von ihm geschaffene Kultur und werden sie fortführen.“

- 30 **Karl Albrecht** war einer der reichsten Deutschen mit einem Vermögen von 18,3 Milliarden Euro. Aber von Glamour keine Spur. Niemand wusste, wo und wie die Familie wohnte. In *Essen* soll **Karl** gelebt haben, vielleicht auch in *Köln* oder in der Schweiz. Absolute Diskretion und Sparsamkeit waren die Devise, bis in den Tod: **Karl Albrecht** wurde in *Essen* beerdigt, neben seinem Bruder **Theo**. Es gab
- 35 weder eine Prozession noch eine teure Trauerfeier, nur eine Gesellschaft von 30 Personen nahm am Abschied. Und die Blumen stammten aus dem *Aldi*-Sortiment...

Nach zwei Artikeln aus « ZEIT ONLINE », 21. Juli 2014.

## I. VERSION

(sur 20 points)

Traduire le titre et les paragraphes 1 et 2, depuis : „Karl Albrecht ist im Juli 2014 im Alter von 94 Jahren gestorben, vier Jahre nach seinem Bruder Theo...“ jusqu'à : „...aus dem kleinen Laden ihrer Mutter Deutschlands größten Discounter zu entwickeln.“ (De la ligne 1 à la ligne 13)

## II. QUESTIONS

(sur 40 points)

### 1. Question de compréhension du texte

Welche Art von Unternehmern waren die Brüder Albrecht?

(150 mots + ou – 10 %\* ; sur 20 points)

### 2. Question d'expression personnelle

Wie stellen Sie sich den Unternehmer von morgen vor?

(250 mots + ou – 10%\* ; sur 20 points)

\* Le non-respect de ces normes sera sanctionné.

(Indiquer le nombre de mots sur la copie après chaque question.)

## III. THÈME

(sur 20 points)

- Bonjour, comment allez-vous ? Beaucoup mieux, merci. Quand est-ce que je peux rentrer chez moi ?
- Grâce aux réformes de G. Schröder, l'Allemagne a une économie relativement solide.
- Ne sois pas aussi sûr de toi, tu sais bien que j'ai raison.
- Il faudrait investir encore plus d'argent pour développer les énergies renouvelables.
- Cette entreprise familiale fut fondée au xx<sup>e</sup> siècle, avant la Seconde Guerre mondiale.
- Le prix de l'essence est bien plus bas que l'année dernière. Je m'en réjouis !
- Après avoir travaillé comme policier dans la capitale, il est retourné à Dresde.
- Si nous avons respecté les règles, la crise n'aurait pas été aussi dramatique.
- Comme la natalité baisse en Allemagne, les employeurs vont manquer de main d'œuvre qualifiée.
- Ceux qui n'ont pas une bonne formation ont peu de chances de trouver un emploi.

## CORRIGÉ

Par Jean-Gilbert Delarbre, professeur de Chaire supérieure au lycée Michelet à Vanves.

### I. VERSION

---

IL DIRIGEAIT DISCRETEMENT UN EMPIRE...

**Karl Albrecht** est décédé en juillet 2014 à l'âge de 94 ans, quatre ans après son frère Theo. C'est en association avec lui qu'il fonda la chaîne de magasins Aldi, l'un des groupes les plus performants de l'après-guerre. Les deux frères passent pour les inventeurs du principe du discount et ont ainsi écrit un chapitre de l'histoire économique.

L'idée, révolutionnaire à l'époque, était de réduire les coûts avec un éventail de produits limité et une structure de fonctionnement simple. C'est ainsi qu'Aldi put offrir des prix beaucoup plus bas que ses concurrents. On renonça par exemple à la mise en valeur des produits pour les vendre directement dans des cartons. On fit également des économies de personnel. Dans les filiales, on employait moins de collaborateurs que dans d'autres supermarchés. Après la seconde guerre mondiale, Theo et Karl Albrecht avaient commencé à développer, à partir du petit magasin de leur mère, le plus grand discount d'Allemagne.

D'après deux articles du « ZEIT ONLINE », 21 juillet 2014.

### III. THÈME

---

1. Guten Tag! Wie geht es Ihnen? Viel besser, danke. Wann kann ich nach Hause zurückgehen?
2. Dank Gerhard Schröders Reformen verfügt Deutschland über eine relativ gesunde Wirtschaft.
3. Sei nicht so selbstsicher! Du weißt doch, dass ich Recht habe.
4. Man sollte noch mehr Geld investieren, um die erneuerbaren Energien zu entwickeln.
5. Dieser Familienbetrieb wurde im 20. Jahrhundert gegründet, und zwar vor dem Zweiten Weltkrieg.
6. Der Benzinpreis ist viel niedriger als voriges Jahr. Das freut mich.
7. Nachdem er in der Hauptstadt als Polizist gearbeitet hat, ist er nach Dresden zurückgekehrt.
8. Wenn wir die Regeln befolgt hätten, wäre die Krise nicht so drama&tisch gewesen.
9. Da Deutschland einen Geburtenrückgang erlebt, wird es den Arbeitgebern an qualifizierten Arbeitskräften mangeln.
10. Diejenigen, die nicht gut ausgebildet sind, haben geringe Chancen, je eine Stelle zu finden.

# LV2 - ALLEMAND

**DURÉE : 3 HEURES.**

*Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document, dictionnaire ou lexique ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre. En matière d'orthographe, les graphies antérieure et postérieure à la réforme sont acceptées.*

CCIR

## 1. TRADUCTIONS

**DURÉE DE L'ÉPREUVE : 1 HEURE 30.**

### I. TRADUCTION DU FRANÇAIS EN ALLEMAND

- Vous avez vu la tour Eiffel ? demanda-t-elle pour changer de sujet. [...]
- Non, je suis arrivé ce matin de New Dehli et je suis directement venu ici depuis l'aéroport.
- Il y a tellement d'histoires et d'anecdotes passionnantes autour de ce monument. Saviez-vous que Maupassant détestait la tour Eiffel ? Il y mangeait tous les jours car c'était le seul endroit de Paris depuis lequel on ne pouvait pas la voir...
- Il faudrait d'abord que je sache qui est ce Maupassant. En tout cas, la petite histoire me plaît bien !
- C'est un écrivain français du XIX<sup>e</sup> siècle. Mais attendez, ajouta-t-elle en croquant le dernier morceau de son gâteau. [...] Après l'exposition universelle de 1889, pour laquelle elle a été construite, la tour devait être démontée puis détruite. Il est vrai que son entretien représentait un trou financier gigantesque pour le gouvernement français. [...]
- En tout cas, finit-elle par dire, c'est bien dommage que vous ne soyez pas allé voir la tour Eiffel.

Romain Puértolas, *L'extraordinaire voyage d'un fakir qui était resté coincé dans une armoire IKEA*,  
Le Dilettante, Paris 2013, p. 44-45.

### II. TRADUCTION DE L'ALLEMAND EN FRANÇAIS

Eigentlich hatte ich nicht Rechtsanwalt werden wollen, sondern Richter. Ich hatte die entsprechende Examensnote, wusste, dass Richter gesucht wurden, war bereit, dahin zu ziehen, wo man mich brauchte, und hielt das Einstellungsgespräch im Justizministerium für eine Formalie. Es war an einem Nachmittag.

Der Personalreferent war ein alter Herr mit gütigen Augen. „Sie haben mit siebzehn Abitur gemacht, mit einundzwanzig das erste und mit dreiundzwanzig das zweite Examen<sup>1</sup> – ich hatte noch nie einen so jungen und selten einen so guten Bewerber. [...]

Sie haben eine Menge Zeit gut.“

„Ich verstehe nicht...“

„Nein?“ Er sah mich milde an. „Wenn Sie nächsten Monat anfangen, werden Sie zweiundvierzig Jahre lang über andere richten. Sie werden oben sitzen und die anderen unten, Sie werden ihnen zuhören, mit ihnen sprechen, ihnen auch einmal zulächeln, aber am Ende von oben herab entscheiden, wer im Recht ist und wer im Unrecht und wer seine Freiheit verliert und wer sie behält. Wollen Sie das – zweiundvierzig Jahre lang oben sitzen, zweiundvierzig Jahre lang recht haben? Meinen Sie, das tut Ihnen gut?“

Ich wusste nicht, was ich sagen sollte.

Bernhard Schlink, *Die Frau auf der Treppe*, Diogenes Verlag 2014, S. 19-20.

## 2. EXPRESSION ÉCRITE

**DURÉE DE L'ÉPREUVE : 1 HEURE 30.**

### Generation Ich

In diesen Wochen hat das neue Wintersemester begonnen. Weit über zwei Millionen Studenten sind an den Universitäten und Fachhochschulen eingeschrieben, unter ihnen befinden sich mehrere Hunderttausend Erstsemester. Wer sind diese jungen Leute? Was sind die Wünsche und Ängste einer Studentengeneration, die eine Krise nach der anderen in den Medien verfolgen konnte, ohne wirklich betroffen gewesen zu sein? Wie verändern sich die Menschen, wenn sie seit ihrer Kindheit zu hören bekommen, dass sie sich anstrengen müssten und keine Lücken im Lebenslauf haben dürfen?

Im Auftrag des Bundespresseamts hat das Meinungsforschungsinstitut TNS-Infratest mehr als 500 Studenten von Universitäten in persönlichen Interviews befragt. Die Ergebnisse liegen der Bundesregierung seit Sommer 2013 vor. [...] In der Umfrage geht es um die Lebensorientierung der Studenten, aber auch um ihre Studiensituation, beruflichen Pläne und politischen Einstellungen. Was die Studie dabei so interessant macht, sind die Vergleiche mit Erhebungen aus den Siebziger – und Neunzigerjahren. In der Zwischenzeit haben sich die Universitäten enorm verändert, nicht allein der neuen Studienabschlüsse Bachelor und Master wegen. Immer mehr Menschen zieht es an die Hochschule, die Studentenschaft ist weiblicher und jünger geworden: Laut Infratest stieg der Anteil der Frauen, die an den Unis studieren, gegenüber 1995 um sieben Prozentpunkte. Fast vier von zehn Studenten in der Stichprobe sind zwischen 18 und 22 Jahre alt.

Die Infratest-Befragung erlaubt einen weitreichenden Blick auf den Wertewandel an den Universitäten. Die Studenten sind „unpolitischer“ als frühere Jahrgänge; kaum jemand ist noch Mitglied in einer Partei oder Hochschulgruppe, viele Studenten mosern<sup>1</sup> allenfalls über Politiker, die ihre Interessen nicht vertreten. Von Rebellion und Aufbruchsstimmung ist wenig zu spüren. Viel wichtiger als Politik ist ihnen sowieso ein gewisser Wohlstand. „Die Ergebnisse zeichnen das Bild einer stark ich-bezogenen Studentengeneration. Berufliches Vorankommen sowie materielle Werte sind für sie sehr wichtig“, heißt es in der Studie. „Sich schöne Dinge leisten können“ steht für die Studenten zum Beispiel ganz oben auf der Agenda. 1995 fanden dies nur 31 Prozent wichtig, heute sind es 73 Prozent der Befragten.

Nachgelassen hat hingegen die früher lautstark eingeforderte internationale Solidarität: „Bei Zuwanderungsfragen sind die Studierenden nicht frei von Vorbehalten“, stellen die Forscher fest. „Jeweils rund die Hälfte findet, dass die Zahl der Zuwanderer die Integrationskraft der Gesellschaft überfordert und dass Deutschland in Zukunft nicht mehr Fachkräfte aus dem Ausland braucht.“ Nicht wenige Studenten scheinen für die klassischen Ressentiments der Rechtsextremen empfänglich, wonach Ausländer die Jobs wegnehmen. „Die Vorbehalte der Studierenden dürften unter anderem darauf zurückzuführen sein, dass sie selbst den Einstieg ins Berufsleben erst noch vor sich haben und sich viele von Konkurrenz aus dem Ausland eher bedroht fühlen könnten“, schreiben die Demoskopien.

Auch grundsätzlich sind die Studenten konservativer geworden. Die Grünen werden von den Forschern als die „großen Verlierer“ ausgemacht. In den Neunzigern standen sie mit großem Abstand auf Platz eins der beliebtesten Parteien. Heute liegen sie etwa gleichauf mit Union und Sozialdemokraten. Für die Forscher ist klar, dass das Klischee von einer „politisch eher links zu verortenden“ Studentenschaft nicht mehr pauschal zutrifft. [...]

Walter Grünzweig, Professor für amerikanische Literatur und Kultur an der Technischen Universität Dortmund spricht von einer „Generation unter extremem Druck“. Die Studenten seien dazu angehalten, das Studium möglichst schnell abzuschließen: „Sie schauen nicht mehr nach rechts oder links, sie haben keine Zeit, sich für Themen außerhalb der Studienordnung zu interessieren. Sie wollen bloß möglichst unfallfrei zum Abschluss kommen.“ Dabei, kritisiert Grünzweig, bleibe die Reflexion des Gelernten auf der Strecke. Früher seien Studenten auch mal abgeschweift, hätten Seminare besucht, die das eigene Fach nur am Rande betrafen, hätten sich im Allgemeinen Studentenausschuss engagiert oder in politischen Gruppen. Heute fragen Studenten zuerst nach Credit Points, also den Punkten, die sie mit einer Veranstaltung sammeln können. Wenn er den jungen Frauen und Männern Bücher oder Essays zur Vertiefung empfehle, erzählt Grünzweig, lehnten sie ab. Dafür hätten sie keine Zeit. „Die Universitäten sind auf Effizienz getrimmt, und die Studenten passen sich an“, sagt Grünzweig. [...] „Wir erziehen eine unpolitische, antiintellektuelle Generation.“

DER SPIEGEL 4/4/2014.

**Répondre en ALLEMAND aux questions ci-dessous :**  
**(Environ 200 mots pour chaque réponse)**

1. Wie werden die heutigen deutschen Studenten in dieser Studie dargestellt?
2. Teilen Sie die Ansicht, dass die heutigen Studenten in Deutschland und Europa „eine unpolitische, antiintellektuelle Generation“ seien? Begründen Sie Ihren Standpunkt und geben Sie einige Beispiele.

## C O R R I G É

Par Jean-Gilbert Delarbre, professeur de Chaire supérieure au lycée Michelet à Vanves.

## I. TRADUCTION D'ALLEMAND EN FRANCAIS

En fait, je n'avais pas voulu devenir avocat, mais juge. J'avais la moyenne requise à l'examen, je savais que les juges étaient recherchés, j'étais prêt à aller où l'on avait besoin de moi et tenais l'entretien d'embauche au Ministère de la Justice pour une simple formalité. Il eut lieu un après-midi.

Le responsable du personnel était un vieux monsieur au regard bienveillant. « Vous avez eu votre bac à dix-sept ans, à vingt et un le premier et à vingt-trois ans le second examen de droit – je n'ai jamais eu un si jeune, et rarement un si bon candidat. (...) »

Vous avez un crédit de temps considérable. »

« Je ne comprends pas... »

« Vraiment ? » Il me dévisagea avec douceur. « Si vous débutez le mois prochain, vous jugerez les autres pendant quarante-deux ans. Vous siégerez en haut et les autres en bas. Vous les écouterez, dialoguerez avec eux, leur adresserez aussi de temps à autre un sourire, mais au bout du compte c'est vous qui déciderez d'en haut qui est dans son droit et qui est dans l'illégalité, qui perd sa liberté et qui la conserve. C'est cela que vous voulez ? – vingt-quatre années à siéger en haut, vingt quatre années à avoir raison ? Pensez-vous que cela vous fera du bien ? »

Je ne savais que dire.

D'après Bernhard Schlink, *Die Frau auf der Treppe*, Diogenes-Verlag, pp. 19-20.

## II. TRADUCTION DE FRANCAIS EN ALLEMAND

- Haben Sie schon den Eiffelturm gesehen? fragte sie, um das Thema zu wechseln. (...)

- Nein, ich bin heute morgen aus Neu-Dehli zurückgefliegen und ich bin direkt vom Flughafen hierher gefahren.

- Es gibt so viele spannende Geschichten und Anekdoten, die um dieses Denkmal kreisen. Wussten Sie, dass Maupassant den Eiffelturm verabscheute? Er aß jeden Tag dort, denn es war der einzige Ort in Paris, von dem aus man ihn nicht sehen konnte.

- Zunächst müsste ich wissen, wer dieser Maupassant überhaupt ist.

- Es ist ein französischer Schriftsteller aus dem neunzehnten Jahrhundert. Aber warten Sie mal ab, fügte sie hinzu, und biss in das letzte Stück ihres Kuchens. (...) Nach der Weltausstellung von 1889, für die der Turm gebaut wurde, sollte er abmontiert und dann zerstört werden. Freilich bedeutete seine Instandhaltung ein riesiges Finanzloch für die französische Regierung. (...)

- Jedenfalls, sagte sie schließlich, es ist schon schade, dass Sie den Eiffelturm nicht besichtigt haben.

Nach : Romain Puértolas, *L'extraordinaire voyage d'un fakir qui était resté coincé dans une armoire IKEA*, Le Dilettante, Paris 2013, pp.44-45.

# LV2 - ESPAGNOL

**DURÉE : 3 HEURES.**

*(La note sur 80 sera divisée par 4 pour obtenir la note sur 20, les deux chiffres après la virgule arrondis au dixième supérieur.)*

*Les candidats ne sont pas autorisés à modifier le choix de la deuxième langue dans laquelle ils doivent composer.*

*Ils ne doivent faire usage d'aucun document, dictionnaire ou lexique (sauf pour le latin et le grec ancien). L'utilisation de toute calculatrice ou de tout matériel électronique est interdite.*

*Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.*

## S U J E T

### Con el espíritu de las viejas utopías

- 1 Resulta oportuno reconsiderar las premisas clásicas de las teorías del desarrollo que nacieron hace más de medio siglo, pero que hoy son cada vez más cuestionadas. En el caso de Latinoamérica, los padres intelectuales fueron figuras señeras como Raúl Prebisch, economista argentino y gran impulsor de la Comisión
- 5 Económica de América Latina (CEPAL), fundada en 1949, y Celso Furtado, el economista brasileño más influyente que abogó por políticas públicas de desarrollo que continúan ejerciendo gran impacto en el Brasil contemporáneo. En México, el intelectual Victor Urquidi fue sin duda el pensador más original y prolífico en este terreno, siendo el más joven de las decenas de latinoamericanos que asistieron
- 10 a la conferencia de Bretton Woods en 1944. Urquidi fue luego gran promotor de políticas latinoamericanas de desarrollo así como de las ciencias sociales.

- Las ideas y los emprendimientos de Urquidi, Furtado, Prebisch y tantos otros economistas e ideólogos del desarrollo mantuvieron una larga vigencia y contribuyeron a los proyectos de industrialización y urbanización que fueron la base de los
- 15 llamados «milagros económicos» durante un cuarto de siglo, cuando Latinoamérica creció a ritmos notables, pese a experimentar la revolución demográfica más intensa del mundo.

- Estas tendencias se debilitaron posteriormente con las dictaduras latinoamericanas en los años setenta y aún más con la profunda crisis de las deudas latinoamericanas en los años ochenta. Siguió la época de los ajustes, las privatizaciones y el auge del llamado «consenso de Washington», que coincidieron con la globalización económica que tuvo su edad de oro en los años noventa y culminó con la
- 20 estruendosa crisis financiera de 2008.

- En contraste con lo ocurrido en Estados Unidos y Europa, la mayor parte de los
- 25 países de Sudamérica lograron esquivar los impactos tremendamente dañinos de la crisis financiera global de años recientes, aunque México y Centroamérica, más

atadas a la evolución de la economía norteamericana, sí sufrieron graves perjuicios. Desde comienzos del nuevo siglo, en cambio, la mayoría de los Gobiernos sudamericanos adoptaron nuevas políticas económicas y sociales que facilitaron el  
 30 despegue de sus economías. En los casos de Argentina, Brasil, Chile, Colombia y Perú, pero también de Bolivia, Paraguay y Uruguay, se han alcanzado tasas de crecimiento en la última década que han sido superadas solamente por China e India.

Pero no solo hay que crecer, sino hacerlo de manera democrática y sostenible. Si bien la extrema pobreza se ha reducido en Sudamérica en el último decenio de  
 35 manera dramática, falta asegurar el progreso futuro de manera que no se abran las puertas a los abruptos giros socialmente regresivos tan frecuentes del pasado.

Carlos Marichal Salinas, *El País*, 26/08/14.

## I. VERSION

(sur 20 points)

Traduire depuis « Estas tendencias... » jusqu'à « ...graves perjuicios. »  
 (De la ligne 18 à la ligne 27)

## II. QUESTIONS

(sur 40 points)

### 1. Question de compréhension du texte

¿Cuáles fueron según el autor «las premisas clásicas de las teorías del desarrollo»?  
 (ligne 1)

(150 mots  $\pm$  10 %\* ; sur 20 points)

### 2. Question d'expression personnelle

¿En qué medida considera usted que puede aplicarse a la América Latina de hoy la afirmación de Carlos Marichal Salinas según la cual «no solo hay que crecer, sino hacerlo de manera democrática y sostenible»? (ligne 34)

(250 mots  $\pm$  10 %\* ; sur 20 points)

\* Le non-respect de ces normes sera sanctionné.

Indiquer le nombre de mots sur la copie après chaque question.

## III. THÈME

(sur 20 points)

1. Au cours des derniers mois, deux présidents latino-américains ont été réélus.
2. Bien que le référendum n'ait pas eu lieu, les nationalistes poursuivent leurs actions.
3. Avec plus de 60 % des votes, les électeurs lui ont accordé leur soutien.
4. Quand les banques passeront l'examen de la BCE, nous pourrons respirer.
5. Ne perdons plus d'investisseurs étrangers en augmentant les impôts !
6. Quoi qu'il puisse advenir, nous interrogerons les citoyens sur leur avenir.
7. S'il n'avait pas trouvé trois millions pour payer sa caution, ses biens auraient été saisis.
8. Pour nous, la crise économique dure depuis beaucoup trop longtemps.
9. Le ministre avait proposé une nouvelle réforme fiscale sans que le président soit au courant.
10. N'hésitez pas à contacter votre conseiller pour tout projet d'investissement.

## I. VERSION

---

Ces tendances ont ensuite faibli à l'époque des dictatures latino-américaines dans les années soixante-dix, et plus encore lors de la grave crise des dettes latino-américaines des années quatre-vingt. Puis est arrivée l'époque des ajustements structurels, des privatisations et l'essor de ce que l'on a appelé le « consensus de Washington », qui ont coïncidé avec la mondialisation économique qui a connu son âge d'or dans les années quatre-vingt-dix et son point culminant lors de la retentissante crise financière de 2008.

Contrairement à ce qui s'est passé aux Etats-Unis et en Europe, la plupart des pays d'Amérique du Sud ont réussi à éviter les effets extrêmement nocifs/dommageables de la crise financière planétaire de ces dernières années, bien que le Mexique et l'Amérique Centrale, plus liés à l'évolution de l'économie de l'Amérique du Nord, aient, pour leur part/bel et bien, été gravement touchés.

## III. THÈME

---

1. A lo largo de los últimos meses, dos presidentes latinoamericanos han sido reelegidos.
2. Aunque no se ha celebrado el referendun, los nacionalistas prosiguen sus acciones.
3. Con más del 60% de los votos, los votantes le han concedido/concedieron su apoyo/respaldo.
4. Cuando los bancos sean examinados por el BCE<sup>1</sup>, podremos respirar.
5. ¡Dejemos de perder a inversores/inversionistas extranjeros aumentando/subiendo los impuestos!
6. Pase lo que pase, interrogaremos/preguntaremos a los ciudadanos/la ciudadanía sobre su porvenir.
7. Si no hubiera encontrado tres millones para pagar su fianza, sus bienes habrían sido confiscados/se habrían confiscado<sup>2</sup> sus bienes.
8. Para nosotros, la crisis económica dura desde hace demasiado<sup>3</sup> tiempo<sup>4</sup>.
9. El ministro había propuesto una nueva reforma fiscal sin que el presidente estuviera al corriente/al tanto.
10. No vacile(n)/dude(n) en contactar con su asesor para cualquier proyecto de inversión.

1. Attention au genre masculin (« el banco »).

2. Les verbes « incautar » et « embargar » pouvaient être employés ici.

3. Il n'est pas possible de traduire littéralement « beaucoup trop » : « mucho » et « demasiado » ne sont pas juxtaposables.

4. On pouvait aussi penser à la périphrase suivante : *lleva demasiado tiempo durando*.

# LV2 - ESPAGNOL

**DURÉE : 3 HEURES.**

*Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document, dictionnaire ou lexique ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.*

## 1. TRADUCTIONS

**DURÉE DE L'ÉPREUVE : 1 HEURE 30.**

### I. TRADUCTION DU FRANÇAIS EN ESPAGNOL

Des deux entrées du café, elle empruntait toujours la plus étroite, celle qu'on appelait la porte de l'ombre. Elle choisissait la même table au fond de la petite salle. Les premiers temps elle ne parlait à personne, puis elle a fait connaissance avec les habitués du Condé dont la plupart avaient notre âge, je dirais entre dix-neuf et vingt-cinq ans. Elle s'asseyait parfois à leurs tables, mais le plus souvent, elle était fidèle à sa place, tout au fond.

Elle ne venait pas à une heure régulière. Vous la trouviez assise là très tôt le matin. Ou alors, elle apparaissait vers minuit et restait jusqu'au moment de la fermeture. C'était le café qui fermait le plus tard dans le quartier avec Le Bouquet et La Pergola, et celui dont la clientèle était la plus étrange. Je me demande, avec le temps, si ce n'était pas sa seule présence qui donnait à ce lieu et à ces gens leur étrangeté.

Patrick Modiano, *Dans le café de la jeunesse perdue*, Gallimard, 2007.

*NB : On ne traduira pas le titre de l'œuvre.*

### II. TRADUCTION DE L'ESPAGNOL EN FRANÇAIS

Querida Natalia:

No sabes la alegría que me ha dado leer tu respuesta... Lástima que la haya visto demasiado tarde para poder vernos el jueves, tal como me proponías. He tenido enfermos a los niños, a todos. No sabes cómo son estas cosas, primero coge algo uno, luego se lo pasa al otro y al final caemos todos. O quizá sí lo sabes, no sé por qué he dado por sentado que no tienes niños. Seguramente porque entonces no pensabas tenerlos, pero, claro, tampoco yo pensaba que a los cuarenta (vaaaaaleeeee, a los cuarenta y dos...) sería como soy ahora, lo que soy ahora, una madre, una esposa, una bibliotecaria, una mujer con una vida que no es que sea aburrida pero que, desde luego, no era la que soñaba cuando tenía diecisiete años. ¿La tienes tú? ¿Crees que es malo soñar, haber soñado, si llega un momento en el que te das cuenta de que la vida que tienes no se parece a la que habías imaginado?

No me malinterpretes, no soy desgraciada. Mis hijos me hacen feliz, y quiero mucho a Javier (mi marido). Mi trabajo me gusta, y aunque no me gustara, lo tengo que con la que está cayendo es como para dar saltos de alegría.

Carmen Amoraga, *El rayo dormido*, Ediciones Destino, 2012.

*NB : On ne traduira pas le titre de l'œuvre.*

## 2. EXPRESSION ÉCRITE

**DURÉE DE L'ÉPREUVE : 1 HEURE 30**

### Donde sí se reivindica la Hispanidad

Hoy se clausura en Estados Unidos el Mes de la Herencia Hispana, una conmemoración que se instauró en 1968, durante la presidencia de Lyndon B. Johnson y que 20 años más tarde, durante el mandato de Ronald Reagan, se amplió de una semana a todo un mes de celebraciones. La fecha no es casual. En torno al 15 y 18 de septiembre se celebra la independencia de países como Costa Rica, El Salvador, Guatemala, Honduras, México y Chile, mientras que el 12 de octubre en EEUU es conocido como Columbus Day (Día de Colón). Durante 30 días, las administraciones públicas, las empresas, la sociedad civil, los colegios y las universidades organizan todo tipo de actividades culturales y sociales para reivindicar la identidad hispana y su contribución al desarrollo del país. Y es que Estados Unidos sí reivindica la Hispanidad como parte esencial de su historia, de su evolución como nación y, sobre todo, de su futuro. Un futuro que será hispano gracias al gran auge que esta comunidad está teniendo en las últimas décadas.

Según datos del último censo oficial, ya hay más hispanos en Estados Unidos que españoles en España. En 2025 se estima que uno de cada cuatro ciudadanos estadounidenses será de origen hispano; una proporción que pasará a uno de cada tres en 2050, fecha en la que Estados Unidos ya será el primer país hispanohablante del mundo.

Estos datos evidencian una realidad a la que España no puede dar la espalda. En nuestro país, la Hispanidad es hoy un concepto incómodo para muchos y repudiado y caricaturizado por otros. El abuso que se hizo de esta idea en otras épocas históricas, junto con ciertos complejos actuales, no deberían suponer el renunciar a un eje estratégico para la acción exterior de España.

La Hispanidad es hoy un fenómeno eminentemente cultural, en el que el idioma español juega un papel primordial. Más de 500 millones de personas hablan nuestra lengua en todo el mundo. Es el idioma oficial en más de 20 países y el número de estudiantes que eligen el español como lengua extranjera no para de crecer. Según las proyecciones del Instituto Cervantes y otras fuentes internacionales, dentro de 15 años – para 2030 – los hispanohablantes serán el 7,5% de los hablantes de todo el mundo, muy por encima del ruso (2,2%), del francés (1,4%) y del alemán (1,2%).

En este contexto, 2015 puede ser un año clave en este proceso de fortalecimiento de los vínculos entre España y la comunidad hispana de Estados Unidos. El próximo año se cumplirán 450 años de la fundación de San Agustín (Florida), la ciudad más antigua de Estados Unidos, cuyo origen se remonta al año 1565, cuando allí se instaló un grupo de españoles liderado por el almirante Pedro Menéndez de Avilés, uno de esos muchos héroes olvidados en España, pero recordados y honrados en Estados Unidos.

En 2009, el Congreso de EEUU, por orden del presidente Obama, aprobó la creación de una comisión federal para la conmemoración del 450 aniversario de San Agustín. Desde entonces se viene trabajando en diferentes iniciativas para rememorar esta fecha crucial en la historia de Estados Unidos. No obstante, esta celebración es todavía prácticamente desconocida en España. Por ello, el gran reto es que este tipo de actividades conmemorativas no se limiten a un ámbito institucional con un impacto social limitado, sino que puedan tener calado en la

opinión pública. En este sentido, el papel del Rey Felipe VI, que conoce y comprende la dimensión y el potencial de la cultura hispana, puede ser un gran aliado. Nuestro país tiene en 2015 una oportunidad estratégica para incrementar su presencia en Estados Unidos. El Ministerio de Asuntos Exteriores y otros actores como la Fundación Consejo de España-Estados Unidos, la Fundación Carolina, la Casa de América, el Real Instituto Elcano o The Hispanic Council, entre otros, trabajan en esta dirección, pero todavía hay mucho camino por recorrer.

Daniel Ureña, *El Mundo*, 14/10/2014.

**Répondez en espagnol aux questions suivantes :**  
**(200 mots environ pour chaque réponse)**

1. Según el autor, ¿qué importancia tiene la Hispanidad en Estados Unidos?
2. En un contexto internacional, ¿qué impacto puede tener la creciente presencia hispana en Estados Unidos?

# CORRIGÉ

Par Frédérique Mabilais, professeure agrégée d'espagnol au lycée Jeanne-d'Arc à Caen.

CCIR

CORRIGÉ

## I. TRADUCTION DU FRANÇAIS A L'ESPAGNOL

De las dos entradas del café, ella utilizaba siempre la más estrecha, la que llamábamos la puerta de la sombra. Solía elegir la misma mesa al fondo de la sala pequeña. Durante los primeros tiempos no hablaba con nadie, luego fue conociendo a los parroquianos del Condé entre los cuales la mayor parte tenía nuestra edad, diría yo que entre los diecinueve y los veinticinco años. A veces se sentaba a sus mesas, pero la mayor parte del tiempo, permanecía fiel a su sitio, allá al fondo. No solía venir a una hora determinada. Uno la podía encontrar sentada allí, muy temprano por la mañana. O si no, aparecía hacia las doce de la noche y se quedaba hasta la hora del cierre. Era el café del barrio que cerraba más tarde, con Le Bouquet y La Pergola, y el que tenía la clientela más rara. Con el tiempo, me pregunto si lo que le daba al lugar y a esa gente su extrañeza no era su sola presencia.

Patrick Modiano, *Dans le café de la jeunesse perdue*, Gallimard, 2007.

## II. TRADUCTION DE L'ESPAGNOL AU FRANCAIS

Ma chère Nathalie,

Tu n'imagines pas la joie que j'ai ressentie en lisant ta réponse... C'est dommage que je l'aie vu trop tard pour que nous puissions nous voir jeudi, comme tu me le proposais. Les enfants ont été malades, tous. Tu ne peux pas savoir ce que c'est, d'abord il y en a un qui attrape quelque chose, ensuite il le passe à l'autre, et pour finir nous sommes tous malades. Peut-être qu'en fait tu le sais, je ne sais pas pourquoi je me suis mis dans la tête que tu n'as pas d'enfants. Probablement parce qu'à l'époque, tu ne pensais pas en avoir, mais, bien-sûr, moi non plus je ne pensais pas qu'à quarante ans (bon, d'accord, à quarante-deux ans ...) je serais comme je suis maintenant, une mère, une épouse, une bibliothécaire, une femme avec une vie, pas ennuyeuse, non, bien-sûr, mais qui n'est pas non plus celle dont je rêvais quand j'avais dix-sept ans. Et toi, tu l'as cette vie ? Crois-tu qu'il soit mal de rêver, d'avoir rêvé, quand arrive le moment où l'on se rend compte que la vie que l'on a ne ressemble pas à celle que l'on avait imaginée ? Ne te méprends pas, je ne suis pas malheureuse. Mes enfants me rendent heureuse, et j'aime beaucoup Javier (mon mari). Mon travail me plaît, et même s'il ne me plaisait pas, j'ai du travail, et par les temps qui courent, il y a de quoi sauter de joie.

Carmen Amoraga, *El royo dormido*, Ediciones Destino, 2012.

## LV2 - ITALIEN

DURÉE : 3 HEURES.

*(La note sur 80 sera divisée par 4 pour obtenir la note sur 20, les deux chiffres après la virgule arrondis au dixième supérieur.)*

*Les candidats ne sont pas autorisés à modifier le choix de la deuxième langue dans laquelle ils doivent composer.*

*Ils ne doivent faire usage d'aucun document, dictionnaire ou lexique (sauf pour le latin et le grec ancien). L'utilisation de toute calculatrice ou de tout matériel électronique est interdite.*

*Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.*

## S U J E T

**Lascio l'Australia, torno in Italia. Mi invento un lavoro e continuo a sognare**

- 1 È trascorso un anno da quando Daniel Mazza ha lasciato l'Australia per rientrare nella provincia di Torino, di nuovo a casa dei suoi genitori. «Sono tornato nel 'Paese della crisi', dove tutti sembrano vivere rassegnati a questa situazione senza avere la forza (o la voglia?) di reagire. In un anno mi sono rimboccato le maniche e ho
- 5 pensato: se non c'è lavoro, me lo creo». E oggi è fiero di essere il fondatore di *Mon-do aeroporto*, il sito web che ha creato dedicato ai viaggi, notizie dai cieli, offerte di lavoro nel settore aeroportuale, con aneddoti sui viaggiatori di tutto il mondo e un blog tutto suo.
- 10 Daniel, 26 anni, dopo aver chiesto un anno di aspettativa all'aeroporto di Torino, dove lavora come responsabile sicurezza, nell'ottobre 2012, atterra a Sydney. Lavora al mattino come cameriere in un bar, alla sera in un ristorante e nel fine settimana mette in un jazz club. È impegnato dalle sei del mattino alle dieci di sera e alla fine di ogni settimana mette in tasca 1200 dollari. Dopo tre mesi, molla tutto.
- 15 «Ero in ritardo con il rinnovo del visto, ma soprattutto era venuto a mancare mio nonno e mio padre aveva perso il lavoro. Non me la sentivo di lasciare soli i miei». E fa loro una sorpresa: il giorno del compleanno di suo papà si presenta sulla porta di casa con le valigie in mano. Ma la sua testa è diversa. «In un anno sono cambiate le priorità della mia vita, progetti, ambizioni, sogni». Ci spiega cosa intende: «Non
- 20 voglio avere vincoli in Italia e, per adesso, da nessuna altra parte. Di mio ho solo la macchina, che sto pagando a rate, ma non ci metto niente a venderla. Non vivo in un appartamento da solo per lo stesso motivo».
- 25 Daniel ha capito che non può accontentarsi di fare un lavoro, per sopravvivere, ma che deve fare qualcosa che gli piace davvero, per vivere. «Non voglio svegliarmi al mattino sperando che qualcuno cambi la mia vita al posto mio e non sverderò i miei sogni per accontentarmi a vivere nell'oblio dell'appagatezza. Non c'è cosa più motivante di rimettersi in gioco ogni giorno di più e la valigia con tutti i miei sogni, quella, non l'ho mai disfatta. È facile lamentarsi, piangersi addosso,

30 noi italiani secondo me abbiamo le potenzialità, siamo intelligenti, ma spesso pigri, non ci applichiamo come dovremmo».

Daniel continua a lavorare come responsabile sicurezza all'aeroporto di Torino. «In tanti mi contattano da quando ho aperto *Mondo aeroporto*. Non appena ricevo o trovo un'offerta per cui valga la pena mollare tutto, mi butto».

D'après Chiara Daina, *Il Fatto Quotidiano*, 18 settembre 2014.

## I. VERSION

(sur 20 points)

Traduire en français depuis « Lavora al mattino... » Jusqu'à « ... non ci metto niente a venderla ».

## II. QUESTIONS

(sur 40 points)

### 1. Question de compréhension du texte

Spiegate : «Non voglio avere vincoli in Italia».

(150 mots + ou – 10 %\* ; sur 20 points)

### 2. Question d'expression personnelle

Cosa pensate della frase: «Se non c'è lavoro, me lo creo.»?

(250 mots + ou – 10 %\* ; sur 20 points)

\* Le non-respect de ces normes sera sanctionné. Indiquer le nombre de mots sur la copie après chaque question.

## III. THÈME

(sur 20 points)

1. Pouvez-vous, Monsieur, me donner le nom de cinq marques italiennes de luxe ?
2. Il y a quelques années, nous allions tous les week-ends à Sienne.
3. Personne n'imaginait que Matera serait capitale européenne de la culture.
4. Si elle n'était pas aussi émue, elle ferait un discours.
5. Regarde ce que tu as écrit dans ce courriel et corrige-le !
6. Ce premier ministre est plus jeune que son prédécesseur.
7. Quand on est en vacances, on est heureux d'avoir du temps.
8. Dès sa jeunesse, il a été intéressé par une carrière à l'étranger.
9. Son oncle et ses cousins sont venus fêter son anniversaire.
10. Si tu gagnes ce match, tu deviendras riche et célèbre.

# CORRIGÉ

Par Bernard-A. Chevalier, professeur d'italien.

## I. VERSION

---

Il travaille le matin comme serveur dans un bar, le soir dans un restaurant et le week-end dans un club de jazz. Il est pris de six heures du matin à dix heures du soir et à la fin de la semaine il empoche 1 200 dollars. Trois mois plus tard il plaque tout. « J'étais en retard pour le renouvellement du visa mais surtout je venais de perdre mon grand-père et mon père n'avait plus de travail ». Je ne me sentais pas le courage de laisser mes parents seuls. Et quelle surprise pour eux : le jour de l'anniversaire de son papa, il se présente à la porte de la maison, la valise à la main. Mais il a bien changé. « En un an mes priorités de vie, mes projets, mes ambitions, mes rêves, ont changé. »

Il nous explique ce qu'il veut dire par là : « Je ne veux pas avoir de contraintes en Italie et, pour le moment, dans aucun autre pays. Je ne possède qu'une voiture, que je paie à crédit, mais ça ne me gêne pas de la vendre. »

## III. THÈME

---

1. Signore, mi può dare il nome di cinque marchi francesi di lusso?
2. Qualche anno fa, andavamo a Siena ogni fine settimana.
3. Nessuno immaginava che Matera sarebbe stata capitale europea della cultura.
4. Se non fosse così commossa, farebbe un discorso.
5. Guarda ciò che hai scritto in questa e-mail e correggila!
6. Questo Premier è più giovane del suo predecessore.
7. Quando si è in vacanza si è felici di avere tempo.
8. Fin dalla giovinezza è stato interessato da una carriera all'estero.
9. Suo zio ed i suoi cugini sono venuti a festeggiare il suo compleanno.
10. Se vincerai la partita, diventerai ricco e famoso.

# HISTOIRE, GÉOGRAPHIE ET GÉOPOLITIQUE DU MONDE CONTEMPORAIN

**DURÉE : 4 HEURES.**

*Tout verbiage doit être évité et il est expressément recommandé de ne pas dépasser huit pages. Il sera tenu compte des qualités de plan et d'exposition, ainsi que de la correction de la langue. Il est rappelé que la carte réponse est à remplir (en collant l'étiquette code barre supplémentaire). Les documents d'accompagnement ci-joints sont essentiellement là pour aider le candidat dans sa réflexion sur le sujet posé et sa représentation cartographique. Il n'est fait usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.*

## SUJET

### LES ESPACES MARITIMES, OBJET DE TENSIONS ET DE CONFLITS ENTRE LES ETATS.

**CARTE :** *En utilisant vos connaissances et si nécessaire les documents ci-joints, construisez une carte appuyant et illustrant vos propos. La légende ne devra pas faire plus d'une page. Il est rappelé que **la carte est obligatoire**. Elle doit également comporter un titre.*

#### Sommaire

**Doc. 1 : Repères chronologiques**

(Source : compilations diverses)

**Doc. 2 : Extrait du discours prononcé par le Général Charles de Gaulle à Brest en 1969**

(Source : Sénat, *Rapport d'information du groupe de travail sur la maritimisation*, n° 674, 2012, p. 198)

**Doc. 3 : Les principales marines de guerre mondiales**

(Source : *Conflits*, n° 4, janvier-février-mars 2015, p. 49)

**Doc. 4 : Expansion juridictionnelle à travers l'exemple des ZEE**

(Source : Deboudt P., Meur-Ferec C., et Morel V. (dir.), *Géographie des mers et des océans*, Paris, 2014, p. 273)

**Doc. 5 : La territorialisation de l'océan Glacial Arctique en 2014**

(Source : Revue *CARTO*, n° 26, nov.-déc. 2014, p. 19)

## D O C U M E N T S

## DOCUMENT 1

## Repères chronologiques

- 1947 : publication de la première carte chinoise faisant officiellement état de revendications territoriales (sous forme de pointillés) en mer de Chine méridionale
- 1958 : première Conférence abordant le droit de la mer à Genève
- 1971 (11 février) : signature du Traité de dénucléarisation des fonds marins
- 1974 : occupation des îles Paracels par la Chine
- 1982 (mai-juin) : guerre des Malouines
- 1982 : signature le 10 décembre de la Convention de Montego Bay sur le droit de la mer
- 1984-1987 : « guerre des tankers » dans le détroit d'Ormuz
- 1985 : élaboration de la doctrine navale chinoise dite de « Défense active des mers proches » par l'amiral Liu Huaqing
- 1994 : entrée en vigueur le 16 novembre de la Convention de Montego Bay
- 1995 : crise du détroit de Taiwan, entre la Chine et les Etats-Unis
- 1996 (25 mars) : adhésion de la France, de la Grande-Bretagne et des Etats-Unis au traité de dénucléarisation du Pacifique sud
- 2005 : publication par le Département d'Etat américain d'un rapport intitulé *Energy Futures in Asia* faisant référence pour la première fois à la stratégie dite du « Collier de perles »
- 2007 (été) : pour la première fois, le « Passage du nord-ouest » a été libre des glaces dans l'océan Glacial Arctique
- 2007 (2 août) : un bathyscaphe russe plante un drapeau en titane au pôle Nord par 4 200 m de fond
- 2009 (13 mai) : date ultime de dépôt des demandes d'extension des ZEE auprès de la Commission des limites du plateau continental à l'ONU
- 2010 : signature d'un Accord de partage des espaces maritimes entre la Russie et la Norvège
- 2012 : entrée en service le 24 septembre du *Liaoning*, le premier porte-avions chinois (ex- « Varyag » racheté à la Russie en 2000)
- 2013 (10 avril) : signature d'un accord historique entre le Japon et Taiwan concernant les droits de pêche autour des îles Senkaku
- 2015 (2 mars) : la Côte d'Ivoire réclame devant le Tribunal international du droit de la mer la suspension par le Ghana « de toutes les opérations d'exploration et d'exploitation pétrolières » dans une zone offshore que les deux pays se disputent.

Sources : compilations diverses.

## DOCUMENT 2

## Extrait du discours prononcé par le Général Charles de Gaulle à Brest en 1969

« L'activité des hommes se tournera de plus en plus vers la recherche de l'exploitation de la mer. Et, naturellement, les ambitions des Etats chercheront à la dominer pour en contrôler les ressources... ».

Source : Sénat, *Rapport d'information du groupe de travail sur la maritimisation*, n° 674, 2012 p. 198.

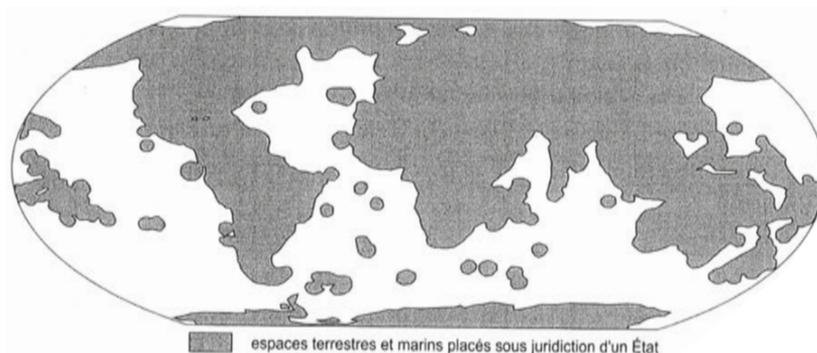
**DOCUMENT 3****Les principales marines de guerre mondiales**

	Etats-Unis	Russie	Chine	Japon	Royaume-Uni	France	Inde
Tonnage (x 1000 t)	3000	1000	900	380	370	304	255
Nombre	280	300	400	110	90	100	100
Porte-aéronefs <sup>1</sup>	33	1	3	5	4	4	3
Pétroliers (plus de 10 000 t)	14	6	3	2	4	3 <sup>2</sup>	-
SNA	52	15	5	-	7	6	1

N'ont été pris en compte que les unités effectivement en service, hors constructions en cours.

1. Total des porte-avions de type CATOBAR ou STOBAR/STOVL et des porte-hélicoptères d'assaut et navires amphibies.
2. En tenant compte du désarmement de la Meuse annoncé pour 2015.

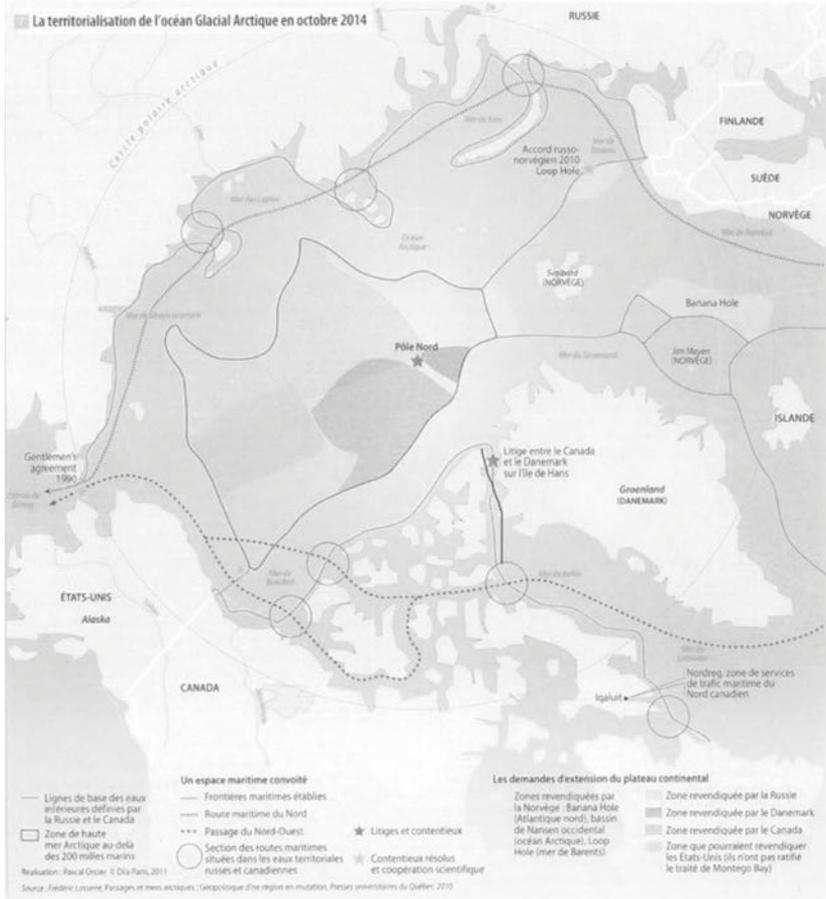
Source : *Conflits*, n° 4, janvier-février-mars 2015, p. 49.

**DOCUMENT 4****Expansion juridique à travers l'exemple des ZEE**

Source : Deboudt P., Meur-Ferec C., et Morel V. (dir.), *Géographie des mers et des océans*, Paris, 2014, p. 273.

DOCUMENT 5

La territorialisation de l'océan Glacial Arctique en 2014



Source : revue CARTO, n° 26, nov-déc. 2014, p. 19.

# CORRIGÉ

Par Alain Nonjon, professeur au lycée Michelet à Vanves.

Richelieu : « la première chose qu'il faut faire est de se rendre puissant sur les mers qui donnent entrée à tous les Etats du monde ».

« La géopolitique marine est en quelque sorte un passeport pour l'avenir qui permet l'ouverture sur le grand large et sur des continents au-delà des mers où va s'inscrire une grande partie de l'histoire du *xx<sup>e</sup>* siècle », Pierre Papon.

## Introduction

Si la mer est facteur de richesse, de puissance, de domination, de développement, elle ne peut que générer tensions, convoitises et conflits ; déjà les drames du Rio Grande méditerranéen, les rivalités qui se radicalisent de la mer de Chine aux affrontements des prétentions des pays riverains de l'Arctique confirment que la mer est bien un lieu de confrontations. Mais le 6<sup>e</sup> continent devient-il seulement l'épicentre des rapports de force de nos jours, à la mesure du retour en force des idéaux thalassocratiques, ou est-il porteur d'une cogestion des biens communs de l'humanité et d'un véritable partage de ces nouvelles richesses ?

## I. Les espaces maritimes : des rivalités traditionnelles autour de potentiels convoités et disputés jalonnent l'Histoire récente

**A/ Simple « voie de passage hier », la mer, promue « territoire » (c'est-à-dire espace équipé, contrôlé, habité, rentabilisé) devient inévitablement un espace de plus en plus conflictuel**

- 90 % du commerce mondial s'effectuent par voie maritime... Et les progrès dont le transport maritime ont été *a minima* aussi importants que ceux enregistrés dans les transports terrestres... (diésélisation, révolution de la boîte de vitesse). De là des conflits pour contrôler voies de passage comme hier sur Suez (1956) ou avant-hier Panama (« *I took Panama* » de Theodore Roosevelt) et aujourd'hui le président Abdel Fattah al-Sissi fait de l'inauguration fastueuse d'une portion doublée du canal, un levier de puissance, de trésorerie et de relégitimation internationale.

- Des flux nombreux, variés structurent les voies maritimes : pétrole par tankers, minerais par minéraliers ou OBO (*oil bulk ore*), biens de consommation par conteneurs toujours plus puissants (20 000 EVP) ; de là les tentations des flibustiers du *xxi<sup>e</sup>*, et leur faisant écho avec moins de code d'honneur la piraterie maritime de la Somalie au large de Chittagong en passant par le Golfe de Guinée (la zone plus violente désormais fin octobre 2014) avec la mer de Chine (70 % des détournements) les Caraïbes et le Pérou.

- Des activités industrielles se littoralisent aux ruptures de charge (arc portuaire du Golfe du Mexique de Corpus Christi à Bâton rouge) des Zip s'organisent (Midas japonaises) des ZES littorales deviennent des ateliers tournés vers l'exportation (plus de 200 en Chine côtière) avec des risques, sources de conflits : pollution, accidents comme celui du port de Tianjin en août 2015, conflits sur les responsabilités et les indemnités (Amoco Cadiz, au large de la Bretagne ; Prestige au large de la Galicie ; boues rouges au large de la Corse).

- Des activités touristiques renforcent les littoraux avec parfois des conflits ouverts entre agriculture et infrastructures hôtelières comme au Cap bon en Tunisie où le tourisme prend en otage l'agriculture devant la rareté de l'eau douce ou entre

producteurs de pétrole et pêcheurs de crevettes du Golfe de campêche au Mexique ou écologistes et gestionnaires du gisement de Libra au large de Rio au Brésil.

- Les activités de transport maritimes sont telles que la recherche d'une compétitivité prix sur les transports conduit à des conflits sur les armements, les pavillons de complaisance, équipages multiethniques et de plus en plus réduits (25 personnes pour un conteneur de 18 000 boîtes), des controverses sur la qualification malgré les contrôles de l'EMSA (european maritime safety agency).
- Les conflits de compétence entre ports pour détourner des trafics rentables sont nombreux : Anvers au débouché de l'Escaut et Marseille en l'absence du canal Rhin Rhône, comme hier Londres face à Amsterdam, comme Abidjan et Accra.
- Avec les projets de forages pétroliers *off shore*, l'essor des parcs éoliens maritimes, les parcs photovoltaïques, les exploitations à grande échelle des algues et minerais, le tourisme de masse, les mises aux normes de l'intensification des échanges des canaux transocéaniques (Panama doublé, Suez) la mer devient un enjeu central de la puissance au XXI<sup>e</sup> siècle.

### **B/ La territorialisation de la mer, la marinisation des économies, amplificateurs de conflits**

- Lorsque Truman le 28 septembre 1945 affirme « *le plateau continental peut être regardé comme l'extension de la masse terrestre de la nation souveraine* » pour sécuriser les gisements du Golfe du Mexique, il augure un mouvement d'appropriation des espaces maritimes avec en 50 ans des dizaines de millions de km<sup>2</sup> passant sous le contrôle des Etats côtiers : pour Didier Ortolland et Jean Pierre Pirat dans leur *Atlas géopolitique des espaces maritimes*, ce bornage de l'espace maritime constitue la plus grande conquête territoriale depuis la colonisation. Il faut attendre Montego bay en 1982 pour qu'une convention conclue par 130 pays définissent des zones économiques exclusives. Mais la convention n'entre en vigueur qu'en 1994, des pays et non des moindres la Chine par exemple ne la paraphent pas, et les ZEE deviennent lieux d'âpres négociations entre les Bahamas et Cuba (2011 encore), Brunei et Malaisie (2009).
- Certes dès la colonisation, la recherche de ports comme autant de débouchés et de relais d'influence, et de sources d'approvisionnements avait nourri des conflits (en Inde conflits franco-anglais), la pêche avait également débouché sur des confrontations ou intimidations : Espagne / France, dans le Golfe de Gascogne, Espagne / Maroc, ou guerre de la morue (France Grande-Bretagne / France Canada) au large de Terre Neuve ou Saint Pierre et Miquelon. De vieilles rivalités ont été exhumées lorsque les dictatures argentines ont vu dans la reconquête des Iles Malouines un levier de leur influence : conflit anglo-argentin avec en arrière plan l'accès aux ressources en Krill, ressources antarctiques.
- Désormais les conflits sur les plateformes littorales sont des enjeux régionaux importants particulièrement en mer de Chine mais également dans le Golfe de Guinée entre le Cameroun et le Nigéria jusqu'à l'accord sur l'île de Bakoussi, ou entre l'Espagne et le Maroc sur les îles Persil. La recherche de nodules polymétalliques et la course aux minerais devraient élever le niveau de tensions dès lors que l'exploitation industrielle s'amorce.

### **C/ La mer zone de contact et de partage mais aussi espace de détresse**

- Comme hier les *boat people* fuyant la normalisation vietnamienne ou les « balseros » cubains voulant échapper à l'autoritarisme castriste jusqu'à l'accord de 2015, la Méditerranée est devenue un enjeu migratoire « *L'Europe est confrontée*

à une crise des réfugiés par voie maritime qui atteint des proportions historiques » (Antonio Guterres UNHCR). La Méditerranée a vu ses rivages bouleversés en 20 ans d'intervalle par la fin de l'affrontement Est-Ouest en 1991 et les soulèvements arabes en 2011. Ses équilibres bousculés par la pollution (1 % de la surface des espaces maritimes du globe, 25 % du trafic maritime planétaire) et est devenue un carrefour migratoire de plus en plus dantesque. Un nombre record de 137 000 migrants ont traversé la Méditerranée dans des conditions périlleuses au cours du premier semestre 2015 (83 % de hausse par rapport au premier semestre 2014, selon l'ONU avec 1 867 morts sur le trajet Turquie Grèce supplantant Afrique du Nord Italie soit plus qu'en 2011 année pourtant des printemps arabes pic migratoire). En mai 2015 des victimes des discriminations en Birmanie, les Rohingyas (800 000) exilés tentent de fuir par la mer et ont dérivé au large de la province de Aceh à la pointe nord de Sumatra.

- Les réfugiés climatiques transsahariens de plus en plus magnétisés par le passage de la Méditerranée pour travailler à l'étranger plutôt que mourir chez soi (Soninké).
- Les crispations sur Schengen entre puissances européennes cristallisent les conflits : Frontex est une barrière de « sécurité » d'une Europe qui contient plus qu'elle ne subvient (Triton-9 millions d'euros mensuels – après *mare nostrum* et Poséidon).
- Au-delà de ces comptabilités macabres, il est facile de saisir l'importance des enjeux géopolitiques des mers car elles représentent à la fois des échanges, des contacts civilisationnels, des ressources, des risques aussi, et des zones inévitables de confrontation de puissances. Pour Hubert Védrine « *la mer sera un des lieux majeurs d'affrontements* ».

## II. La mer : un vecteur idéal de projection de puissance et un multiplicateur de puissance

### A/ Un contexte nouveau où aucun territoire n'échappe aux conflits

- Si le  $xx^e$  siècle fixe comme priorité la sécurité politique avec pendant la guerre froide une prime évidente au transport intercontinental maritime, le  $xxi^e$  siècle a lui pour priorité la sécurité du développement économique, humain, écologique dans un monde multipolaire et polycentrique. C'est cette optique et notamment la course aux ressources de plus en plus féroce qui impose prioritairement le développement d'une capacité de projection de force à même d'assurer la sécurité des approvisionnements. Nombreuses sont donc les puissances qui parient sur la création et le développement de marines océaniques dans le but d'affirmer une volonté de sécurisation militaire de leurs besoins en matières premières ou énergie. Dans leur prétention à la puissance globale ou extrarégionale, elles se tournent vers la puissance navale qui leur offre la capacité de projeter hors de leurs eaux bordières une force suffisante pour garantir leurs approvisionnements.
- Schématiquement (cf. revue *Conflits*) « depuis Napoléon on définissait la puissance militaire d'une armée comme sa masse multipliée par sa vitesse... on prend la mesure du formidable atout d'une flotte capable de projeter 150 000 h et leur matériel comme ce fut le cas lors du débarquement de Normandie » A cela s'ajoute la très grande liberté de mouvement, l'absence d'infrastructures fixes qui donne une grande souplesse stratégique (Walter Raleigh : « le maître de la mer peut transférer son armée d'un point à un autre sans la fatiguer ni la fragmenter avec tout son équipement en un dixième de temps que cela prendrait à son adversaire terrestre »).

- A l'heure du « sea basing » (stations militaires flottantes) et de la gestion des ZEE, la mer est un formidable multiplicateur de puissance (capacité d'import, liberté de mouvement, autonomie, souplesse stratégique richesses...). Des pays comme la Chine militarise à tout va des îlots riches en ressources halieutiques et hydrocarbures : « *la grande muraille de sable* » fait fantasmer tous les stratèges (Harry Harris commandant américain de la flotte du Pacifique). L'îlot de Fiery Cross a bénéficié de quelques 12 milliards de dollar d'investissements et devient la grande base aéronavale chinoise des Spratleys au grand dam des Philippins qui rappellent que la légitimité d'un Etat sur un territoire n'est pas assise sur la construction d'infrastructures. Les Chinois réactivent le projet, la ligne en 9 points qui balisait en 1948 les droits de passage dits historiques. Bref la mer offre tout l'arsenal de la puissance célébré par Alfred Mahan « *c'est la facilité avec laquelle la puissance maritime se diffuse qui en fait une force si polyvalente et si efficace...* »
- Le « sea power » peut donc de nouveau être célébré et les analyses du stratège américain ont valeur d'exemple pour l'amiral Liu Huaqing, ou pour le ministre de la mer indien qui veut faire de l'océan indien l'océan des Indiens.

### **B/ La course à la mer : un modèle thalassocratique idéal partagé source de tensions**

Friedrich Ratzel répétait à l'envie « *un véritable Etat ne se conçoit plus en l'absence de puissance maritime* »

- Les Etats-Unis sont dans la lignée de Mahan et ont bousculé les accords de Washington en 1922 qui leur reconnaissent le premier rang à égalité avec le Royaume-Uni qui a décliné au 5<sup>e</sup> rang mondial : ils sont les seuls capables de l'exercice solitaire du pouvoir maritime aux quatre points cardinaux. Le pivot asiatique défini par Barack Obama en 2011 est avant tout naval (60 % des capacités navales déployées) et l'armada américaine se donne des moyens considérables pour s'imposer : 10 porte-avions à pont plat (catobar), 70 % des flottes de guerre mondiales avec porte-avions à catapultes avec 10 unités qui lui permettent d'avoir toujours 5 groupes aéronavals disponibles sous 30 jours et 2 supplémentaires au bout de 3 mois.
- La Chine ne veut plus être en reste : la tradition de Zeng he (1371-1433) est réactivée (ce bâtisseur de la quête du grand large vers l'Afrique orientale, célébré par une exposition fastueuse en 2004) et l'amiral Liu Huaqing (1916-2011) s'est défini comme partisan « *d'une défense active des mers proches* » Il a élaboré le concept des 3 lignes qui conduit à diviser l'espace maritime en 3 secteurs : le *yanbai* (côtier) le *jinhai* (mers de Chine) le *dayang* (haute mer) : il lui faut contrôler le deuxième au nom des droits historiques et accéder au 3<sup>e</sup> comme grande puissance économique : pétrole, richesses halieutiques, contrôle des routes, missions humanitaires et même lutte contre la piraterie. 250 000 hommes composent la people liberation army navy, 200 bâtiments récents (1/3 du tonnage US), Porte avion Liaoning (ex Varyag ukrainien), navires classe attaque Houbai, des corvettes Jiangdao, destroyers multifonctions Luoyang, 70 sous-marins dont 3 SNLE et d'ici 2020 un autre porte-avion, une demi douzaine de sous-marins nucléaires, des satellites de guidage. Des appuis logistiques sont créés et porte le nom médiatisé de « Collier de perles » (*string of pearls*), groupe californien de pop repris par les néoconservateurs inquiets du chaînon de ports créés par les Chinois du Golfe persique au littoral chinois pour sécuriser leurs approvisionnements à Gwadar, Coco par exemple.
- L'Inde ébauche son ouverture maritime animée par la nécessité de contrer régionalement d'autres impérialismes mis en place dans l'océan Indien : le Gratchov racheté aux Russes donne une capacité de projection nouvelle.

- Le Brésil constitue une puissance navale pour étayer une puissance régionale émergente. Le plan Amazone Bleue de présence dans l'atlantique, l'achat du porte avions Foch et de sous-marins français y contribuent.
- La France veut une fois de plus retrouver la mer : le Charles de Gaulle est impliqué dans la lutte contre Daesh. Avec moins de 1 % de la population mondiale, la France est l'un des 5 membres permanents du conseil de sécurité des Nations Unies : elle le doit largement à la mer, à sa ZEE (2<sup>e</sup> mondiale), à sa tradition maritime (SNLE, et arsenaux de Toulon et de Brest).
- Le Japon au-delà de sa force d'autodéfense essaie de se projeter dans l'espace maritime qui lui avait permis d'asseoir sa présence sur la façade pacifique et la mer de Chine est un bon test pour le retour d'un nationalisme porté par une puissance navale encore modeste.
- Les visées de la Russie sur la Crimée et les installations de Stavropol, l'achat de 2 Mistral (patiemment attendus malgré les sanctions jusqu'au remboursement par la France), le soutien à la Syrie en partie conditionné par la maîtrise de la base navale de Tartous montrent que l'accès aux mers chaudes fait toujours parti du registre de la puissance russe.
- Le Venezuela commence par acheter des sous-marins russes pour muscler ses diatribes contre les Etats-Unis... en tout état de cause la mer relaie la puissance.

**C/ Les zones de confrontation : peu de guerres des tensions accrues et une militarisation**

- Dans ce contexte on comprend que l'accès à la mer puisse être une priorité et déclencher des conflits.
- La Bolivie ne cesse de vouloir projeter sa flotte au-delà du lac Titicaca et envisage tous le champ des possibles (même un tunnel pour accéder au littoral péruvien !). Saddam Hussein n'a pas hésité après le statu quo avec l'Iran après une guerre meurtrière de 8 ans d'envahir le Koweït pour se donner un accès au golfe arabo persique (L'Irak avait entrepris de creuser un canal dans le Chatt al Bhrh ancien bras fluvial qui devait déboucher en mer au voisinage des îles de Warbah et Bubiyan... annexées au Koweït en 1914 !). La Corée du Nord ne laisse pas de répit aux Coréens du Sud dans ses réclamations de territoires maritimes. La Chine a désormais peu de retenue en mer de Chine avec des manœuvres d'intimidations (Natuna) de provocations (Senkaku nationalisées par les Japonais en 2012). Les enchaînements belliqueux sont nombreux : montée en puissance des marines veut dire aggravation des tensions : les Etats-Unis ne restent pas sans réponse en mer de Chine avec le navire de combat littoral catamaran à grande vitesse et des partenariats stratégiques avec les Philippines, Singapour, la Corée du Sud, l'Australie. Le détroit de Taïwan attend toujours el D Day chinois (en 2025 ?) et la Chine souhaite pouvoir conduire un blocus et contrôler la première chaîne d'îles (du Japon aux îles Ryukyu de Taïwan aux Philippines jusqu'à Bornéo) pour asseoir sa puissance régionale.
- Malacca, et le Déroit d'Ormuz donnent lieu à des face à face tendus et des tensions héritées de traîne de la guerre froide (Sakhaline, URSS Japon ou îles Senkaku, Daioyu Japon Chine) sont réactivées.
- La mer est désanctuarisée par le terrorisme : hier avec le Achille lauro (1985), avec Al Qaida et l'attaque du US cole (2000) ou d'un pétrolier français (2002). Des conflits terrestres se sont largement appuyés sur les espaces marins : Otan contre Belgrade par le relais de missiles Tomawak tirés par des sous-marins américains ou intervention en Libye grâce à l'appui de la V<sup>e</sup> flotte. Le débarquement à la Grenade permettait en 1983 au président Reagan de réaffirmer ses

intentions face à « l'empire du mal ». A partir de 2008 l'opération Atalante fixe l'unité des démocraties européennes (Eunavfor) face à la piraterie des côtes somaliennes.

- Mais l'enclavement terrestre n'est pas synonyme d'exclusion : des pays enclavés ont des réussites économiques (Suisse Autriche), des pays émergents comme des PECO sans accès à la mer (Hongrie). Des espaces continentaux peuvent créer des ponts terrestres pour se développer (Russie). Oléoducs et gazoducs peuvent arrimer les économies d'Asie centrale comme la nouvelle route de la soie et la mer peut être sous valorisée : Afrique de l'Ouest où les ports doivent être modernisés par le Nepad, et pendant le dernier demi siècle la France dont la somme des trafics des ports était inférieure au trafic de Rotterdam ! ; Les infrastructures américaines sont également sans commune mesure avec la puissance de cette économie et son extraversion.

### III. La mer : un défaut de régulation source de toutes les menaces : les déficits et défis de gouvernance de la mer et des espaces maritimes

#### A/ La lente élaboration d'un droit de la mer

- Cet ensemble couvrant 70 % de la surface du globe (eaux salées), est un bien commun de l'humanité et un domaine sur lequel l'humanité exerce un contrôle très limité... pour le meilleur et le pire. Les routes maritimes sont intercontinentales et en haute mer « *res nullius* » c'est-à-dire une escadre peut croiser à la limite des eaux territoriales d'une puissance adverse en guise d'avertissement sans que cette gesticulation en constitue un *casus belli* (« *le navire est le meilleur des ambassadeurs* » Cromwell).

- Avec Montego Bay (1982) qui pour Pierre Papon (le 6<sup>e</sup> continent) nationalise l'espace maritime (des ZEE à installer 200 milles des côtes 1 mille : 1 852 m) voire plus si plateau continental. Les ZEE couvrent un tiers des océans, et depuis des aires marines protégées contre les rejets (2,8 % de la surface des océans mais 20 % en 2020). Tous les pays n'ont pas donné suite à Montego Bay, d'où des conflits.

- De Frontex à Triton : un échec à la mesure du drame d'Avril 2015 : plus de 1 200 morts en 2 naufrages et un conflit programmé puisque l'Union européenne a décidé le 18 mai 2015 une opération militaire pour rendre impossible pour les organisations criminelles de réemployer les instruments qu'elles utilisent pour faire mourir des personnes en mer. Cette opération Eunavfor Med va déployer des bâtiments de guerre, des avions de surveillance, des armées européennes au large de la Libye devenue la plateforme du trafic le tout sous réserve d'un feu vert de l'ONU et du consentement des « autorités libyennes ». Le problème des réfugiés syriens, irakiens en septembre 2015 a fait quelque peu oublier l'opération...

- Le plan Polmar (1978 après la catastrophe de l'Amocco Cadiz) n'est qu'une timide amorce du règlement des indemnisations des catastrophes liées à des pollutions et ses moyens restent limités surtout face à des armateurs étrangers.

- Au-delà de la misère et de la corruption en Afrique ou du vide stratégique (Somalie) ou de la tentation créée par la mondialisation (Malacca), c'est la faiblesse du cadre juridique international qui ouvre une brèche à la piraterie. Eunavfor Atalante est un front commun difficile à coordonner pour sécuriser le golfe d'Aden, déjouer la piraterie et sécuriser les programmes alimentaires vers la Somalie même si la Chine se veut impliquée. Les résultats sont médiocres contrairement à Malacca qui est globalement sécurisé. Le relatif échec de la sécurisation des côtes somaliennes (une quarantaine de navires de combat dans le Nord Ouest de l'océan indien) peut

contaminer le canal du Mozambique (pétrole) sur fond de déliquescence de l'Etat Malgache. Les rives méditerranéennes de l'Afrique sont déstabilisées par l'onde de choc des printemps arabes et le trou noir créé en Libye par l'affrontement entre milices et la montée en puissance de suppôts du Califat.

- Le réchauffement climatique exige *a minima* un statut de réfugiés avec des menaces qui pèsent sur les Maldives, Kiribati et Tuvalu. Les refus australiens d'accueillir ces populations et les attermolements du Rio + 20 (20 ans après le sommet de la terre de Rio adoptant des mesures de sauvegarde concernant les mers) n'inclinent pas à l'espoir.

## B/ Des accords fragiles terreux des conflits de demain

- L'Arctique redistribue les cartes d'une nouvelle guerre froide où les grandes puissances avancent leurs pions, dépose d'un drapeau russe en 2007 sur le fond marin au prétexte que la dorsale de Lomonossov passe sous le pôle Nord. Le réchauffement climatique peut donner au Canada et à la Russie de nouveaux atouts avec l'ouverture de nouvelles routes maritimes qu'ils contrôleraient. La Russie prend ses marques avec le dépôt d'une demande de 1,2 million de km<sup>2</sup>... Le Flanc méridional méditerranéen est partiellement intégré à la communauté européenne en 1986, puis par le partenariat Euromed en 1995 et UPM (Union pour la méditerranée) en 2008 à Barcelone : l'impasse sur les flux démographiques rend assez caducs ces accords et l'ampleur des migrations incontrôlées montre où sont les priorités ignorées.

- L'Intégration économique peut être conçue comme un facteur de pacification en Méditerranée asiatique ; Asean 1967 avec des aires de coopération Chine du Sud et région du grand Mékong, les zones de libre échange fonctionnent aussi comme réductrices de conflits Libre échange Etats-Unis et caraïbes 1983 Caribbean Basin initiative et cafta en 2004 auquel est associé la république dominicaine.

- Il reste difficile de garantir la libre circulation maritime tout en protégeant ses intérêts : c'est ce qu'essaient de faire les Etats-Unis en surveillant l'accès à leur territoire de conteneurs par le relais de 58 ports étrangers homologués.

- Les zones sous tension sont l'objet de concertations comme le détroit d'Ormuz où la V<sup>e</sup> flotte basée à Bahreïn fait office de gardienne du verrou stratégique pétrolier.

- Une coopération internationale essaie aussi d'intercepter les trafics de drogue par mer (navires de plaisance ou conteneurs) mais les interceptions dans tous les cas sont difficiles car arraisonner un bateau suspect battant drapeau étranger c'est remettre en cause les principes du droit du pavillon de la libre circulation sur les mers ou de la souveraineté territoriale.

- La promotion d'une approche écosystémique des pêches progresse laborieusement depuis un code de bonne conduite (1995) et l'agenda fixé à Johannesburg en 2002 pour atteindre les objectifs fixés, et la nouvelle légitimité conférée par le Plan stratégique pour la biodiversité adopté sous l'égide de l'ONU pour la période 2011-2020 cadre les organisations régionales de gestion de la pêche et les conventions régionales pour la protection de la mer et augurent une préservation des lieux marins... mais la gestion est fragmentée, les instances bureaucratiques se sédimentent, les compétences s'autolimitent (ex. : la pêche au thon rouge en Méditerranée) les mentalités évoluent peu et la pêche illégale demeure un fléau (20 MT par an selon la FAO) pour des prises totales de 80 MT en mer en régression (déclin de stocks de hareng et morue de l'Atlantique de l'anchois du Pérou de la sardine de Californie) ; Il paraît donc difficile d'évacuer égoïsmes et tensions dans le domaine maritime.

### C/ La mer un enjeu de pouvoir... un des champs de bataille majeurs contemporains

- Certes la mer n'est pas le seul champ de batailles, et de régulation timorée, le cyberspace et la bataille de l'information font rage : le big data (les données et leur contrôle) est un enjeu primordial, les nouvelles formes de la guerre économique (intelligence économique) restent des zones de confrontation majeures. Les nouveaux arsenaux militaires (drones satellites d'observation) donnent à penser que les conflits dans ces sphères ne font que commencer.

- La mer n'est pas nécessairement une zone de confrontation : n'est-il pas significatif que les conflits armés maritimes soient peu nombreux (au-delà des Malouines) et que les tensions dégèrent peu ? N'oublions pas le « doux commerce » par mer, « son rôle de médiateur du rapprochement et des échanges des hommes » (Pierre Papon) avec les canaux transocéaniques qui sont d'ailleurs revus à la hausse (Panama pour des plus de 20 000 EVP et Suez). Paradoxalement au même titre que le cyberspace, nouvelle frontière du monde, la mer devient un enjeu géopolitique majeur, l'ouverture de nouvelles routes (Nord Est et Nord Ouest au nord de la Russie et du Canada). Trafic assuré par 50 000 navires citernes ou pétroliers (30 %) minéraliers (20 %) et porte conteneurs (10 %) « *La mer loin d'être réduite à un vaste champ de bataille entre impérialismes est avant tout considérée comme un formidable foyer d'opportunités économiques et commerciales* » ; « *La puissance militaire chargée de protéger le commerce et les populations qu'il agglomère ne vient donc qu'en second : le gold power prend le pas sur le hard power* », Florian Louis.

- Mais les tensions maritimes décrites au cours de notre analyse confirment que la mer est un réel champ d'affrontements hier comme demain. C'est triplement inquiétant :

- D'abord parce que les océans, patrimoine commun de l'humanité sont au cœur des enjeux climatiques. Le relèvement du niveau eustatique des mers fait partie désormais du quotidien de certains Etats, un conseil des ministres tenu sous l'eau aux Maldives a montré l'imminence de la menace et les eurosceptiques ne sont plus au balcon de la réduction de la banquise qui s'accélère et du niveau des mers ; 3,3 mm par an ce qui dans les scénarios les plus pessimistes autoriserait la hausse de 1 m d'ici 2100 pour la GIEC.

- Ensuite parce que nourrir 7 milliards d'hommes et plus de 12 milliards au siècle prochain nécessite de penser aux ressources halieutiques : le krill n'est-il pas une des bases des approvisionnements en protéines pour demain ?

- Enfin parce que la pollution des mers prend un tour cataclysmique quand on fait référence au continent de plastique qui progresse inexorablement et impacte la faune marine. Soit pour les exploiter soit pour les préserver les espaces marins seront donc l'objet de conflits. Nœuds géopolitiques les 3 méditerranées sont déjà des lieux de confrontation les 3 Méditerranées (au milieu des terres) fabrique de civilisations (Braudel) sont des nœuds géopolitiques, la mer éponyme puis celle des Antilles et la mer de Chine méridionale. Difficile de nier que l'avenir est aux conflits. Ils pèsent par leurs positions sur les grands axes Suez Gibraltar Panama, Malacca ou Singapour ; Grèce, Turquie, Israël, Liban. Les conflits en mer de Chine sur les ZEE et la pression sur les 750 îles coralliennes de Spratleys revendiquées quand elles ont été abandonnées par les Japonais avec après la décolonisation prétentions vietnamiennes malaises taïwanaises, Philippines Brunei sont très médiatisés. Dans les Caraïbes des prétentions de Cuba refont jour.

- L'Arctique peut être une zone de coopération mais surtout de confrontation : pétrole 10 % des réserves prouvées mondiales auxquelles il faut rajouter en réserves estimées 90 milliards de barils de pétrole 47 000 milliards de m<sup>3</sup> de gaz et 44 milliards de barils de gaz naturel à l'état liquide.

- L'océan indien (3<sup>e</sup> du globe) longtemps océan négligé bordé d'Etats du tiers-monde devient une aire géopolitique de première importance avec le changement de statut de pays comme la Chine, l'Inde ou l'Australie ; et avec son rôle dans les échanges (40 % des importations mondiales de pétrole provenant du Moyen Orient et 80 % du commerce maritime du pétrole transitant par Bab El Mandeb, Ormuz et Malacca). La présence américaine gage de stabilité s'effrite, l'océan indien est comme l'écrit R. Kaplan le lieu où la rivalité entre les EU et la Chine dans le Pacifique s'emboîte avec la rivalité régionale entre la Chine et l'Inde ainsi qu'avec la lutte des EU contre le terrorisme islamique au Moyen orient. L'océan indien, lieu de rencontres entre civilisation islamique, occidentale, bouddhiste, confucéenne, rassemblant des régimes allant des Etats faillis – Somalie – déchirés – Yémen – autoritaires – Pakistan – dictatoriaux – Chine – démocratiques – Afrique du Sud ou Inde –... cet océan est à la recherche d'une architecture de sécurité.

Quant au Pacifique il ne suffit pas de passer de l'aire pacifique à l'ère du Pacifique pour que les résultats économiques balayent les tensions intestines.

### Conclusion

On aurait donc tort d'oublier que les espaces maritimes sont des lieux de partage, d'échanges autant que de fractures, des berceaux civilisationnels autant que des zones de conflictualité. Réinscrire les espaces maritimes dans les défis vitaux de demain (marinisation accélérée des économies, réchauffement climatique) est un moyen certainement de leur donner la place qu'ils méritent et de mettre la pression pour faire émerger une gouvernance mondiale capable d'assurer leur avenir.

# HISTOIRE, GÉOGRAPHIE ET GÉOPOLITIQUE DU MONDE CONTEMPORAIN

**DURÉE : 4 HEURES.**

*Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document en dehors de ceux fournis au verso ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.*

## SUJET

### **NOURRIR LA PLANÈTE : EXIGENCES PARADOXALES ET NOUVELLE « GÉOPOLITIQUE DE LA FAIM » (DE LA CHUTE DU MUR DE BERLIN À NOS JOURS).**

## DOCUMENTS

### DOCUMENT 1

#### Quelques repères chronologiques

- 1951 : Josué Castro publie « Géopolitique de la faim » : les famines dans le monde, au-delà des causes naturelles, ont des origines économiques, sociales et politiques
- 1990 : début d'une famille meurtrière en Corée du Nord ; le pic de mortalité semble atteint en 1997
- 1994 : l'UE interdit l'utilisation des « farines animales » pour la nourriture du bétail. La crise « de la vache folle » devient cruciale en 1996-1997
- 1996 : le sommet mondial de l'alimentation, organisé par la FAO à Rome affirme la nécessité d'une « nouvelle révolution verte dans le cadre d'un développement durable »
- 2000 : l'ONU adopte les « Objectifs du millénaire pour le développement »
- 2007-2011 : multiplication des émeutes de la faim dans le monde
- 2010 : le *Programme alimentaire mondial* de l'ONU livre près de 4 millions de tonnes d'aide d'urgence, surtout au Soudan, en Ethiopie, en Somalie, au Kenya, au Tchad, au Pakistan et en Afghanistan. Principal contributeur, les Etats-Unis (pour plus de 40 %)
- 2013 : loi sur la sécurité alimentaire et nouveau programme d'aide alimentaire en Inde
- 2014 : la FAO communique que la production mondiale de céréales devrait atteindre un niveau record de 2,5 milliards de tonnes. Baisse tendancielle des prix.
- En France, les « Restaurants du cœur » lancent leur 30<sup>e</sup> campagne hivernale – Seconde conférence internationale sur la nutrition à Rome (FAO et OMS)

## DOCUMENT 2

**Excès de viandes et poissons à table. La planète ne tiendra pas le rythme.**

« Nourrir l'humanité – 9 milliards d'individus à l'horizon en 2050 selon les prévisions de l'ONU – nécessitera d'adapter nos comportements, surtout chez les plus riches, et d'aider massivement les pays en développement. (...) Un Chinois qui consommait 13,7 kg de viande en 1980 en mange en moyenne 59,5 kg aujourd'hui. Dans les pays développés, on mange plus de 80 kg/personne/an (...) Aujourd'hui, l'agriculture produit 4 600 kilocalories/jour/habitant – largement de quoi nourrir 6 milliards d'individus. Mais sur ce total, 800 sont perdues au champ (maladies, insectes, stockage...), 1 500 sont dédiées à l'alimentation des animaux – qui n'en restituent en moyenne que 500 dans l'assiette – et 800 sont encore perdues en gaspillage dans les pays développés. En outre, l'élevage coûte cher à l'environnement : 8 % de la consommation mondiale d'eau, 18 % des émissions de gaz à effet de serre (davantage que les transports) et 37 % de méthane (21 fois plus réchauffant que le CO<sub>2</sub>) émis par les activités humaines. (...) Freinons sur la viande, quid du poisson ? Les océans ne peuvent plus être pris pour des garde-manger inépuisables. (...)

Source : Anne CHAON, *les Echos*, 24/02/2010.

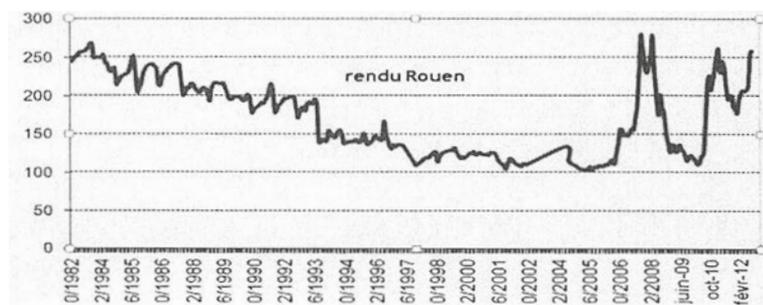
## DOCUMENT 3

**« Agroc carburant ou nourriture, il faut choisir. »**

« Désormais, 40 % de la production de maïs des Etats-Unis sont transformés en éthanol et incorporé à l'essence qui remplit le réservoir d'un véhicule de monsieur-tout-le-monde. (...) Les rendements affichent une volatilité croissante, les surfaces cultivées plafonnent et il devient impossible de satisfaire simultanément la croissance des besoins alimentaires, humains et animaux, et énergétiques sur les marchés domestiques et à l'exportation... »

Source : Olivier RECH, *les Echos*, 30/08/2012.

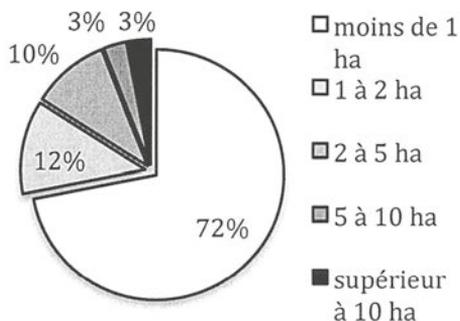
## DOCUMENT 4

**Cours du blé sur le moyen terme**

Source : France, FNSEA.

**DOCUMENT 5**

Répartition mondiale des exploitations agricoles selon leur taille  
(en % du total des exploitations)



Source : FAO, rapport mondial 2014.

**DOCUMENT 6**

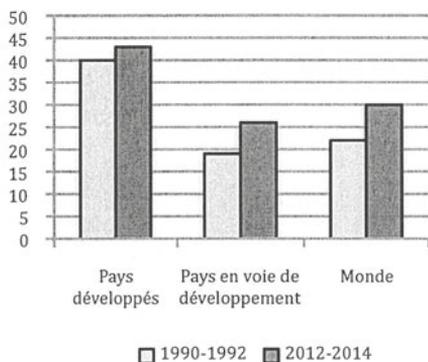
Les principaux producteurs de blé dans le monde  
(millions de tonnes, 2012)

1	Chine	120,58
2	Inde	94,88
3	Etats-Unis	61,75
4	France	40,30
5	Russie	37,7
6	Australie	29,9
7	Canada	27,01
8	Pakistan	23,47
9	Allemagne	22,43
10	Turquie	20,10
11	Ukraine	15,76
12	Iran	13,8

Source : FAO.

**DOCUMENT 7**

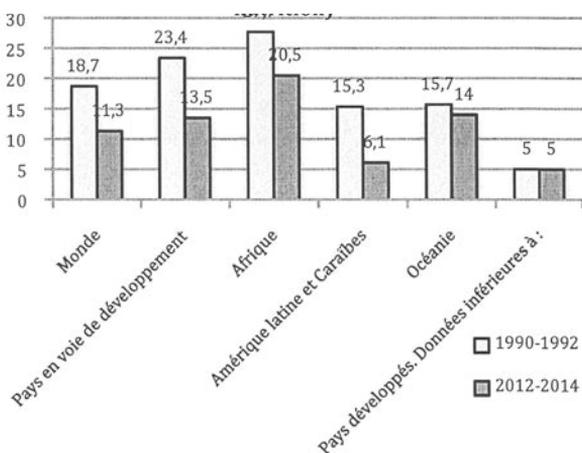
**L'épidémie d'obésité dans le monde  
(% de la population totale en état de surpoids)**



Source : FAO, rapport mondial 2014.

**DOCUMENT 8**

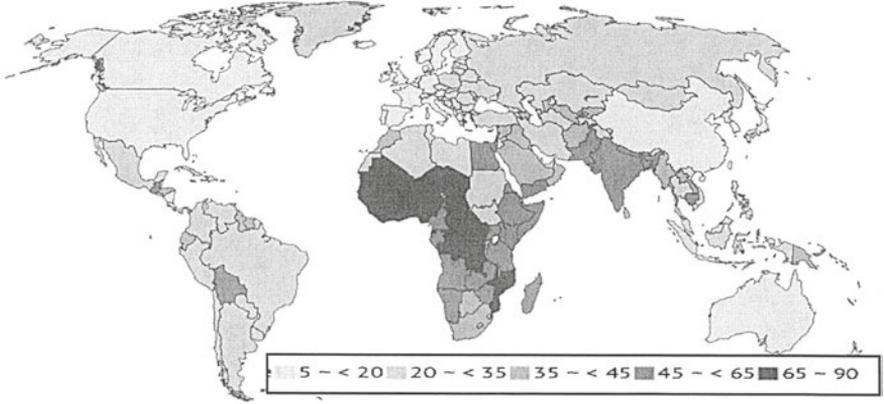
**Le recul de la sous-alimentation dans le monde  
(% de la population totale en situation de sous-nutrition)**



Source : FAO, rapport mondial 2014.

**DOCUMENT 9**

**L'anémie chez les enfants**  
(en % du nombre total d'enfants de moins de 5 ans)



Source : FAO, rapport mondial 2014.

## CORRIGÉ

Par Alain Nonjon, professeur au lycée Michelet à Vanves.

*Sujet bienvenu car l'agriculture est un secteur quelque peu délaissé des politiques publiques... et des concours !*

*Sujet qui va au-delà des mutations du secteur agricole, du passage de la ferme à la firme mais qui couvre les rapports de force mondiaux dans un contexte où la malnutrition se rigidifie et où l'agriculture redevient un facteur de puissance (Brésil, Inde).*

*Sujet dont la formulation complexe et surprenante (depuis le mur de Berlin ?) ne devait pas faire oublier que la question nourrir 7 milliards d'hommes a été (cf. Ecricome 2008) et est un des enjeux cruciaux du développement, des échanges et des risques de la planète.*

« On a trouvé en bonne politique le secret de faire mourir de faim ceux qui en cultivant la terre font vivre les autres » Voltaire (1664-1778)

### Problématique

Parmi les objectifs du millénaire (2000), l'objectif sinon d'éradication de la faim du moins de diminution de moitié du nombre de malnutris d'ici à 2015 paraissait gérable... jusqu'à la crise alimentaire de 2008 et ses répliques depuis. Si le risque systémique agricole n'a pas fondamentalement évolué, les enjeux du défi alimentaire se complexifient dans les contrastes de situation, dans l'instrumentalisation des pénuries, dans la portée environnementale et économique de certains choix culturels, dans les rapports de force qui s'installent entre producteurs et importateurs. La géopolitique de la faim n'est-elle pas le miroir des évolutions du XXI<sup>e</sup> siècle ?

### I. Le défi alimentaire mondial actuel sédimente de nombreux paradoxes

#### A/ Intensification et progrès continus... mais pénuries et malnutrition non contenues

La mécanisation, la motorisation, sont parties à la conquête du monde et si certaines agricultures vivent encore à l'heure de la houe et du sarcloir, beaucoup assouvissent leurs techno fantasmes, tracteurs très puissants (machines combinant techniques d'aspersion et d'irrigation en vitrine au salon de l'agriculture). L'industrialisation de l'agriculture est continue : les PGM (plantes génétiquement modifiées) ne sont qu'un des aspects des avancées des biotechnologies aptes à fournir de nouvelles espèces hybrides conditionnées pour résister à des parasitoses à certaines conditions climatiques. Ainsi le maïs génétiquement modifié est cultivé sur 25 000 ha en 2014 (plus de 5 fois la production de 2013 !) et ils résistent au stress hydrique. L'irrigation enregistre des progrès rapides (multiplier par 5,5 depuis 1950) et les 275 millions d'ha irrigués dans le monde concourent à plus du tiers de l'agriculture mondiale. Des terres de plus en plus décalées par rapport aux optima climatiques des plantes sont conquises face à la désertification ou aux froids extrêmes. Même confidentielles, les semences paysannes déjà montrent la voie d'une agriculture économe en eau. L'agriculture hors sol n'est plus une innovation, une curiosité, c'est un type de culture. De fait l'offre alimentaire paraît suffisante. La

production alimentaire progresse à un rythme moyen supérieur à celui de la croissance démographique (+1,5 % contre 1 % par an), ceci du plus à l'accroissement des rendements par ha qu'à l'augmentation des superficies cultivées. Aujourd'hui chaque habitant dispose théoriquement de 2 800 kilocalories / jour contre 2 300 en 1960 alors qu'une ration de 2 500 kilocalories est jugée suffisante. De plus les échanges alimentaires permettent de compenser éventuellement des déficits locaux. Des calculs du PNUE concluent même que la production agricole mondiale actuelle pourrait fournir 4 600 kcal par personne par jour. Mais sur ces 4 600 kcal, 1 400 kcal sont perdus ou gaspillés et 1 200 kcal sont perdus dans le processus peu efficace qui consiste à nourrir les animaux avec des récoltes qui pourraient nourrir les hommes. Seulement 30 % des calories ingérées par l'animal sont restituées sous forme de viande et de produits laitiers destinés à la consommation humaine, bref de quoi différer les grandes peurs nées de l'insécurité alimentaire. Mais malgré ces progrès la sous alimentation frappe 805 millions de personnes en 2014 (contre 1014 millions en 1992, moins de 19 % de la population mondiale à 11 %). Elle sévit sur le continent africain et la barre du milliard a failli être de nouveau dépassée en rupture avec les objectifs du millénaire. En 2000 réduction de moitié d'ici à 2015 le nombre de personnes souffrant de la faim et cet échec conditionne aussi l'échec des objectifs sanitaires éducatifs, sociaux (inégalités filles-garçons), la malnutrition est telle qu'un quart des enfants de moins de 5 ans ont des retards de croissance. 2 Mds d'individus souffrent de carences en micronutriments. De même malgré les logiques d'intensification, les exploitations familiales sont de très loin majoritaires : elles réalisent 60 à 70 % de la production mondiale agricole et mobilisent 90 % du travail agricole et plus de 90 % des exploitations agricoles de la planète couvrent moins de 5 ha et 70 % moins de 1 ha (Cirad AFD 2013). Force est de remarquer cependant que l'exploitation familiale n'est pas imperméable aux innovations, aux biotechnologies de pointe. Sur les 16,5 M d'agriculteurs dans le monde cultivant des OGM en 2013 90 % étaient des agriculteurs chinois ou burkinabé en disposant que d'exploitations limitées en superficie.

## **B/ Des famines en réel recul, des déséquilibres tenaces très instrumentalisés**

Les famines sont régionales, associées à des disettes de soudure, instrumentalisées dans des conflits (Kurdes sous Saddam Hussein ou karens au Myanmar) et la faim la plus aiguë, la famine implique moins des pays traditionnellement démunis au niveau alimentaire (Sahel, Nordeste brésilien pays andins Asie du Sud) mais des pays qui apparemment n'étaient pas prédisposés à connaître la faim (Congo, Zimbabwe, Corée du Nord, Soudan) mais où la malnutrition résulte de troubles politiques et de guerres. S. Brunel analyse ainsi les famines comme un outil de contrôle ou d'élimination de populations indésirables. Les famines naturelles sont quasi disparues (sécheresse, inondations, insectes ravageurs) car des mécanismes de rééquilibrages sont mis en place et elles sont relayées par des famines orchestrées : nomades recevant une faible partie de l'aide alimentaire car peuples guerriers esclavagistes rebelles à la sédentarisation délaissés par le pouvoir dans le Sahel ou en Sierra Leone. Elimination de populations gênantes comme au Cambodge de 1976 à 1979 (génocides des khmers rouges et faim organisée au service de la terreur idéologique avec 2 millions de morts) ou au Darfour où les milices de Khartoum des janjawid en interdisant les aides des ONG en coupant les routes d'approvisionnement ont acculé 1,3 million de déplacés à la famine. Les famines exposées deviennent même des moyens de drainage de l'aide, un moyen compassionnel de manipuler l'opinion internationale (Ethiopie, Corée du Nord qui pratique avec régularité cette « diplomatie d'extorsion »).

Mais pour autant 3 excès demeurent :

- Les pénuries caloriques mais aussi le manque de diversification de l'alimentation (carences en protéines, en sels minéraux) et à l'inverse, des excès caloriques et l'obésité qui progresse (en 2013 on compte 2,1 milliards d'humains en surpoids dont 670 millions d'obèses) et l'obésité est d'ailleurs considérée en Chine comme un marqueur de mondialisation. Les marchés qui ne représentent que 15 % de la production alimentaire mondiale pèsent de façon excessive sur le bien être de 2 mds d'êtres humains mal nourris (moins de 2 \$ par jour et moins de 2 700 calories quotidiennes).

- De fait on peut se demander si la priorité donnée à la lutte contre le terrorisme et le développement durable ne marginalise pas les objectifs de lutte contre la faim et alors que la terre aurait les moyens de nourrir ses habitants. Sylvie Brunel de façon un peu provocatrice n'hésite pas à parler de courants malthusiens qui se comportent sur la terre comme s'il y avait des « peuples en trop » des « peuples proliférants » face auxquels certains régulateurs tels la famine, le sida et la guerre seraient des régulateurs incontournables voire nécessaires ! (Monsieur Ebola n'a-t-il pas été convoqué pour régler le problème des migrations !)

### **C/ Une pression accrue des besoins alimentaires mais des stratégies plus industrielles qu'agricoles affichées**

Malgré les besoins, de moins en moins de terres sont disponibles avec l'érosion, la salinisation des sols qui font perdre 10 millions ha par an cultivables et l'étalement urbain 3 millions d'ha quand les défrichements ne font gagner que 12 millions ha. Les terres agricoles couvrent désormais plus de 4 900 millions d'ha et leur progression est des plus faibles.

Le gaspillage alimentaire sévit, 1,3 milliard de tonnes jetées ou perdues par an dans le monde et 260 kg en France par personne et par an ! Au-delà de ces comportements la seule pression démographique crée des besoins : la terre dépassera 10 milliards d'hommes en 2050. La croissance urbaine confortera les besoins (2 citadins sur 3 habitants en 2050) et l'accès aux classes moyennes de plus en plus rapide et dans le même temps paradoxalement l'extension des villes et des réseaux fait perdre 13 millions d'ha de terres cultivables par an dans le monde.

Ne parle-t-on pas de NPI et peu de NPA (nouveau pays agricole ?). Ne vante-t-on pas le Brésil acteur global plus par ses industries extractives (Vale), son BTP (Oderbrecht) ; que par son rôle de ferme du monde (1<sup>er</sup> rang mondial dès 2020) ? La Chine puissance émergente est plus valorisée pour ses exportations industrielles – biens de consommation – que ses performances agricoles au cœur de la bataille des 4 modernisations et ses conquêtes dans l'agrobusiness mondial (Tomates). Elle a pourtant réalisé l'improbable à la fin du xx<sup>e</sup> : nourrir sa population dans un pays où les superficies en cultures sont limitées et non extensibles et où le problème de l'eau est latent ; il est loin le temps où la rencontre paysans pauvres et ouvriers avait bâti la Chine communiste. Paradoxalement plus un pays compte d'agriculteurs plus il souffre de la faim ! Car les pays pauvres ruraux investissent... peu dans leur agriculture et pourtant c'est là qu'existent des réserves de production : les rendements dans les pays pauvres sont inférieurs à 2T de céréales par ha contre plus du triple dans les pays riches.

On peut ici aussi évoquer la pression paradoxale de l'écologie sur l'agriculture mondiale et la sécurité alimentaire. La création d'aires protégées (17 % des terres émergées en 2020 contre 12,7 % en 2010) décidée à la Conférence de Nagoya, les mécanismes de lutte contre la déforestation et le changement d'affectation des sols sont autant de buttoirs pour accroître les aires cultivées. Est-il encore temps

de rappeler avec Sylvie Brunel, que un hectare de maïs certes est gourmand en eau mais capte deux fois plus de CO<sub>2</sub> qu'une forêt mature et débouchent sur une biomasse de 10 tonnes réutilisables dans la chimie vertes (les sacs biodégradables...). Mais l'ensemble du secteur de l'agriculture, de la forêt et de l'utilisation des terres représente 24 % des émissions anthropiques mondiales : dioxyde de carbone pendant les labours, émissions de méthane provoquées par la digestion animale (le gaz à effet de serre possède un pouvoir de réchauffement 25 fois plus élevé que celui du dioxyde de carbone) le 3-nitrooxypropanol (3-NOP), qui inhibe cette synthèse de méthane en agissant sur les bactéries de la panse, n'est pas encore la panacée, les épandages d'engrais d'origine organique ou industrielle...

## II. L'insécurité alimentaire mondiale naît de plusieurs facteurs paradoxaux

### A/ L'émergence : une dynamique contradictoire dans ses effets

Cette dynamique est certes facteur de progrès de moyennisation de la société, de bond en avant du PIB/ha, de hausse du niveau de vie, de diversification des consommations alimentaires au-delà des hydrates de carbone de décloisonnement des espaces et de mobilité accrue.

Emergence signifie aussi pression sur l'offre agricole, de transition alimentaire : urbanisation (50 % d'urbains dans le monde en 2007, 65 % en 2050), moyennisation surtout en Asie (2020, 42 % de la population mondiale dont 53 % en Asie) qui implique plus de consommation de céréales indirectement (viande), diversification alimentaire (300 MacDo s'ouvrent chaque année en Chine !), et exode rural souvent (cf. paysans mingongs chinois au service des industries labor intensive côtières). Les classes aisées des villes consomment 3 repas par jour constitués d'aliments à haute valeur ajoutée et beaucoup de produits laitiers et de viandes accentuant la pression sur les céréales : pour al Fao en 2050 la production de céréales devrait s'établir à 3,4 milliards de tonnes pour satisfaire les besoins. Elle a gagné 1 milliard de tonnes que de 1960 à 2000 !

L'émergence accroît les externalités négatives pour l'agriculture : intrants chimiques polluant les nappes phréatiques, artificialisation de la nature vectrice de pandémies (EBS), uniformisation des goûts et paradoxalement ce sont ceux-là même qui créent cette pression négative sur l'agriculture qui sont les plus attentifs à en corriger les effets (écologisme un peu sectaire, boycott de produits).

Le paradoxe n'est-il pas aussi comme le souligne Sylvie Brunel (Enjeux alimentaires, *Le monde diplomatique*, mai 2015) que la croissance urbaine est le symptôme de l'échec du monde rural dans les pays pauvres, et émergents plus que la conséquence de la modernisation des campagnes comme on avait pu l'observer lors de la révolution agricole ? Un constat qui tend à segmenter le développement des pays émergents et à opposer villes-campagnes dans ce processus.

### B/ De nouvelles formes d'impérialismes agricoles malgré l'essoufflement du « food power »

Le « food power » a certes été remis en cause au nom du droit à la nourriture (art. 25 de la déclaration des droits de l'Homme à la conférence de Novi Sad (1980) sur la nouvelle génération des droits de l'Homme). On a mis en avant les difficultés pour les paysans des pays pratiquant l'embargo à ne pas subir l'effet boomerang – référence à la crise des belts céréaliers américains pendant l'embargo à l'encontre de l'ex URSS dès 1980 – certains se sont interrogés sur l'efficacité des embargos – contournement, diversification des fournisseurs comme pour l'ex URSS qui

trouve un appui en Argentine dans le contexte de la guerre des Malouines. L'opinion internationale s'est montrée très hostile envers ce droit de vie et de mort des démunis. Le soja plus puissant que la bombe atomique pour un secrétaire d'Etat à l'agriculture américain (Earl Butz) que représentent ces embargos alimentaires. La guerre en Irak et le programme nourriture contre pétrole n'a pas été pour rien dans ce réquisitoire contre l'arme de la faim.

Mais pour autant d'autres formes d'impérialismes sont apparus :

- Le *landgrabbing* qui est une agression contre la souveraineté alimentaire des Etats et qui est imposé à des paysans aux mépris de leurs droits (Chine, Corée du Sud et Emirats en Afrique). L'année 2014 a d'ailleurs été déclarée par l'ONU année de l'agriculture familiale pour faire face aux dynamiques d'accaparement de terres par des groupes géants ;
- L'*agrobusiness* triomphant comme au travers du coton BT de Monsanto au Burkina Faso avec des arguments manipulés sur leur prix, la régularité de leurs récoltes, leur faible exigence en engrais... Argenbio conseil argentin pour l'information et le développement des biotechs n'est pas avare de compliments sur la rentabilité des OGM dans ce pays 3<sup>e</sup> pour la superficie cultivée en OGM : de 1996 à 2011 ce sont quelques 65 milliards de \$ qui ont été gagnés pour le soja tolérant au glyphosate grâce à la diminution des herbicides des labours et l'extension des cultures dont 72 % sont allés aux fermiers, 21 % à l'Etat et 7 % aux fournisseurs. Ce sont 1,8 millions d'emplois qui seront créés en 15 ans par ces technologies... Il n'y a qu'à lire l'ONG *Grain* créée à Barcelone en 1990 pour déchanter et voir les effets négatifs de la monoculture intensive du soja (un ouvrier pour 500 ha) et l'impact négatif sur le grenier mondial argentin ;
- Les biocarburants imposant des reconversions discutables de l'utilisation des sols, des terres consacrées au blé ou à la production laitière sont désormais consacrées aux biodiesel (colza, maïs) conversion jugée « crime contre l'humanité » par Jean Ziegler le rapporteur des Nations Unies sur le droit à l'alimentation, en octobre 2007 ;
- Les OGM, peu de recherche pour des variétés adaptées aux pays tropicaux et des biotechnologies.

### **C/ La mise en place de mécanismes de stabilisation occultée par des dérives spéculatives comme en 2008 et 2010**

Certes des accords ont été conclus par produits dans le prolongement des accords de la Cnuced et des fonds de, stabilisation des matières premières, les marchés à terme (Chicago board of trade ou marchés de Sydney) ont été moralisés, des accords cadres ont été signés sur la réduction des subventions à l'exportation (grand thème de l'OMC au Doha round...), des systèmes d'alerte précoce anticipant les crises alimentaires existent.

Mais c'était sans compter la crise de 2008 qui a détourné les marchés financiers de la spéculation boursière classique et reportée sur les produits agricoles la recherche de profits. L'emballage des cours céréaliers, et la pénurie dans des pays prioritairement exportateurs ou traditionnellement déficitaires ont débouché sur des marches de la faim, et des révoltes des « ventres creux » dans 30 pays dont en Egypte à Haïti au Sénégal au Cameroun (40 morts en février 2008) ou en Tchétchénie surtout dans des pays pauvres où dans de nombreux pays pauvres près de la moitié des budgets sont consacrés à l'alimentation déjà. Les « cultures loteries » aux rendements irréguliers dans des zones non climatiques semi arides accentuent l'instabilité des marchés tendus après une raréfaction de l'offre : depuis une décennie les rendements par ha stagnent dans bien des cultures.

### III. Ainsi l'ordre alimentaire mondial programmé mais pas atteint fait naître des enjeux géopolitiques majeurs et parfois nouveaux

#### A/ La domination exclusive des grandes économies agricoles EU et UE remise en cause ?

Grâce à leurs FMN, leur protectionnisme ouvert ou caché (cf. J Y Carfantan pour l'UE première importatrice de produits agricoles des PED dans la mondialisation déloyale évoque un taux direct et indirect de protection du marché européen vis-à-vis des pays du Tiers monde de plus de 30 %) la mise en tutelle de la transformation des produits par l'agroalimentaire du Nord, les modes d'alimentation au cœur de la « world bouffe » le contrôle d'une biocratie, les pays du Nord conservent leur domination hégémonique : d'ailleurs EU siège de l'ONU) et UE (Rome siège de la FAO) sont les deux premiers exportateurs et importateurs agricoles mondiaux). En soi ce positionnement contraste avec les problématiques des champs du départ, de « désagriculturisation » de ces pays, de crise structurelle du secteur agricole encore pourtant très subventionné (du moins avant les révisions de choix pour la Pac de 2013).

De fait on a l'impression que les rapports de force installés au lendemain de la Seconde Guerre mondiale (PL480 en 1954 « food for peace » devenu « food for freedom » et dépassement en 1972 par l'UE de l'autosuffisance alimentaire) n'ont pas été fondamentalement changés. Les agricultures les plus performantes sont aussi les plus subventionnées comme celle des EU, soutien dans la loi cadre 2014-2018 de 95 mds de \$ par an (70 mds d'euros) et pour la séquence 2014-2020 quelques 60 mds d'euros annuels dans l'UE. Cela n'exclut pas une percée de *global players* du Sud dans le commerce agricole mondial comme dans le marché de la viande avec 3 pays du Sud sur les 5 premiers (groupe dominant brésilien JBS depuis le rachat de son concurrent brésilien Marfrig). De plus en plus les pays émergents (16 pays émergents représentent à eux seuls 53 % de la production agricole et 2/3 de la croissance mondiale du secteur de 1993 à 2013) peuvent bloquer des négociations internationales et contester la puissance établie des EU et de l'UE comme ils l'ont fait à Doha et dans leur pression depuis Cancun pour balayer les subventions aux agriculteurs européens et américains. Cela freine l'ordre vert imposé par les pays nantis, on a cru voir une nouvelle géopolitique de l'agriculture.

#### B/ La difficile quête de l'autosuffisance vivrière dans les PED, une utopie ou objectif ?

Certes, exceptionnellement, des pays parviennent à des résultats probants (Botswana, Malawi) mais ils restent marginaux surtout en Afrique subsaharienne terroir de la faim. Seuls 10 pays sur 54 tiennent les engagements de la conférence de Maputo en 2003 de consacrer 10 % de leur budget à l'agriculture !

Dans certains pays l'appropriation des terres se fait au détriment de minorités (Mapuches et autres Aymaras au Chili ou en Bolivie). L'aide alimentaire reste un moyen d'influencer ses pays pour les pays développés ; (aid for trade, aide mercantile philanthropique qui sert souvent à écouler des excédents créer artificiellement des habitudes alimentaires et installer des dépendances). La pression des agrocarburants contre l'agriculture (UE en Amérique Latine) est forte et ce indépendamment des besoins vivriers. Dans la compétition cultures vivrières / cultures spéculatives, il existe toujours une prime aux cultures de rente produits des cultures de plantation de la colonisation.

Finalement le principal paradoxe est de constater que l'Afrique renaissante du point de vue industriel reste encore le continent où la situation alimentaire est la plus critique, un habitant sur quatre ne mange pas à sa faim et où en 2014, 26 pays sur 33 dans le monde ont besoin d'aide alimentaire... Difficile dans ce cadre d'évoquer la « moyennisation » de l'Afrique comme symbole d'une Afrique bien partie ou répartie.

### C/ De nouveaux paramètres, sources de tensions

Le réchauffement climatique devient le quotidien des agriculteurs. Le Giec en 2014 dans son 5<sup>e</sup> rapport est explicite sur les problèmes induits par l'irrégularité, et la diminution des précipitations sur les populations agricoles les plus pauvres. Deux céréales sont exposées particulièrement à la sécheresse le blé et le maïs, de même le riz est très exigeant en eau. Le changement climatique pousse des agriculteurs de l'Afrique transsaharienne à « vouloir vivre à l'étranger plutôt que mourir chez eux » (comme les Soninké de la région de Kayes au Mali). Le réchauffement pèse aussi sur des zones humides et sur les complexes deltaïques comme au Bangladesh. Le Bangladesh (delta du Gange et du Brahmapoutre) où sur un territoire grand comme la moitié de la France, 150 millions d'habitants vivent à moins de 10 m au-dessous du niveau de la mer et au regard des évolutions actuelles pourrait perdre 17 % de son territoire. Les mangroves sont déjà menacées notamment celle des Sundarbans une des plus actives du monde. La transformation des rizières en fermes à crevettes n'est qu'une solution partielle car l'activité d'aquaculture mobilise 10 fois moins de main-d'œuvre condamnée à migrer vers... Dacca (21 millions d'habitants en 2015). Ces migrations incontrôlées peuvent déboucher sur des conflits avec l'Inde qui s'est déjà dotée d'un mur de protection ! Le réchauffement climatique ponctionne les réserves d'eau douce (lesquelles interviennent pour 70 % dans l'irrigation et sont vitales) il faut 1 000 fois plus désormais d'eau pour nourrir un homme que pour étancher sa soif. Les guerres de l'eau sont donc l'arrière plan de ces évolutions. Pour le psychosociologue Harald Welzer in *Guerres du climat* (Gallimard, 2009) le Darfour est une guerre climatique depuis 1960 la région connaît des sécheresses catastrophiques, une désertification accélérée, de là des déplacements de population, une compétition entre éleveurs nomades et paysans sédentaires qui appartiennent à des ethnies différentes. Dans un pays où 70 % de la population vit de la terre la disparition des pâturages peut devenir rapidement explosive. Difficile de se rassurer dans ce contexte avec la libération de terres gelées à l'aval de l'augmentation des températures : elles sont situées à des latitudes élevées. Elles sont déconnectés des foyers de consommation, des transports efficaces et d'autres menaces pèsent sur elles (rétrovirus).

Certains conflits déstructurent des agricultures. Au Zimbabwe, la radicalisation de Mugabe contre les fermiers blancs a été catastrophique et pèse sur l'équilibre régional (migrations vers l'Afrique du Sud en proie à des mouvements xénophobes). Au sud Soudan quelques 2 millions de déplacés en un an pour une guerre postérieure à la création de ce 54<sup>e</sup> Etat d'Afrique ont rompu les équilibres fragiles pastoraux comme hier au Darfour. En Afrique en 2013 un pays sur quatre continue à souffrir des effets induits par des conflits armés pénalisant le développement agricole. Des choix ont été plaqués (Nigeria, hier grande puissance agricole a succombé à la rente pétrolière et à la revalorisation du naira). Une piraterie maritime qui dissuade les aides internationales comme au large de la Somalie.

La fuite en avant dans des revenus de cultures illicites du khat malgache au pavot sanctionne des échecs et est instrumentalisé par des guérillas (Colombie).

Ainsi la gouvernance mondiale agricole piétine dans tous ces registres et on est loin du cri d'alarme de Nerhu « *Tout peut attendre excepté l'agriculture* », 1948. Nourrir 7 mds d'hommes c'est-à-dire fournir une alimentation suffisante en quantité et qualité au-delà des 2 700 calories par jour et par habitant reste donc un défi. Certes les visions les plus pessimistes malthusiennes ont été balayées ou du moins différées mais la terre reste un objet de conflits (réformes agraires toujours retardées – Afrique du Sud où 10 % des terres seulement sont redistribuées – ou inopérantes) et l'ouvrage « paysans affamés terres massacrées » de René Dumont (1978) a encore une certaine actualité... preuve s'il en fallait d'un certain statu quo assez paradoxal de la géopolitique de la faim.

# MATHÉMATIQUES

**DURÉE : 4 HEURES.**

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

*Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

*Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.*

## S U J E T

### PROBLÈME 1

Dans tout le problème, on confond polynôme et application polynomiale de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

On note, pour tout  $k$  de  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{R}_k[X]$  le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}[X]$  formé des polynômes de degré inférieur ou égal à  $k$ .

On définit l'ensemble  $E = \{P \in \mathbb{R}_4[X]; P(0) = P(4) = 0\}$  et le polynôme  $W = X(X - 4)$ .

#### Partie I : Étude d'endomorphismes

1. Montrer que  $E$  est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel  $\mathbb{R}_4[X]$ .

Pour tout polynôme  $Q$  de  $\mathbb{R}_2[X]$ , on note  $\phi(Q) = WQ$ .

2. Montrer que l'application  $\phi : Q \mapsto WQ$  est un isomorphisme de  $\mathbb{R}_2[X]$  sur  $E$ .

3. En déduire une base de  $E$  et la dimension de  $E$ .

Pour tout polynôme  $Q$  de  $\mathbb{R}_2[X]$ , on considère le polynôme  $\Delta(Q)$  défini par :

$$\Delta(Q) = Q(X + 1) - Q(X).$$

Ainsi, par exemple, si  $Q = X^2 - 3X + 5$ , alors

$$\Delta(Q) = ((X + 1)^2 - 3(X + 1) + 5) - (X^2 - 3X + 5) = 2X - 2.$$

4. a. Montrer que l'application  $\Delta$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_2[X]$ .
- b. Déterminer, pour tout polynôme  $Q$  de  $\mathbb{R}_2[X]$ , le degré de  $\Delta(Q)$  en fonction du degré de  $Q$ .
- c. Déterminer le noyau et l'image de  $\Delta$ .
- d. Établir :  $\Delta \circ \Delta \circ \Delta = 0$ .

On définit l'endomorphisme  $f$  de  $E$  suivant :  $f = \phi \circ \Delta \circ \phi^{-1}$ , où  $\phi^{-1}$  désigne l'application réciproque de l'application  $\phi$ .

5. a. Montrer :  $f \circ f \circ f = 0$ .
- b. Déterminer une base du noyau de  $f$  et une base de l'image de  $f$ .
- c. Démontrer que  $f$  admet une valeur propre et une seule et déterminer celle-ci. Donner une base et la dimension du sous-espace propre pour  $f$  associé à cette valeur propre.
- d. Est-ce que  $f$  est diagonalisable ?

**PARTIE II : Étude d'un produit scalaire**

On considère l'application  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  de  $\mathbb{R}_4[X] \times \mathbb{R}_4[X]$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$\forall (P_1, P_2) \in \mathbb{R}_4[X] \times \mathbb{R}_4[X], \quad \langle P_1, P_2 \rangle = \sum_{k=0}^4 P_1(k)P_2(k).$$

6. Montrer que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire sur  $\mathbb{R}_4[X]$ .

On munit dorénavant  $\mathbb{R}_4[X]$  de ce produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et de la norme associée  $\|\cdot\|$ .

On considère les trois polynômes suivants :

$$L_1 = (X - 2)(X - 3), \quad L_2 = (X - 1)(X - 3), \quad L_3 = (X - 1)(X - 2).$$

7. Montrer que la famille  $(L_1, L_2, L_3)$  est une base de  $\mathbb{R}_2[X]$ .
8. a. Exprimer, pour tout polynôme  $P$  de  $\mathbb{R}_2[X]$ , les coordonnées de  $P$  dans la base  $(L_1, L_2, L_3)$  en fonction de  $P(1), P(2), P(3)$ .
- b. Exprimer  $\Delta(L_1), \Delta(L_2), \Delta(L_3)$  sur la base  $(L_1, L_2, L_3)$  de  $\mathbb{R}_2[X]$  et en déduire que la matrice de l'endomorphisme  $\Delta$  dans la base  $(L_1, L_2, L_3)$  de  $\mathbb{R}_2[X]$  est  $\begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 3/2 & 2 \end{pmatrix}$ .

On note, pour tout  $i$  de  $\{1, 2, 3\}$ ,  $M_i = WL_i$ .

9. a. Montrer que, pour tout  $i$  de  $\{1, 2, 3\}$ ,  $M_i(i)$  est non nul.

On note alors, pour tout  $i$  de  $\{1, 2, 3\}$ ,  $N_i = \frac{1}{M_i(i)} M_i$ .

- b. Montrer que  $(N_1, N_2, N_3)$  est une base orthonormée du sous-espace vectoriel  $E$  de  $\mathbb{R}_4[X]$ .
10. Déterminer la matrice de l'application linéaire  $\phi$  dans les bases  $(L_1, L_2, L_3)$  de  $\mathbb{R}_2[X]$  et  $(N_1, N_2, N_3)$  de  $E$ .
11. Déterminer la matrice de l'endomorphisme  $f$  dans la base  $(N_1, N_2, N_3)$  de  $E$ .
12. On note, pour tout polynôme  $P$  de  $\mathbb{R}_4[X]$  :  $u(P) = \sum_{i=1}^3 P(i) N_i$ .
  - a. Montrer que  $u$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_4[X]$ .
  - b. Montrer :  $\forall P \in \mathbb{R}_4[X], \forall j \in \{1, 2, 3\}, \langle P - u(P), N_j \rangle = 0$ .
  - c. En déduire que  $u$  est la projection orthogonale sur  $E$ .
  - d. Déterminer le projeté orthogonal de  $Q = X^2(X - 2)(X - 3)$  sur  $E$ .

## PROBLÈME 2

Dans tout le problème, on note  $E$  l'ensemble des fonctions  $u : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  continues sur  $\mathbb{R}^+$  vérifiant :

$$\text{il existe } p \in \mathbb{N} \text{ tel que : } \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{u(t)}{t^p} = 0.$$

On remarquera que l'entier  $p$  dépend a priori de la fonction  $u$  considérée.

### Partie I : Définition de la transformée de Laplace

1. Montrer que  $E$  est un sous-espace vectoriel du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions définies sur  $\mathbb{R}^+$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

2. Soit  $u$  un élément de  $E$ .

Montrer, pour tout  $x \in ]0; +\infty[$  : 
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 u(t) e^{-xt} = 0.$$

En déduire que, pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ , l'intégrale  $\int_0^{+\infty} u(t) e^{-xt} dt$  est convergente.

Dans toute la suite du problème, pour tout élément  $u$  de  $E$ , on définit la fonction  $L(u)$  sur  $]0; +\infty[$  par :

$$\forall x \in ]0; +\infty[, \quad L(u)(x) = \int_0^{+\infty} u(t) e^{-xt} dt.$$

3. Montrer, pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$  et pour tout  $(u, v) \in E^2$  :  $L(\alpha u + v) = \alpha L(u) + L(v)$ .

### Partie II : Quelques exemples

4. Soit  $a \in \mathbb{R}^{++}$  fixé. On considère, pour tout  $i$  de  $\{0, 1, 2\}$ , la fonction  $v_i : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad v_i(t) = t^i e^{-at}.$$

Pour tout  $i$  de  $\{0, 1, 2\}$ , montrer que la fonction  $v_i$  appartient à  $E$  et, en utilisant par exemple des résultats sur la loi exponentielle, calculer, pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ ,  $L(v_i)(x)$ .

5. Soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé. On considère la fonction  $w_n : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :  $\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad w_n(t) = t^n$ .

Montrer que la fonction  $w_n$  appartient à  $E$  et montrer, pour tout  $x \in ]0; +\infty[$  :  $L(w_n)(x) = \frac{n!}{x^{n+1}}$ .

### Partie III : Propriétés des transformées de Laplace

6. **Limite de  $L(u)$  en  $+\infty$**

Soit  $u$  un élément de  $E$ . Justifier qu'il existe  $p \in \mathbb{N}$  et  $A, M \in \mathbb{R}^+$  tels que :

$$\forall t \in [A; +\infty[, \quad |u(t)| \leq t^p \quad \text{et} \quad \forall t \in [0; A], \quad |u(t)| \leq M.$$

Établir :  $\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad |u(t)| \leq M + t^p$ . En déduire :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} L(u)(x) = 0$ .

7. **Limite de  $L(u)$  en 0**

Soit  $u$  un élément de  $E$  tel que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} u(s) ds$  converge.

On note, pour tout  $t$  de  $\mathbb{R}^+$ ,  $R(t) = \int_t^{+\infty} u(s) ds$ .

a. Déterminer la limite en  $+\infty$  de  $R$ . Montrer que  $R$  appartient à  $E$ .

b. Montrer que  $R$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^+$  et :  $\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad R'(t) = -u(t)$ .

- c. En déduire :  $\forall x \in ]0; +\infty[, L(u)(x) = R(0) - xL(R)(x).$   
 d. Soit  $\varepsilon \in ]0; +\infty[.$  Justifier qu'il existe  $B \in ]0; +\infty[$  tel que :  $\forall t \in [B; +\infty[, |R(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$

En déduire :  $\forall x \in ]0; +\infty[, |L(u)(x) - R(0)| \leq x \int_0^B |R(t)| dt + \frac{\varepsilon}{2}.$

- e. Conclure :  $\lim_{x \rightarrow 0} L(u)(x) = \int_0^{+\infty} u(t) dt.$

**8. Transformée de Laplace d'une dérivée**

Soit  $u : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^+$  telle que  $u' \in E.$

- a. Montrer qu'il existe  $p \in \mathbb{N}$  et  $A \in ]0; +\infty[$  tels que :  $\forall t \in [A; +\infty[, |u(t)| \leq |u(A)| + \frac{t^{p+1}}{p+1}.$   
 b. En déduire que  $u$  appartient à  $E.$   
 c. Établir :  $\forall x \in ]0; +\infty[, L(u')(x) = -u(0) + xL(u)(x).$

**9. Dérivée puis dérivée  $n$ -ième d'une transformée de Laplace**

Soit  $u$  un élément de  $E.$  On considère, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*,$  la fonction  $u_n : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, u_n(t) = t^n u(t).$$

- a. Montrer que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*,$  la fonction  $u_n$  appartient à  $E.$

- b. Montrer :  $\forall a \in \mathbb{R}, |e^a - 1 - a| \leq \frac{a^2}{2} e^{|a|}.$

- c. Soient  $x \in ]0; +\infty[$  et  $h \in \mathbb{R}^*$  tel que  $|h| \leq \frac{x}{2}.$

Montrer :  $\forall t \in [0; +\infty[, \left| \frac{e^{-(x+h)t} - e^{-xt}}{h} + t e^{-xt} \right| \leq |h| \frac{t^2}{2} e^{-xt/2}.$

En déduire :  $\left| \frac{L(u)(x+h) - L(u)(x)}{h} + L(u_1)(x) \right| \leq \frac{|h|}{2} \int_0^{+\infty} t^2 |u(t)| e^{-xt/2} dt.$

- d. Montrer que  $L(u)$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et exprimer  $(L(u))'$  à l'aide de  $L(u_1).$   
 e. Montrer que  $L(u)$  est de classe  $C^\infty$  sur  $]0; +\infty[$  et exprimer, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*, (L(u))^{(n)}$  à l'aide de  $L(u_n).$

**Partie IV : Application à la résolution d'une équation fonctionnelle**

Dans cette partie, on cherche à déterminer une fonction  $u : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^+$  vérifiant :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, u''(t) + 5u'(t) + 6u(t) = e^{-t} \quad \text{et} \quad u(0) = 1 \quad \text{et} \quad u'(0) = -2.$$

10. On suppose qu'il existe une fonction  $u : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^+,$  solution du problème et telle que  $u'' \in E.$   
 a. Montrer que  $u$  appartient à  $E$  et :  $\forall x \in ]0; +\infty[, L(u'')(x) = -xu(0) - u'(0) + x^2 L(u)(x).$   
 b. En déduire :  $\forall x \in ]0; +\infty[, (x^2 + 5x + 6)L(u)(x) = \frac{1}{x+1} + 3 + x,$   
 puis :  $\forall x \in ]0; +\infty[, L(u)(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{x+3}.$
11. En déduire une fonction  $u : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  solution du problème posé.

# CORRIGÉ

Par Jean-Louis Roque, professeur au lycée Pasteur à Neuilly-sur-Seine, et external lecturer à ESSEC Business School.

EM  
LYON

CORRIGÉ

## Problème 1

Il est toujours amusant de lire cette phrase « on confond polynôme et application polynomiale » quand on sait que, la plupart du temps, l'impétrant ignore ce qu'est véritablement un polynôme...

### Partie 1

1. Allons-y gaiement en trois temps.

- Nous avons déjà par définition le plongement

$$E \subset \mathbb{R}_4[X]$$

- Le polynôme nul appartient manifestement à  $E$  d'où l'indispensable non-vacuité espérée.

- Soit pour finir  $P$  et  $Q$  appartenant à  $E$  et  $\lambda$  un nombre réel. D'après la définition des opérations sur les applications nous avons les égalités

$$(P + \lambda Q)(0) = P(0) + \lambda Q(0) \quad \text{et} \quad (P + \lambda Q)(4) = P(4) + \lambda Q(4)$$

qui devraient suffire à nous faire entendre que

$$P + \lambda Q \in E$$

2. Cette fois nous y allons en quatre *rounds* !

- Soit  $Q$  appartenant à  $\mathbb{R}_2[X]$ . Comme  $W$  est de degré 2 le produit  $WQ$  est d'ores et déjà un polynôme de  $\mathbb{R}_4[X]$  et il suffit d'ouvrir les mirettes pour lui apercevoir les deux racines 0 et 4. En bref  $\phi$  applique bien  $\mathbb{R}_2[X]$  dans  $E$ .

- La linéarité de  $\phi$  n'est qu'une vague histoire de distributivité du produit polynomial vis-à-vis de la somme.

- Soit  $Q$  appartenant au noyau de  $\phi$ . Cela signifie bien sûr que

$$WQ = 0$$

Oui mais voilà, quand un produit de polynômes est nul, l'un des facteurs est nul(\*) et comme ce n'est visiblement pas  $W$ ...

En conséquence

$$\text{Ker } \phi = \{0\}$$

et  $\phi$  est définitivement injective.

- Soit pour finir  $P \in E$ . Comme il possède les deux racines différentes 0 et 4, le produit  $W = X(X - 4)$  le divise et il existe donc  $Q \in \mathbb{R}[X]$  tel que

$$P = WQ$$

(\*) Cette importante propriété de l'ensemble des polynômes s'appelle « intégrité » et sa preuve est on ne peut plus élémentaire...

Il reste à ne pas avoir oublié que  $P$  appartient à  $\mathbb{R}_4[X]$  et que

$$\deg P = \deg W + \deg Q = 2 + \deg Q$$

pour en déduire que  $Q$  appartient à  $\mathbb{R}_2[X]$  et qu'en définitive

$$P = \phi(Q)$$

L'application  $\phi$  est dorénavant surjective et notre petit tour est terminé.

3. Même si cela n'apparaît pas lumineusement dans le programme officiel, il semble difficile d'ignorer que par un isomorphisme de *machin* sur *chose* l'image de toute base de *machin* est une base de *chose*. Dans ces conditions et parce que la famille

$$(1, X, X^2)$$

a le privilège de « baser » — canoniquement même ! — l'espace vectoriel  $\mathbb{R}_2[X]$ , nous apprenons que

$$(\phi(1), \phi(X), \phi(X^2)) = (X(X-4), X^2(X-4), X^3(X-4))$$

est une authentique base de  $E$ . Il suffit maintenant de compter *un, dos, tres* pour clamer que

$$\dim E = 3$$

4. Rappelons que lorsque  $P$  et  $Q$  sont deux polynômes, les *polynomeux*(\*) se permettent souvent de noter  $P(Q)$  la composition  $P \circ Q$  qui, soit dit en passant, est encore évidemment polynomiale. Nous avons donc ici en réalité

$$P(X+1) = P \circ (X+1)$$

Observons d'ailleurs que les *probableux* font exactement la même chose lorsqu'ils s'autorisent à noter  $\varphi(Y)$  la variable aléatoire  $\varphi \circ Y$ . Mais bon...

Rappelons également la quasi évidence selon laquelle

$$\forall P \in \mathbb{K}[X] \quad \forall Q \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\} \quad \deg P(Q) = \deg P \cdot \deg Q$$

Signalons enfin que  $\Delta$  est le céléberrissime opérateur de Gregory-Newton à cela près que son champ d'action est ici confiné à  $\mathbb{R}_2[X]$ .

a. Nous y allons en deux manches !

– Soit  $P$  appartenant à  $\mathbb{R}_2[X]$ . La composition  $P(X+1)$  est encore évidemment un polynôme qui, si l'on en croit notre récente remarque, est de même degré que  $P$  puisque

$$\deg(X+1) = 1$$

(\*) Il y a les *footeux*, les *journaloux*, les *stateux*, les *polynômeux* et bien d'autres catégories de spécialistes...

La différence

$$\Delta(P) = P(X + 1) - P(X)$$

est donc un polynôme de degré inférieur ou égal à deux et  $\Delta$  applique donc bien  $\mathbb{R}_2[X]$  dans lui-même.

– La linéarité de  $\Delta$  repose quant à elle sur la distributivité à gauche de la composition par rapport à l'addition d'autant plus providentielle qu'elle ne l'est généralement pas à droite...

b. Soit  $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ . Après l'avoir canoniquement écrit

$$Q = aX^2 + bX + c \quad \text{où} \quad (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$$

et en ouvrant bien ses mirettes, l'on trouve très tranquillement que

$$\deg \Delta(Q) = \begin{cases} \deg Q - 1 & \text{si} \quad \deg Q \geq 1 \\ -\infty & \text{si} \quad \deg Q \leq 0 \end{cases}$$

c. Nous commencerons par le noyau et nous passerons ensuite à l'image.

– Soit  $Q$  appartenant au noyau de  $\Delta$ . Nous avons du coup

$$\deg \Delta(Q) = -\infty$$

et il résulte de la précédente que cela n'est possible que si, et seulement si  $Q \in \mathbb{R}_0[X]$ . Ainsi

$$\text{Ker } \Delta = \mathbb{R}_0[X]$$

– À bien y regarder il résulte également de la précédente que

$$\forall Q \in \mathbb{R}_2[X] \quad \deg \Delta(Q) \leq 1$$

à telle enseigne que déjà

$$\text{Im } \Delta \subset \mathbb{R}_1[X]$$

En outre, au vu et au su de ce qu'il vient d'advenir de  $\text{Ker } \Delta$  et de l'important théorème du rang il s'avère mentalement que

$$\dim \text{Im } \Delta = 2$$

et nous sommes donc dans l'idéale situation

$$\text{Im } \Delta \subset \mathbb{R}_1[X] \quad \text{et} \quad \dim \text{Im } \Delta = \dim \mathbb{R}_1[X]$$

Cela déclenche sur-le-champ le théorème du sous-espace vectoriel et voilà donc que

$$\text{Im } \Delta = \mathbb{R}_1[X]$$

† On notera l'importance d'avoir commencé par le noyau ce qui était d'ailleurs fortement suggéré par le texte...

d. Soit  $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ . D'après la toute récente c, le polynôme  $\Delta(Q)$  appartient à  $\mathbb{R}_1[X]$  et il existe donc deux réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que

$$\Delta(Q) = \alpha X + \beta$$

On en déduit alors *de memoria* que

$$\Delta^2(Q) = \alpha \quad \text{puis} \quad \Delta^3(Q) = 0$$

So...

† On retrouve, dans ce cas particulier, la classique *nilpotence* de l'opérateur de Gregory-Newton en dimension finie.

5. Notons que nous avons le diagramme

$$E \xrightarrow{\phi^{-1}} \mathbb{R}_2[X] \xrightarrow{\Delta} \mathbb{R}_2[X] \xrightarrow{\phi} E$$

qui révèle plusieurs choses

- *primo* l'application  $f$  est *parfaitement* définie ;
- *deuzio*, il s'agit bien d'une application de  $E$  dans lui-même ;
- *tertio*, il est bien question d'une application *linéaire* puisque les trois dont elle est la composée le sont.

En bref,  $f$  est effectivement un endomorphisme de  $E$  et l'on flaire comme une sorte de parfum de similitude...

a. On imagine bien comme, en situation de « similitude », que

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad f^p = \phi \circ \Delta^p \circ \phi^{-1}$$

une récurrence de Cotonou sur  $p$  se chargeant de la besogne. Nous avons alors en particulier

$$f^3 = \phi \circ \Delta^3 \circ \phi^{-1} = 0$$

puisque nous n'avons pas oublié la question 4.d.

b. Nous procédons encore une fois en les prenant l'un après l'autre.

- Soit  $x \in E$ . La bijectivité de  $\phi$  permet de mettre en place l'équivalence logique

$$x \in \text{Ker } f \iff \phi^{-1}(x) \in \text{Ker } \Delta$$

Comme

$$\text{Ker } \Delta = \mathbb{R}_0[X] = \text{Vect}(1)$$

il s'ensuit bijectivement et mentalement que

$$\text{Ker } f = \text{Vect } \phi(1) = \text{Vect } W$$

et la petite famille  $(W)$  est une base de  $\text{Ker } f$  puisque  $W$  n'est assurément pas le polynôme nul.

– Soit maintenant  $y \in E$ . L'on revendique *mutatis mutandis* l'équivalence

$$y \in \text{Im } f \iff \phi^{-1}(y) \in \text{Im } \Delta$$

Comme

$$\text{Im } \Delta = \mathbb{R}_1[X] = \text{Vect}(1, X)$$

il s'ensuit d'erechef bijectivement et mentalement que

$$\text{Im } f = \text{Vect}(\phi(1), \phi(X)) = \text{Vect}(W, XW)$$

Comme elle est indubitablement libre, la famille  $(W, XW)$  est une base de  $\text{Im } f$ .

c. Nous venons d'apprendre que

$$E_0(f) \neq \{0\}$$

puisque l'on a depuis peu

$$\dim E_0(f) = 1$$

Autant dire alors déjà que 0 est une valeur propre de  $f$ . D'autre part, si l'on en croit la récente 5.a, le polynôme  $X^3$  est annulateur de l'endomorphisme  $f$  et nous sommes alors supposés savoir que

$$\text{Spec } f \subset \text{root}(X^3) \quad \text{i.e.} \quad \text{Spec } f \subset \{0\}$$

Il résulte ainsi de tout cela que

$$\text{Spec } f = \{0\}$$

Quant à une base et à la dimension de  $E_0(f)$  nous y avons déjà répondu il n'y a pas si longtemps...

d. Il vient d'être dit que

$$\text{Spec } f = \{0\} \quad \text{et} \quad \dim E_0(f) = 1$$

Comme  $\dim E = 3$ , la somme des dimensions des espaces propres de  $f$  n'est définitivement pas égale à la dimension de  $E$  — le compte n'est donc pas bon ! — et la condition nécessaire et suffisante dite « du comptable » affirme alors avec force que  $f$  n'est pas diagonalisable.

† Cela n'est pas vraiment étonnant car, comme dirait l'autre, les nilpotents diagonalisables sont à peu près aussi rares que les temples hindous à La Tranche-sur-Mer...

## Partie 2

6. Il y a deux façons de parvenir à nos fins, une en quatre points et une en cinq. Il est ici préférable d'y aller en cinq. *Here we go!*

– Les applications polynomiales étant définies partout, partout, il semble inéluctable que  $\langle , \rangle$  applique bien  $\mathbb{R}_4[X] \times \mathbb{R}_4[X]$  dans  $\mathbb{R}$ .

– La symétrie de  $\langle , \rangle$  se contentera d'un mièvre *no comment*.

– On fixe  $P \in \mathbb{R}_4[X]$ . La linéarité de l'application

$$Q \longmapsto \langle P, Q \rangle$$

résulte essentiellement de celle de la sommation ainsi que d'un *picochouia* de distributivité.

– Soit  $P$  appartenant à  $\mathbb{R}_4[X]$ . La positivité de la quantité

$$\langle P, P \rangle = \sum_{i=0}^4 (P(i))^2$$

ne peut échapper qu'à ceux — ou celles — qui souffrent de diplopie avancée.

– Soit pour finir  $P$  un polynôme de  $\mathbb{R}_4[X]$  vérifiant

$$\langle P, P \rangle = 0$$

Cela se traduit par

$$\sum_{i=0}^4 (P(i))^2 = 0$$

et l'argument éculé des « sommes nulles de réels de même signe » oblige alors

$$P(0) = P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = 0$$

Le polynôme  $P$ , depuis toujours situé dans  $\mathbb{R}_4[X]$ , osant revendiquer *cinq* racines distinctes, doit littéralement se condamner à une navrante nullité *and Bob's your uncle!*

† Ce produit scalaire a sa part de popularité. Il s'appelle produit scalaire de Joseph-Louis Lagrange attaché à la liste  $(0, 1, 2, 3, 4)$ .

7. Nous aborderons la question en trois phases.

– La première chose importante est le côté *inside*  $\mathbb{R}_2[X]$ , de la famille en question. Un espace vectoriel n'est en effet ni engendré, ni encore moins « basé », par des extraterrestres !

– La seconde passe par un indispensable test de liberté. Soit donc  $a, b, c$  des réels vérifiant

$$a(X-2)(X-3) + b(X-1)(X-3) + c(X-1)(X-2) = 0 \quad (\text{TL})$$

Il suffit alors d'évaluer tour à tour en 1, 2 et 3 pour récupérer

$$a = b = c = 0$$

et la famille

$$(L_1, L_2, L_3)$$

est ainsi déjà libre dans  $\mathbb{R}_2[X]$ .

– Reste à faire à nouveau appel à Ricky Martin. La famille  $(L_1, L_2, L_3)$  est de longueur 3 et il se trouve que précisément

$$3 = \dim \mathbb{R}_2[X]$$

L'histoire se termine alors *via* le théorème de caractérisation des bases en dimension finie.

8.a. Soit  $P$  appartenant à  $\mathbb{R}_2[X]$ . Base oblige, il existe trois réels  $a, b$  et  $c$  tels que

$$P = aL_1 + bL_2 + cL_3$$

Comme *supra* on évalue tour à tour en 1, 2 et 3 et *boum* !

$$P(1) = 2a \quad ; \quad P(2) = -b \quad ; \quad P(3) = 2c$$

Les coordonnées espérées sont donc dans cet ordre

$$\frac{P(1)}{2} \quad ; \quad -P(2) \quad ; \quad \frac{P(3)}{2}$$

b. Nous les prenons les uns après les autres.

– Nous avons tout d'abord et mentalement

$$\Delta(L_1) = (X - 1)(X - 2) - L_1 = L_3 - L_1$$

la dernière égalité prouvant que le *physio* n'est pas bigleux !

– Nous passons ensuite à

$$\Delta(L_2) = X(X - 2) - L_2$$

Il y aurait certes plusieurs façons de tracer la route mais comme l'on a aisément

$$\Delta(L_2)(1) = -1 \quad ; \quad \Delta(L_2)(2) = 1 \quad ; \quad \Delta(L_2)(3) = 3$$

la précédente question assure que

$$\Delta(L_2) = -\frac{1}{2}L_1 - L_2 + \frac{3}{2}L_3$$

– En suivant la même route que celle empruntée pour débusquer  $\Delta(L_2)$ , l'on trouve cette fois que

$$\Delta(L_3) = -2L_2 + 2L_3$$

et l'obtention de la matrice n'est alors qu'une affaire de protocole.

9. C'est ici qu'une percutante remarque lagrangienne s'impose. Le lecteur cultivé a dû percevoir en  $L_1, L_2$  et  $L_3$  un puissant fumet de polynômes de Lagrange à cela près qu'il ne s'agit pas exactement des authentiques. Du coup, la belle  $\delta$ -propriété des *genuine* polynômes de Joseph-Louis est ici un peu moins classe, en l'occurrence

$$\forall i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket \quad \forall k \in \llbracket 1, 3 \rrbracket \quad L_i(k) = \delta_{ik} L_i(i)$$

où  $\delta_{ik}$  est encore une fois le fameux symbole de Leopold Kronecker.

a. *No comment !*

b. On s'organise !

- On vérifie aisément que la famille  $(N_1, N_2, N_3)$  est intérieure à  $E$ .
- Soit maintenant  $i$  et  $j$  deux éléments de  $\llbracket 1, 3 \rrbracket$ . Nous avons

$$\langle N_i, N_j \rangle = \frac{1}{M_i(i)M_j(j)} \sum_{k=0}^4 M_i(k)M_j(k)$$

et comme  $W$  s'annule en zéro et en quatre, la somme se raccourcit un peu et nous avons en réalité

$$\langle N_i, N_j \rangle = \frac{1}{M_i(i)M_j(j)} \sum_{k=1}^3 W^2(k)L_i(k)L_j(k)$$

Notre récente lagrangienne discussion prend maintenant le relais et voilà donc que

$$\langle N_i, N_j \rangle = \frac{1}{M_i(i)M_j(j)} \sum_{k=1}^3 W^2(k)\delta_{ik}L_i(i)\delta_{jk}L_j(j)$$

Comme c'est toujours un plaisir de gérer les «  $\delta$  » de Kronecker, il ne devrait rester que

$$\langle N_i, N_j \rangle = \delta_{ij} \frac{W(i)L_i(i)W(j)L_j(j)}{M_i(i)M_j(j)}$$

cette *tricky* écriture reposant sur l'amusante égalité

$$W^2(j)\delta_{ij} = W(i)W(j)\delta_{ij}$$

Après une intervention musclée du *physio*, il advient finalement que

$$\langle N_i, N_j \rangle = \delta_{ij}$$

chronique d'une orthonormalité annoncée...

† Nous aurions pu éviter le recours aux  $\delta$ -propriétés lagrangiennes en procédant de façon beaucoup plus manuelle. Le seul intérêt que nous y voyons est la possibilité de généraliser une grande partie de ce texte à l'espace  $\mathbb{R}_{n+1}[X]$  en lieu et place de  $\mathbb{R}_4[X]$  et de manipuler ainsi des sommes de type

$$\sum_{k=0}^{n+1} \quad \text{ou} \quad \sum_{i=1}^n$$

plutôt que les puériles ou enfantines

$$\sum_{k=0}^4 \quad \text{ou} \quad \sum_{i=1}^3$$

A-t-on eu peur de traumatiser l'impétrant qui préfère les chiffres aux lettres ??

10. Le programme officiel s'étant enfin décidé à choisir la façon la plus efficace de noter les matrices d'applications linéaires, la matrice ici demandée n'est autre que

$$\text{Mat}_{N,L}(\phi)$$

où, à la surprise générale, nous nous sommes autorisés les notations

$$L = (L_1, L_2, L_3) \quad \text{et} \quad N = (N_1 N_2, N_3)$$

La suite n'est plus qu'une affaire de protocole et on trouve aisément

$$\text{Mat}_{N,L}(\phi) = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

les raisons essentielles étant

$$M_1(1) = -6 \quad ; \quad M_2(2) = 4 \quad ; \quad M_3(3) = -6$$

11. La formule « produit matriciel et composition » et son sympathique côté *châliien* s'écrit ici

$$\text{Mat}_N(f) = \text{Mat}_{N,N}(\phi \circ \Delta \circ \phi^{-1}) = \text{Mat}_{N,L}(\phi) \cdot \text{Mat}_{L,L}(\Delta) \cdot \text{Mat}_{L,N}(\phi^{-1})$$

En utilisant ensuite la formule « matrice et inversion », l'on déduit finalement que

$$\text{Mat}_N(f) = \text{Mat}_{N,L}(\phi) \cdot \text{Mat}_L(\Delta) \cdot \left[ \text{Mat}_{N,L}(\phi) \right]^{-1}$$

Grâce à la précédente et aussi à la question 8.b on trouve alors très poétiquement que

$$\text{Mat}_N(f) = \begin{bmatrix} -1 & 3/4 & 0 \\ 0 & -1 & 4/3 \\ 1 & -9/4 & 2 \end{bmatrix}$$

12.a.b.c. Soit  $P$  appartenant à  $\mathbb{R}_4[X]$  et  $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$ . Vu la physionomie des lieux et parce que nous connaissons bien nos classiques nous décidons, *manu militari*, de calculer le produit scalaire de  $P$  par  $N_i$ . Ce sont encore le même genre de raccourcissement et de  $\delta$ -property qui devraient nous amener tout d'abord à

$$\langle P, N_i \rangle = \frac{1}{M_i(i)} \sum_{k=1}^3 P(k) W(k) \delta_{ik} L_i(i)$$

puis pour finir à

$$\langle P, N_i \rangle = P(i)$$

après une toujours aussi sympathique  $\delta$ -gestion et un réveil autoritaire du *physio*. Du coup, nous avons définitivement

$$u(P) = \sum_{i=1}^3 \langle P, N_i \rangle N_i$$

Comme  $(N_1, N_2, N_3)$  est une base orthonormale de  $E$  nul ne peut ignorer que  $u$  est le projecteur orthogonal sur  $E$  et les questions  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont simultanément *in the pocket* !

d. Que diriez-vous de

$$u(Q) = 2N_1$$

juste pour voir ?

## Problème 2

À LIRE EN GUISE DE PROLÉGOMÈNE :

Voici en vrac trois petites réflexions qui auront simplement pour but de mettre quelques points sur les « i » et d'améliorer ainsi notre quotidien.

– Nous mettons tout d'abord en place un outil anodin qui aurait dû être officiel comme il l'était d'ailleurs dans l'ancien programme. Il s'agit de l'inégalité triangulaire pour une intégrale *impropre*. Nous ne pousserons pas le vice à présenter le cas le plus général et nous nous contenterons de ce qui sera parfois utile à nos affaires.

THÉORÈME TRIANGULAIRE :

Soit  $f$  une application continue de l'intervalle  $[0, +\infty[$  dans  $\mathbb{R}$ . On suppose que  $f$  est absolument intégrable sur  $[0, +\infty[$  ce qui signifie évidemment que

$$\int_0^{+\infty} |f|$$

existe. On a alors l'inégalité

$$\left| \int_0^{+\infty} f \right| \leq \int_0^{+\infty} |f|$$

et nous n'insistons pas sur la position relative(\*) des bornes dans la mesure où ici...

La preuve se déduit *a la mano* de l'inégalité triangulaire pour une intégrale *propre* qui, fort heureusement, n'a quant à elle pas disparu des programmes !

– Puisqu'il est évidemment hors de question d'appliquer le triangle à une *semi convergente*, il est bon de disposer d'arguments qui permettent de justifier sans douleur l'intégrabilité *absolue*. En voici un très simple :

---

(\*) Nous rappelons que dans le cas général du triangle cette position relative est à surveiller avec beaucoup d'attention !

INTÉGRABILITÉ ABSOLUE ET COMBINAISONS LINÉAIRES :

*Toute combinaison linéaire de fonctions absolument intégrables sur un intervalle est également absolument intégrable sur cet intervalle.*

La preuve, *a la mano*, se fait *via* le théorème de linéarité et grâce à un *choix* de comparaison en signe positif.

– Notons enfin une dernière chose dans ce prologue. Nous venons à l’occasion du triangle de parler de disposition relative de bornes. Cet état des choses est aussi un point capital dans l’utilisation de la croissance — ou la positivité — de l’intégration et comme dans ce texte les bornes d’intégration ne seront pratiquement *jamais* de guingois il nous arrivera de passer la chose sous silence. Nous espérons en être pardonnés !

Nous utiliserons librement toutes ces révélations.

### Partie 1

1. Très curieux ce plongement ! Si cela ne dérange personne et parce que nous le valons bien nous montrerons plutôt que  $E$  est un sous-espace vectoriel de l’espace

$$C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$$

des applications *continues* de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}$  puisqu’il est bien connu que dans les histoires de plongement, plus on *zoome*, moins il y a de travail... *Here we go !*

– Le plongement

$$E \subset C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$$

est d’actualité par définition de  $E$ .

– La fonction nulle est là pour assurer la vitale non vacuité.

– Soit  $u$  et  $v$  deux applications appartenant à  $E$  et  $\lambda$  un nombre réel. Il existe par définition deux entiers naturels  $p$  et  $q$  tels que

$$u(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(t^p) \quad \text{et} \quad v(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(t^q)$$

Ce n’est alors qu’une formalité que d’établir que

$$(u + \lambda v)(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(t^{p+q})$$

et comme  $p + q$  est *naturellement* entier...

2. Soit  $x$  un réel strictement positif. Comme  $u$  appartient à  $E$ , il existe un naturel  $p$  tel que

$$u(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(t^p)$$

d’où il ressort machinalement que

$$t^2 u(t) e^{-xt} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(t^{p+2} e^{-xt})$$

le lecteur étant supposé rompu aux manipulations des *petitos* d'Edmund Landau. Il reste alors à ne pas avoir égaré la classique prépondérance selon laquelle

$$t^{p+2} e^{-xt} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$$

puisque, au risque de radoter(\*), le réel  $x$  est idéalement situé.

Poursuivons. La fonction  $u$  étant par hypothèse continue sur  $[0, +\infty[$ , il en est *généreusement* de même de

$$t \mapsto u(t)e^{-xt}$$

et notre intégrale n'est donc impropre qu'en plus l'infini. Il semble qu'à l'instant, nous avons constaté que

$$u(t)e^{-xt} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right) \quad \text{et bien sûr} \quad \forall t \geq 1 \quad \frac{1}{t^2} \geq 0$$

et comme nous maîtrisons *farpaitement* nos références, nous déduisons du test de prépondérance en signe positif l'existence de l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} u(t)e^{-xt} dt$$

Oui mais voilà, la *généreuse* continuité sur  $[0, +\infty[$  évoquée *supra* fait que

$$\int_1^{+\infty} u(t)e^{-xt} dt \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} u(t)e^{-xt} dt$$

sont de même nature. *So...*

† Cette convergence résultant du test de prépondérance en signe positif est en réalité une convergence *absolue*. Nous saurons nous en souvenir...

3. L'intégration aurait-elle cessé d'être linéaire ?

† On vient d'établir que  $L$  est une application linéaire de l'espace vectoriel  $E$  vers celui des applications de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $\mathbb{R}$ .

Cette application  $L$  est un célèbre opérateur appelé « transformation de Laplace ».

## Partie 2

Avant de commencer nous mettons en place un petit *addendum* concernant la fonction gamma d'Euler.

LES SATELLITES DE LA FONCTION GAMMA :

Soit  $x$  et  $y$  deux réels strictement positifs. Alors, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-yt} dt$$

(\*) Nous en profitons pour rappeler que dans cette armada de prépondérances officielles certains paramètres doivent impérativement être strictement positifs. Sinon bobo, gros bobo...

existe et l'on a

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-yt} dt = \frac{\Gamma(x)}{y^x}$$

LA PREUVE :

Comme  $x$  est strictement positif, nous savons que  $\Gamma(x)$  existe et que

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} u^{x-1} e^{-u} du$$

Nous suggérons alors d'y réaliser le *pico* changement de variable affine

$$u = yt$$

La stricte positivité de  $y$  fait que la fonction  $t \mapsto yt$  réalise allégrement une bijection de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $]0, +\infty[$  sur lui-même à telle enseigne que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} y^x t^{x-1} e^{-yt} dt$$

existe également et vaut encore  $\Gamma(x)$ . *Thank's to  $y^x \neq 0$*  et à un *chouia* de linéarité, il en résulte aussitôt que

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-yt} dt \quad \text{existe et que} \quad \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-yt} dt = \frac{\Gamma(x)}{y^x}$$

Nous pouvons commencer. . .

4. Nous trouvons curieux de supposer  $a$  strictement positif. Sa positivité large suffit amplement et c'est donc elle que nous supposons. De même, situer l'entier  $i$  dans l'ensemble  $\{0, 1, 2\}$  nous paraît un peu timoré et nous élevons donc le débat en annonçant carrément  $a \geq 0$  et  $i \in \mathbb{N}$ .

La continuité sur  $\mathbb{R}_+$  de l'application

$$v_i : t \mapsto t^i e^{-at}$$

est assurément à l'ordre du jour et c'est déjà une bonne chose. Notons ensuite que la positivité large de  $a$  doit nous permettre de réclamer avec force la prépondérance

$$v_i(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(t^{i+1})$$

et tout cela dépose délicatement l'application  $v_i$  dans l'espace vectotiel  $E$ .

Soit maintenant  $x > 0$ . Observons que, malgré nos changements, le réel  $x + a$  est également positif strict, ce qui nous permet de revendiquer tour à tour

$$L(v_i)(x) = \int_0^{+\infty} v_i(t) e^{-xt} dt = \int_0^{+\infty} t^i e^{-(x+a)t} dt = \frac{\Gamma(i+1)}{(x+a)^{i+1}}$$

la toute dernière égalité reposant sur la délicieuse satellisation évoquée au début de cette partie ainsi que sur les *strictes* positivités des nombres  $i + 1$  et  $x + a$ .

Comme nous connaissons par cœur le Gamma des entiers, l'histoire se termine sur

$$L(v_i)(x) = \frac{i!}{(x+a)^{i+1}}$$

5. Il suffit de choisir

$$a = 0 \quad \text{et} \quad i = n$$

et d'appliquer la précédente modifiée par nos soins...

### Partie 3

6. Nous savons déjà par définition qu'il existe un entier naturel  $p$  tel que

$$\frac{u(t)}{t^p} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

Jouons alors  $\epsilon = 1$  sur ce très providentiel *jack-pot*. Nous y gagnons un réel strictement positif  $A$  tel que

$$\forall t \geq A \quad \frac{|u(t)|}{t^p} \leq 1$$

ce qui, très positivement, peut également se décliner en

$$\forall t \geq A \quad |u(t)| \leq t^p$$

et qui n'est sûrement pas pour nous déplaire.

À côté de cela la fonction  $u$  est ouvertement continue sur le segment  $[0, A]$  et nous sommes supposés savoir qu'elle y est fatalement bornée(\*). Autant dire alors qu'il existe également un réel positif  $M$  tel que

$$\forall t \in [0, A] \quad |u(t)| \leq M$$

*and Bob's your uncle !*

Poursuivons en annonçant  $t$  positif et planifions *un poquitin*.

– Si  $t$  appartient au segment  $[0, A]$ , nous avons

$$|u(t)| \leq M$$

et *a fortiori*

$$|u(t)| \leq M + t^p$$

vu la positivité de qui de droit.

– Si maintenant  $t > A$ , l'on a cette fois

$$|u(t)| \leq t^p$$

(\*) Un important théorème de Weierstrass assure même qu'elle y possède un maximum et un minimum. Ce n'est pas peu dire !

et *a fortiori*...

Soit maintenant  $x > 0$ . Nous avons déjà dit que nous n'oublions pas la convergence *absolue* de l'intégrale définissant  $L(u)(x)$ . Dans ces conditions, l'importante inégalité du triangle que nous avons pris soin de mettre en place au tout début devrait stipuler dans un premier temps que

$$|L(u)(x)| \leq \int_0^{+\infty} |u(t)|e^{-xt} dt$$

Signalons ensuite que, selon les questions 1 et 5, la fonction

$$t \mapsto M + t^p$$

appartient sérieusement à  $E$  et que, d'après ce qui précède et la *positivité* de l'intégration l'on a

$$|L(u)(x)| \leq \int_0^{+\infty} (M + t^p)e^{-xt} dt$$

puisque les bornes sont idéalement disposées...

La linéarité de l'intégration et la sempiternelle question 5 appliquée aux choix

$$n = 0 \quad \text{puis} \quad n = p$$

révèlent pour finir que

$$|L(u)(x)| \leq \frac{M}{x} + \frac{n!}{x^{n+1}}$$

et le *squeezing process* emballa cette sympathique limite en plus l'infini. Nul doute qu'effectivement

$$L(u)(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

7. On observera que l'intégrale de  $u$  n'est impropre qu'en plus l'infini et que, par définition, l'application  $R$  est le reste de cette dernière.

a. Une très bonne façon d'accommoder les restes est de clamer haut et fort que

$$R(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

parce que nous le savons bien ! Autant dire alors déjà que

$$R(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(1) \quad \text{i.e.} \quad R(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(t^0)$$

et il nous reste maintenant à causer de continuité. *Here we go !*

Pour chaque réel positif  $t$ , nous pouvons écrire(\*)

$$R(t) = - \int_{+\infty}^t u(s) ds$$

(\*) L'une des rares intégrales de notre environnement immédiat dont les bornes sont un peu dérangées, mais c'est pour la bonne cause...

et le théorème de Gaston Darboux est formel. Dans la mesure où l'application  $u$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ , sa copine  $R$  est l'opposée de l'une de ses primitives et hérite, à ce titre, d'une classe  $\mathcal{C}^1$  fort méritée.

Qui dit classe  $\mathcal{C}^1$ , dit *a fortiori* classe  $\mathcal{C}^0$  et au bout du compte, l'on a bel et bien l'appartenance

$$R \in E$$

b. Il semble que tout vient d'être dit à l'instant puisque la dérivée d'une primitive...

c. Soit  $x$  un réel strictement positif. Dans l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} u(t)e^{-xt} dt$$

nous envisageons une intégration par parties et pourquoi pas au travers des deux fonctions

$$U : t \mapsto e^{-xt} \quad \text{et} \quad V : t \mapsto -R(t)$$

La première a exponentiellement une énorme classe sur  $\mathbb{R}_+$ , la seconde y est depuis peu de classe  $\mathcal{C}^1$  et l'on a

$$\forall t \geq 0 \quad U'(t) = -xe^{-xt} \quad \text{et} \quad V'(t) = u(t)$$

puisque  $R$  est, toujours depuis peu, une primitive de  $-u$ . Du reste, le produit  $UV$  possède en plus l'infini la limite finie zéro, la positivité de  $x$  ayant, bien sûr, quelque chose à voir avec l'affaire. Comme  $U(0)V(0) = -R(0)$ , il résulte du théorème d'intégration impropre *by parts* que

$$\int_0^{+\infty} u(t)e^{-xt} dt = R(0) - x \int_0^{+\infty} R(t)e^{-xt} dt$$

ou encore

$$L(u)(x) = R(0) - xL(R)(x)$$

puisque les deux fonctions  $u$  et  $R$  ont eu l'excellente idée d'appartenir(\*) à  $E$ .

† Le théorème d'intégration impropre *by parts* n'est toujours pas dans les nouvelles versions du programme. Nous demandons donc à notre obéissant lecteur de prendre le temps de rédiger la pénible mouture partialisée de la question !

d. Nous avons récemment signalé que

$$R(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$$

Il suffit alors de jouer  $\epsilon/2$  sur ce providentiel *jack pot*. On y gagne effectivement un réel positif  $B$  tel que

$$\forall t \geq B \quad |R(t)| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

(\*) Il est évidemment hors de question de faire agir l'opérateur  $L$  sur une fonction qui oserait ne pas appartenir à  $E$ ...

Soit alors  $x > 0$ . Il résulte déjà et mentalement de la précédente que

$$|L(u)(x) - R(0)| = x \left| \int_0^{+\infty} R(t)e^{-xt} dt \right|$$

Comme  $R$  appartient à  $E$  et parce que nous le savons bien, l'intégrale entre les barreaux est *absolument* convergente et force est de constater(\*) qu'après triangulation

$$|L(u)(x) - R(0)| \leq x \int_0^{+\infty} |R(t)|e^{-xt} dt$$

C'est au tour de Michel Chasles de prendre la main et de révéler ainsi que

$$|L(u)(x) - R(0)| \leq x \int_0^B |R(t)|e^{-xt} dt + x \int_B^{+\infty} |R(t)|e^{-xt} dt$$

Il reste alors à mettre en avant les évidences et les acquis selon lesquels

$$\forall t \in [0, B] \quad |R(t)|e^{-xt} \leq |R(t)| \quad \text{et} \quad \forall t \geq B \quad x|R(t)|e^{-xt} \leq \frac{\epsilon}{2} \cdot xe^{-xt}$$

et d'en déduire par croissance intégrale et par calcul mental que d'une part

$$x \int_0^B |R(t)|e^{-xt} dt \leq x \int_0^B |R(t)| dt$$

et que d'autre part

$$x \int_B^{+\infty} |R(t)|e^{-xt} dt \leq \frac{\epsilon}{2} [-e^{-xt}]_B^{+\infty} = \frac{\epsilon}{2} e^{-xB} \leq \frac{\epsilon}{2}$$

les positivités des uns et des autres et les places relatives des bornes ayant encore une fois été au cœur de certains débats.

e. L'on se doute bien que cette limite va avoir droit à un traitement *epsilontik*. L'annonce du crucial  $\epsilon > 0$  indispensable à ce genre de traitement de faveur a été faite un peu plus haut et nous venons déjà d'en déduire l'existence d'un réel positif  $B$  vérifiant

$$\forall x > 0 \quad |L(u)(x) - R(0)| \leq x \int_0^B |R(t)| dt + \frac{\epsilon}{2}$$

Comme l'intégrale  $\int_0^B |R|$  ne dépend que de  $\epsilon$  il est incontestable que

$$x \int_0^B |R(t)| dt \xrightarrow[x > 0]{x \rightarrow 0} 0$$

(\*) Comme disait Claire...

limite qui se traduit de manière *epsilon* par l'existence d'un réel  $\eta > 0$  tel que

$$\forall x \in ]0, \eta] \quad x \int_0^B |R(t)| dt \leq \frac{\epsilon}{2}$$

Le résultat de toutes ces courses est ainsi que

$$\forall x \in ]0, \eta] \quad |L(u)(x) - R(0)| \leq \epsilon$$

et, à bien y regarder, nous avons établi *via* la définition *epsilon* que

$$L(u)(x) \xrightarrow[x > 0]{x \rightarrow 0} R(0)$$

Comme

$$R(0) = \int_0^{+\infty} u(t) dt$$

il est définitivement urgent de tourner la page !

8.a. La position géographique de la fonction  $u'$  permet de lui appliquer le tout début de la question 6.a en y remplaçant évidemment l'application  $u$  par sa dérivée. Cela produit déjà un entier naturel  $p$  et un réel positif  $A$  tels que

$$\forall s \geq A \quad |u'(s)| \leq s^p$$

Soit alors  $t \geq A$ . La fonction  $u'$  étant en outre géographiquement *continue* sur  $\mathbb{R}_+$ , il est possible de lui imposer la formule de Barrow à telle enseigne que

$$u(t) = u(A) + \int_A^t u'(s) ds$$

L'inégalité triangulaire sommatoire suivie de sa cousine intégrale permettent ainsi d'en déduire que

$$|u(t)| \leq |u(A)| + \int_A^t |u'(s)| ds$$

puisque les bornes  $A$  et  $t$  sont idéalement disposées. Comme, quelques lignes plus haut, il vient d'être écrit que

$$\forall s \in [A, t] \quad |u'(s)| \leq s^p$$

et que les bornes n'ont pas changé d'âne, c'est cette fois la croissance de l'intégration qui prend le relais et voilà donc désormais que tour à tour

$$\int_A^t |u'(s)| ds \leq \int_A^t s^p ds = \left[ \frac{s^{p+1}}{p+1} \right]_A^t = \frac{t^{p+1}}{p+1} - \frac{A^{p+1}}{p+1} \leq \frac{t^{p+1}}{p+1}$$

tout cela se passant pratiquement de tout commentaire une fois que l'on a bien capté que

$$p+1 > 0 \quad \text{et} \quad A \geq 0$$

C'est d'ailleurs une raison suffisante pour changer de question.

b. La continuité de  $u$  provient déjà de sa dérivabilité et, à bien y regarder, il résulte mentalement de la précédente que

$$u(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(t^{p+2})$$

So...

c. Soit  $x$  un réel strictement positif. Comme  $u'$  appartient à  $E$  nous sommes en droit d'écrire que

$$L(u')(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} u'(t) dt$$

et nous allons une nouvelle fois procéder *por partes* mais en choisissant ici les fonctions

$$U : t \mapsto e^{-xt} \quad \text{et} \quad V : t \mapsto u(t)$$

La première possède toujours une énorme classe sur  $\mathbb{R}_+$ , la seconde y est annoncée de classe  $\mathcal{C}^1$  et nous avons

$$\forall t \geq 0 \quad U'(t) = -xe^{-xt} \quad \text{et} \quad V'(t) = u(t)$$

La chose importante à ne pas manquer maintenant est le comportement en plus l'infini du produit  $UV$ . C'est la providentielle et récente question *a* qui va se charger de la besogne. Elle induit en effet l'inégalité

$$\forall t \geq A \quad |U(t)V(t)| \leq e^{-xt} |u(A)| + \frac{t^{p+1} e^{-xt}}{p+1}$$

de laquelle s'ensuit *by squeeze* que

$$U(t)V(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$$

puisque nous maîtrisons sans fléchir nos classiques prépondérances. Le théorème d'intégration impropre par parties révèle alors que

$$L(u')(x) = \left[ U(t)V(t) \right]_0^{+\infty} + x \int_0^{+\infty} e^{-xt} u(t) dt$$

ce qui, au vu et au su de ce que nous venons de décliner à l'instant, devient effectivement

$$L(u')(x) = -u(0) + xL(u)(x)$$

puisque la toute récente appartenance à  $E$  de la fonction  $u$  a permis au *physio* de métamorphoser l'intégrale du *right hand side*.

† La remarque faite à l'issue de l'intégration par parties de la question 7.c n'est pas que *partiellement* d'actualité, cela va sans dire...

9.a. Soit  $n$  appartenant à  $\mathbb{N}^*$ . Nous ne dirons que deux choses :

- puisque  $u$  est par hypothèse continue sur  $\mathbb{R}_+$ , selon les théorèmes généraux, il en est de même de l'application  $u_n$  ;
- il est également et hypothétiquement précisé qu'il existe un entier  $p$  tel que

$$u(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(t^p)$$

et il en ressort quasi instantanément que

$$u_n(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(t^{n+p})$$

ce qui nous permet d'envisager la suite.

† Ce résultat n'est pas vraiment surprenant car le lecteur pourra s'amuser à constater que l'espace vectoriel  $E$  est en réalité stable par le produit fonctionnel en ce sens que

$$u \in E \quad \text{et} \quad v \in E \quad \implies \quad uv \in E$$

b. Soit  $a$  un nombre réel. La fonction exponentielle  $\exp$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et accessoirement de classe  $C^2$  sur le segment  $[0, a]$ . Nous pouvons donc lui appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 entre les deux réels 0 et  $a$ . *This yields*

$$|e^a - 1 - a| \leq \frac{a^2}{2} \cdot \max_{[0, a]} |\exp''|$$

Mais, sans vouloir blesser personne, il semble que :

$$\max_{[0, a]} |\exp''| = \max_{[0, a]} \exp = \begin{cases} e^a & \text{si } a \geq 0 \\ 1 & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Ce maximum est à l'évidence toujours plus petit que  $e^{|a|}$  et  $a^2/2$  est gentiment positif. So...

c. Soit  $t$  un réel positif. Il est tout à fait envisageable de dédier la précédente à  $a = -ht$  et il devrait tranquillement s'ensuivre que

$$|e^{-ht} - 1 + ht| \leq \frac{h^2 t^2}{2} e^{t|h|}$$

les quantités déjà positives étant, *as usual*, dispensées de valuation. On divise ensuite par le *strictement* positif  $|h|$  tout en multipliant dans la foulée par le positif  $e^{-xt}$ . Nous parvenons ainsi sans encombre à

$$\left| \frac{e^{-(x+h)t} - e^{-xt}}{h} + te^{-xt} \right| \leq \frac{|h|t^2}{2} e^{t(|h|-x)}$$

Reste alors à profiter de l'hypothèse(\*) :

$$|h| \leq \frac{x}{2}$$

grâce à laquelle nous avons tout d'abord

$$|h| - x \leq -\frac{x}{2}$$

puis ensuite

$$\frac{|h|t^2}{2} e^{t(|h|-x)} \leq \frac{|h|t^2}{2} e^{-xt/2}$$

quelques positivités environnementales et la croissance de l'exponentielle n'étant pas totalement étrangères à l'affaire. La transitivité de l'ordre se charge alors de conclure le premier *round*.

En ce qui concerne le second set, il est tout d'abord *impératif* de mentionner les choses suivantes :

- il est dit que  $u$  appartient à  $E$  et que  $x$  est strictement positif. Nous savons alors depuis une fort belle lurette que  $L(u)(x)$  existe ;
- nous avons déjà profité une première fois de l'hypothèse de confort

$$-\frac{x}{2} \leq h \leq \frac{x}{2}$$

et elle va bientôt avoir son deuxième effet *kiss cool*. Elle signale en effet que

$$x + h \geq \frac{x}{2} > 0$$

et procure ainsi une existence paisible à  $L(u)(x + h)$  ;

- selon la récente question 9.a la fonction  $u_1$  appartient également à  $E$  et comme le réel  $x$  n'a pas changé d'âne nous pouvons claironner que  $L(u_1)(x)$  existe à son tour.

Nous sommes désormais parfaitement autorisés à jeter notre dévolu sur la quantité

$$D_h = \left| \frac{L(u)(x+h) - L(u)(x)}{h} + L(u_1)(x) \right|$$

qui, après remplacement des uns et des autres par leurs vrais visages, n'est autre que

$$D_h = \left| \frac{\int_0^{+\infty} u(t)e^{-(x+h)t} dt - \int_0^{+\infty} u(t)e^{-xt} dt}{h} + \int_0^{+\infty} tu(t)e^{-xt} dt \right|$$

(\*) Pour les initiés, c'est la fameuse hypothèse de confort.

La linéarité de l'intégration et une indispensable réorganisation de l'intérieur amènent dans un premier temps à

$$D_h \leq \left| \int_0^{+\infty} \left( \frac{e^{-(x+h)t} - e^{-xt}}{h} + te^{-xt} \right) u(t) dt \right|$$

et nous empressons de faire remarquer que la grosse intégrale située entre les barreaux est *absolument*(\*) convergente ce qui permet de la *triangler* allégrement et d'obtenir ainsi, *by transit*, la nouvelle majoration

$$D_h \leq \int_0^{+\infty} \left| \frac{e^{-(x+h)t} - e^{-xt}}{h} + te^{-xt} \right| |u(t)| dt$$

Soit alors  $t$  un réel positif. Si l'on en croît le premier *round* et la positivité de  $|u|$ , nous devrions déjà pouvoir revendiquer l'inégalité

$$\left| \frac{e^{-(x+h)t} - e^{-xt}}{h} + te^{-xt} \right| |u(t)| \leq \frac{|h|}{2} t^2 |u(t)| e^{-xt/2}$$

et la destination est proche !

La question 9.a a en effet permis d'établir l'appartenance à  $E$  de la fonction  $u_2$  et la précieuse observation que nous avons faite à l'issue de la question 2 permet aisément d'en déduire que  $|u_2|$  appartient pareillement à  $E$ . En outre et vu que le réel  $x/2$  est tout aussi strictement positif que son double, nous sommes en mesure d'affirmer que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} t^2 |u(t)| e^{-xt/2} dt$$

existe. La conclusion se fait alors *via* la croissance de l'intégration et grâce à un *picochouia* de linéarité.

d. Comme l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} t^2 e^{-xt/2} |u(t)| dt$$

ne dépend visiblement pas de  $h$ , il y a indiscutablement *squeeze* dans la précédente lorsque  $h$  tend vers zéro et du coup

$$\frac{L(u)(x+h) - L(u)(x)}{h} + L(u_1)(x) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

ce qui revient à dire que

$$\frac{L(u)(x+h) - L(u)(x)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} -L(u_1)(x)$$

La fonction  $L(u)$  est donc par définition dérivable en  $x$  et

$$(L(u))'(x) = -L(u_1)(x)$$

(\*) Son intégrande est ouvertement une combinaison linéaire de trois fonctions absolument intégrables et prolégomène *dixit*...

et comme cela vaut pour tous les réels  $x$  strictement positifs...

e. Après un examen approfondi(\*) de la situation, nous suggérons de justifier que, pour tout entier  $n$  naturel non nul, la fonction  $L(u)$  est  $n$  fois dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et que

$$(L(u))^{(n)} = (-1)^n L(u_n)$$

Comme indiqué dans notre récente note de bas de page, nous nous y prenons par induction sur  $n$ . *Here we go!*

- L'initialisation à  $n = 1$  vient d'être faite à l'instant.
- Supposons que, pour un entier  $n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $L(u)$  soit  $n$  fois dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et que

$$(L(u))^{(n)} = (-1)^n L(u_n)$$

Le clou de l'argumentation est alors le suivant. Comme depuis peu l'application  $u_n$  appartient à  $E$ , on peut appliquer la question 9.d en y remplaçant  $u$  par sa cousine  $u_n$  et l'on apprend ainsi que  $L(u_n)$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et que

$$(L(u_n))' = -L(v_n)$$

où  $v_n$  est l'application définie sur  $\mathbb{R}_+$  par

$$\forall t \geq 0 \quad v_n(t) = tu_n(t)$$

Autant dire alors que  $L(u)$  est  $n + 1$  fois dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et que

$$(L(u))^{(n+1)} = (-1)^{n+1} L(v_n)$$

Comme finalement  $v_n$  n'est rien d'autre que  $u_{n+1}$ , il semble que la boucle soit bouclée...

† Nous rappelons aux étourdis que la dérivabilité  $n$  fois pour tous les entiers  $n \in \mathbb{N}^*$  ou la classe  $C^\infty$  sont comme le bonnet blanc et le blanc bonnet. *So...*

#### Partie 4

10.a. Il suffit d'appliquer deux fois à la queue leu leu les questions 8.b.c !

- Vu que  $u''$  appartient à  $E$ , l'on en déduit que  $u'$  appartient à  $E$  également et que

$$\forall x > 0 \quad L(u'')(x) = -u'(0) + xL(u')(x)$$

- Puisque désormais  $u'$  appartient à  $E$ , il en est de même de  $u$  et l'on a

$$\forall x > 0 \quad L(u')(x) = -u(0) + xL(u)(x)$$

information qui reste à répercuter dans l'expression *supra* de  $L(u'')$ .

(\*) C'est en réalité la fameuse méthode : « je calcule quelques premiers termes, je conjecture quelque chose, je récurse » !

b. Soit  $x > 0$ . Il est supposé que  $u$  est solution du fameux problème et nous en déduisons deux choses ;

– *primo*, l'égalité

$$L(u'') + 5L(u') + 6L(u) = L(v_0)$$

puisque

$$u'' + 5u' + 6u = v_0$$

où  $v_0$  est l'application rencontrée lors de la question 4, en ayant pris soin d'y choisir précisément  $a = 1$ , et aussi parce que, depuis la question 3,  $L$  n'a pas oublié d'être linéaire. Cette même quatrième question nous ayant également appris que

$$L(v_0)(x) = \frac{1}{x+1}$$

nous pouvons peaufiner nos acquis en assénant carrément que

$$L(u'')(x) + 5L(u')(x) + 6L(u)(x) = \frac{1}{x+1}$$

– *deuzio*, les égalités

$$L(u')(x) = xL(u)(x) - 1 \quad \text{et} \quad L(u'')(x) = x^2L(u)(x) + 2 - x$$

puisque  $u(0) = 1$  et  $u'(0) = -2$ .

Plaçons tout cela dans le *shaker* et agitions énergiquement. Après avoir fait un peu de ménage on trouve effectivement que

$$(x^2 + 5x + 6)L(u)(x) = \frac{1}{x+1} + 3 + x$$

Puisqu'il est évident que le réel

$$x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$$

est ici non nul, nous en déduisons que

$$L(u)(x) = \frac{1}{(x+2)(x+3)} \left( \frac{1}{x+1} + 3 + x \right)$$

et l'obtention du résultat souhaité n'est qu'une affaire de manipulations de fractions rationnelles comme nous avons eu l'occasion de le faire en classe de troisième... Nous laissons donc à notre dévoué lecteur le soin de réussir cette nostalgique finalité.

11. Revenons faire un petit coucou aux fonctions  $v_i$  de la quatrième question qui, si cela ne dérange personne, seront ici notées  $v_{i,a}$  pour bien indiquer leur dépendance au réel  $a$ . Les résultats de cette question permettent de reformuler l'ultime conclusion de la toute récente  $b$  en l'égalité fonctionnelle

$$L(u) = L\left(\frac{v_{0,1} + v_{0,3}}{2}\right)$$

ce qui va nous permettre de faire une petite pause.

L'objectif de la quatrième partie est clairement indiqué dans son chapeau. Il s'agit de la *recherche* d'une application  $u$  ayant des vertus diverses et variées et qui dit recherche dit, pourquoi pas, recours à une analyse synthèse. La question 10 et tout particulièrement son « on suppose » est typique de la démarche analytique à cela près que le texte la joue *tricky* en supposant l'existence d'une application  $u$  convenable dont la dérivée seconde appartient à  $E$ .

Au risque de radoter, la conclusion de cette fine analyse est la suivante. Si  $u$  est une application convenable dont la dérivée seconde appartient à  $E$  alors fatalement

$$L(u) = L\left(\frac{v_{0,1} + v_{0,3}}{2}\right) \quad (1)$$

et nous ne pouvons malheureusement pas aller plus loin puisque nous ne savons absolument rien de l'*injectivité* de la transformation de Laplace. C'est donc le moment de passer à la synthèse. Compte tenu des conclusions de l'analyse, nous devons bien évidemment proposer pour application  $u$ , l'une de celles qui vérifient l'égalité (1) et la moins improbable est à coup sûr

$$\tilde{u} = \frac{v_{0,1} + v_{0,3}}{2}$$

et il se trouve — miracle, miracle — qu'elle est parfaitement convenable. Nous laissons au lecteur dévoué le soin de se charger de cette pure formalité !

† Les *pros* des équations différentielles et des problèmes dits de Cauchy savent qu'en réalité  $\tilde{u}$  est l'*unique* solution du problème posé mais cela restera entre nous...

# MATHÉMATIQUES

**DURÉE : 4 HEURES.**

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

*Ils ne doivent faire usage d'aucun document. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

*Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.*

## SUJET

Dans tout le problème, on adopte les notations suivantes :

$C^0([0,1], \mathbb{R})$  désigne l'ensemble des fonctions continues sur le segment  $[0,1]$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

Pour tout entier naturel  $k$  supérieur ou égal à 1,  $C^k([0,1], \mathbb{R})$  désigne l'ensemble des fonctions  $k$  fois dérivables sur le segment  $[0,1]$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et dont les dérivées successives jusqu'à la  $k$ -ème sont continues.

Si  $f$  est une fonction continue sur le segment  $[0,1]$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , on note  $\|f\|_\infty$  le nombre réel  $\max_{t \in [0,1]} |f(t)|$ .

Si  $q$  est une fonction continue sur le segment  $[0,1]$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , on note  $F(q)$  l'ensemble défini par :  $F(q) = \{f \in C^2([0,1], \mathbb{R}) / \forall t \in [0,1], f''(t) = q(t)f(t)\}$ .

**Introduction**

1. a) Montrer que  $F(q)$  est un sous-espace vectoriel de  $C^0([0,1], \mathbb{R})$ .  
 b) Pour toute fonction  $f$  de  $C^0([0,1], \mathbb{R})$ , on définit la fonction  $\Phi(f)$  par :

$$\Phi(f) : t \in [0,1] \mapsto \int_0^t (t-u)q(u)f(u)du.$$

Vérifier que l'application  $\Phi$ , qui à  $f$  associe  $\Phi(f)$ , est un endomorphisme de  $C^0([0,1], \mathbb{R})$ .

- c) Montrer que  $\Phi(f)$  appartient à  $C^2([0,1], \mathbb{R})$  et calculer  $[\Phi(f)]'$  et  $[\Phi(f)]''$ .  
 d) En déduire pour toute fonction  $f$  de  $C^0([0,1], \mathbb{R})$  :  
 ( $f$  appartient à  $F(q)$  et vérifie :  $f(0) = f'(0) = 0$ ) si et seulement si  $(\Phi(f) = f)$ .
2. Soit  $f$  dans  $C^0([0,1], \mathbb{R})$ . On définit la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par  $f_0 = f$  et, pour tout  $n$  entier naturel,  $f_{n+1} = \Phi(f_n)$ .  
 a) Montrer que :  $\forall t \in [0,1], |f_n(t)| \leq \|q\|_\infty \|f_0\|_\infty \frac{t^n}{n!}$ .  
 b) En déduire que, pour tout  $t$  de  $[0,1]$ , la suite  $(f_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0.  
 c) Montrer alors que si  $f$  appartient à  $F(q)$  et vérifie :  $f(0) = f'(0) = 0$ , alors  $f$  est nulle.  
 d) Montrer que l'application  $\Delta : \begin{cases} F(q) \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ f \mapsto (f(0), f'(0)) \end{cases}$  est linéaire et injective. Que peut-on en déduire pour la dimension de  $F(q)$ ?

**Partie I : l'espace  $E_a(\omega)$ .**

Soient  $\omega$  une fonction continue sur le segment  $[0,1]$  et à valeurs réelles strictement positives et  $a$  un nombre réel. On note :

$$E_a(\omega) = \{f \in C^2([0,1], \mathbb{R}) / \forall t \in [0,1], f''(t) = -a\omega(t)f(t) \text{ et } f(0) = f(1) = 0\}.$$

3. a) Montrer que  $E_a(\omega)$  est un sous-espace vectoriel de  $C^0([0,1], \mathbb{R})$ .  
 b) Un exemple élémentaire : le cas  $a = 0$ . Décrire  $E_0(\omega)$ .
4. Un exemple constructif : le cas  $\omega$  est la fonction constante 1.  
 a) Pour  $a$  strictement négatif, remarquer que  $t \mapsto \exp(\sqrt{-a}t)$  et  $t \mapsto \exp(-\sqrt{-a}t)$  sont dans  $F(-a)$ . En déduire  $E_a(1)$  pour  $a$  strictement négatif.  
 b) Pour  $a$  strictement positif, remarquer que  $t \mapsto \cos(\sqrt{a}t)$  et  $t \mapsto \sin(\sqrt{a}t)$  sont dans  $F(-a)$ . Décrire  $E_a(1)$  pour  $a$  strictement positif en discutant suivant la nature du nombre réel  $\sqrt{a} / \pi$ .

5. On revient au cas général, montrer que :  $\dim(E_a(\omega)) \leq 1$ . On pourra faire intervenir encore l'application  $\Delta$ .
6. Montrer que : si  $E_a(\omega)$  n'est pas réduit à  $\{0\}$ , alors  $a$  est strictement positif (on pourra introduire  $\int_0^1 (f'(t))^2 dt$ ).
7. Lorsque  $f$  et  $g$  sont deux fonctions continues sur le segment  $[0,1]$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , on pose :  $\langle f|g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\omega(t)dt$ . Vérifier que cela définit bien un produit scalaire sur  $C^0([0,1], \mathbb{R})$ .

Dans toute la suite du problème, l'espace  $C^0([0,1], \mathbb{R})$  est muni de ce produit scalaire.

Pour  $f$  dans  $C^0([0,1], \mathbb{R})$ , on note :  $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f|f \rangle} = \sqrt{\int_0^1 (f(t))^2 \omega(t)dt}$ .

8. Si  $a$  et  $b$  sont deux nombres réels distincts, montrer que  $E_a(\omega)$  et  $E_b(\omega)$  sont orthogonaux.

### Partie II : l'exemple $\omega = 1$ .

Dans cette partie,  $\omega$  est la fonction constante 1 et  $p$  est un entier supérieur ou égal à 2.

Pour tout  $k$  entier naturel non-nul, on note  $\psi_k$  la fonction définie par :

$$\psi_k : t \in [0,1] \mapsto \sqrt{2} \sin(k\pi t).$$

9. a) Vérifier qu'il existe un nombre réel  $a$  strictement positif tel que  $\psi_k$  appartienne à  $E_a(1)$ .  
 b) Pour tout couple  $(k, l)$  dans  $(\mathbb{N}^*)^2$ , calculer :  $\langle \psi_k | \psi_l \rangle = \int_0^1 \psi_k(t)\psi_l(t)dt$ .  
 c) On note  $G$  le sous-espace vectoriel de  $C^0([0,1], \mathbb{R})$  engendré par  $(\psi_1, \dots, \psi_p)$ . Vérifier que  $C = (\psi_1, \dots, \psi_p)$  est une base orthonormée de  $G$ .

10. Pour  $g$  élément de  $G$ , on définit la fonction  $u(g)$  par : pour tout  $t \in [0,1]$ ,

$$(u(g))(t) = 2 \cos(\pi t) g(t) - \left( \int_0^1 g(x) \psi_p(x) dx \right) \psi_{p+1}(t).$$

- a) Montrer que  $u : g \mapsto u(g)$  est un endomorphisme de  $G$ .  
 b) Ecrire la matrice de  $u$  dans la base  $C$ . Justifier que  $u$  est diagonalisable.
11. a) Vérifier que, pour  $g$  élément de  $G$  :  $\langle g | u(g) \rangle = 2 \int_0^1 \cos(\pi t) g^2(t) dt$ .  
 b) Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $u$ , montrer d'abord que  $\lambda$  appartient au segment  $[-2, 2]$ . Vérifier ensuite que  $\lambda$  ne vaut ni 2 ni  $-2$  (on pourra raisonner par l'absurde).
12. Soient  $\lambda$  une valeur propre de  $u$  et  $\theta$  un nombre réel de  $]0, \pi[$  tel que :  $\lambda = 2 \cos(\theta)$ , on note  $\psi$  un vecteur propre associé. Il existe un  $p$ -uplet de nombres réels  $(x_1, \dots, x_p)$  tel que :  

$$\psi = \sum_{k=1}^p x_k \psi_k.$$
 On pose  $x_0 = x_{p+1} = 0$ .  
 a) Vérifier que, pour tout  $k$  dans  $[[1, p]]$ ,  $x_{k+1} - 2 \cos(\theta) x_k + x_{k-1} = 0$ .

b) En déduire l'existence d'un couple  $(A, B)$  de nombres réels tel que, pour tout  $k$  dans  $\llbracket 0, p+1 \rrbracket$ ,  $x_k = A \cos(k\theta) + B \sin(k\theta)$ .

c) Justifier que  $A$  est nul et qu'il existe  $s$  dans  $\llbracket 1, p \rrbracket$  tel que :  $\theta = \frac{s\pi}{p+1}$ .

d) En déduire les valeurs propres de  $u$  et une base de vecteurs propres de  $u$ .

**Partie III : l'hypothèse  $(H_\omega)$ .**

On revient au cas général :  $\omega$  est une fonction continue sur le segment  $[0,1]$  et à valeurs réelles strictement positives. On note  $(H_\omega)$  l'hypothèse : Il existe une suite bornée  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de réels strictement positifs, deux à deux distincts, telle que, pour tout entier  $n$ ,  $E_{a_n}(\omega)$  n'est pas réduit à  $\{0\}$ .

13. L'hypothèse  $(H_\omega)$  est-elle vérifiée si  $\omega$  est la fonction constante 1 ? Justifier la réponse.

On se propose de démontrer, par l'absurde, que cette hypothèse n'est jamais réalisée. Ainsi, on suppose qu'il existe  $\omega$  une fonction continue sur le segment  $[0,1]$  et à valeurs réelles strictement positives telle que l'hypothèse  $(H_\omega)$  est réalisée ; on note  $a$  un nombre réel positif et  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de nombres réels deux à deux distincts, tels que, pour tout entier  $n$  :  $E_{a_n}(\omega) \neq \{0\}$  et  $0 < a_n \leq a$ .

14. Justifier l'existence d'une suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $C^0([0,1], \mathbb{R})$  vérifiant :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n \in E_{a_n}(\omega)$  et  $\int_0^1 (f_n(t))^2 \omega(t) dt = 1$ . Une telle suite est ainsi fixée jusqu'à la fin du problème.

15. Soit  $\varphi$  dans  $C^0([0,1], \mathbb{R})$ . Pour tout  $n$  entier naturel, on note :

$$c_n(\varphi) = \int_0^1 f_n(t) \varphi(t) \omega(t) dt \text{ et } S_n(\varphi) = \sum_{k=0}^n c_k(\varphi) f_k.$$

a) Que représente  $S_n(\varphi)$  ?

b) Vérifier que, pour tout  $n$  entier naturel :  $\|S_n(\varphi)\|_2^2 = \sum_{k=0}^n (c_k(\varphi))^2$  et  $\sum_{k=0}^n (c_k(\varphi))^2 \leq \|\varphi\|_2^2$ .

c) Que peut-on dire de la série  $\sum_{n \geq 0} (c_n(\varphi))^2$  ?

d) En déduire :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(t) \varphi(t) \omega(t) dt = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n''(t) \varphi(t) dt = 0$ .

16. a) Soit  $x$  un nombre réel fixé dans le segment  $[0,1]$ . On définit la fonction  $\varphi_x$  par :

$$\varphi_x : t \in [0,1] \mapsto \begin{cases} t(x-1) & \text{si } t \in [0, x] \\ x(t-1) & \text{si } t \in ]x, 1] \end{cases}. \text{ Vérifier que } \varphi_x \text{ est un élément de } C^0([0,1], \mathbb{R}).$$

b) Rappeler la formule de Taylor avec reste intégral appliquée à  $f_n$  à l'ordre 1 entre 0 et  $x$ .

Vérifier que :  $f_n(x) = x f_n'(0) + \int_0^x (x-t) f_n''(t) dt$ , puis :  $f_n'(0) = -\int_0^1 (1-t) f_n''(t) dt$ .

c) En déduire :  $f_n(x) = \int_0^1 \varphi_x(t) f_n^n(t) dt$  et conclure :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$ .

d) Remarquer :  $f_n(x) = -a_n \langle \varphi_x | f_n \rangle$ , en déduire :  $|f_n(x)| \leq a \|\varphi_x\|_2$ .

e) Calculer  $\int_0^1 (\varphi_x(t))^2 dt$ , en déduire :  $|f_n(x)| \leq ax(1-x) \sqrt{\frac{\|\omega\|_\infty}{3}}$ .

f) Justifier :  $|f_n'(0)| \leq a \sqrt{\frac{\|\omega\|_\infty}{3}}$ .

g) Rappeler pourquoi on a :  $f_n'(x) = f_n'(0) - a_n \int_0^x \omega(t) f_n(t) dt$  et en déduire alors :

$$|f_n'(x)| \leq a \sqrt{\frac{\|\omega\|_\infty}{3}} \left( 1 + \frac{a}{4} \|\omega\|_\infty \right).$$

17. On note  $C = a \sqrt{\frac{\|\omega\|_\infty}{3}} \left( 1 + \frac{a}{4} \|\omega\|_\infty \right)$  (on remarque que  $C$  est un nombre réel strictement positif).

Déduire des questions précédentes :  $\forall (x, y) \in [0, 1]^2, \forall n \in \mathbb{N}, |f_n(x) - f_n(y)| \leq C|x - y|$ .

18. Soit  $\varepsilon$  un nombre réel strictement positif, on choisit  $N$  un entier naturel non-nul tel que :  $\frac{1}{N} \leq \frac{\varepsilon}{2C}$  et on pose, pour  $k$  dans  $\llbracket 0, N \rrbracket$  :  $\alpha_k = \frac{k}{N}$ .

a) Justifier qu'il existe un entier naturel  $p$  tel que :  $\forall n \geq p, \forall k \in \llbracket 0, N \rrbracket, |f_n(\alpha_k)| < \frac{\varepsilon}{2}$ .

b) Soit alors  $x$  un nombre réel fixé dans le segment  $[0, 1]$ . En introduisant un entier  $k$  de  $\llbracket 0, N - 1 \rrbracket$  tel que :  $x \in [\alpha_k, \alpha_{k+1}]$ , montrer que :  $\forall n \geq p, |f_n(x)| < \varepsilon$ .

c) En déduire :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_\infty = 0$ .

d) Montrer alors :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 (f_n(t))^2 \omega(t) dt = 0$  et conclure.

# CORRIGÉ

Par Jean-Louis Roque, professeur au lycée Pasteur à Neuilly-sur-Seine, et external lecturer à ESSEC Business School.

Soit  $k \in \mathbb{N}$ . C'est un peu vexant — voire déshonorant ! — de donner à  $\mathcal{C}^k([0, 1], \mathbb{R})$  le simple titre d'*ensemble* alors qu'il est en réalité beaucoup plus que cela. Il s'agit en effet d'un *espace vectoriel* réel, sous-espace vectoriel de l'espace  $\mathbb{R}^{[0,1]}$  de toutes les applications de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  et sur une carte de visite cela change tout.

En outre, ces sous-espaces sont, un peu comme les poupées russes, emboîtés les uns dans les autres en ce sens que

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \mathcal{C}^{k+1}([0, 1], \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^k([0, 1], \mathbb{R})$$

ces inclusions étant d'ailleurs *strictes* comme le rappelle la culture de *classe* que doit posséder tout un chacun. Nous ne le répéterons plus !

## Introduction

1.a. Nous allons naturellement utiliser la méthode du plongement. Il est bien connu que dans cette perspective plus on *zoome*, moins il y a de travail et c'est la raison pour laquelle et si cela ne dérange personne bien sûr, nous allons plutôt établir que  $F(q)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$ . *Here we go !*

- Le plongement

$$F(q) \subset \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$$

semble faire partie de la définition du *left hand side*, alors que le *right* est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel puisque nous venons à l'instant de le mettre en avant.

- La fonction nulle appartient ouvertement à  $F(q)$  et ce dernier n'a donc plus peur du vide.

- Soit  $f$  et  $g$  deux éléments de  $F(q)$  et  $\lambda$  un nombre réel. La linéarité de la dérivation seconde assurant que

$$(f + \lambda g)'' = f'' + \lambda g''$$

c'est alors sans aucune difficulté que l'on parvient à

$$(f + \lambda g)'' = q(f + \lambda g)$$

et  $F(q)$  est définitivement un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$  et comme disent les poupées russes, il l'est *a fortiori* de  $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$  puisque tel est le bon vouloir du texte.

- b. Nous devons impérativement nous organiser en deux temps.

- Soit  $f$  une fonction continue sur le segment  $[0, 1]$  et  $t$  un élément de ce dernier. Au vu et au su de ce qui a été supposé de la fonction  $q$  et des *généreux* théorèmes généraux, la fonction

$$u \mapsto (t - u)q(u)f(u)$$

est assurément continue sur le segment  $[0, t]$  ce qui, depuis la classe de terminale scientifique, oblige l'existence de son intégrale sur le dit segment. Il en résulte alors déjà que  $\Phi(f)$  est une *application* de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ , mais l'affaire est loin d'être terminée puisque nous devons dorénavant causer de continuité. Les *aficionados* des fonctions dites « définies par une intégrale » — les fameuses *dpi* pour les intimes — savent qu'il faut être très prudent puisque notre *dpi*  $\Phi(f)$  comporte la variable  $t$  à l'intérieur de l'intégrande

et que, pauvre préparatoire que nous sommes, nous ne disposons d'*aucun* théorème général donnant un accès direct à la classe de  $\Phi(f)$ . Il est d'ailleurs fortement déconseillé d'en inventer !

La seule façon de s'en sortir est de remarquer que, très linéairement, l'on a

$$\forall t \in [0, 1] \quad \Phi(f)(t) = t \int_0^t q(u)f(u)du - \int_0^t u q(u)f(u)du \quad (1)$$

et que le fameux «  $t$  » qui était *inside* est désormais passé *outside* ce qui arrange bien nos affaires. En effet, grâce au théorème de Gaston Darboux et aux continuités des unes et des autres nous sommes en mesure de clamer que les deux applications

$$t \longmapsto \int_0^t q(u)f(u)du \quad \text{et} \quad t \longmapsto \int_0^t u q(u)f(u)du$$

sont, sur l'intervalle  $[0, 1]$ , des *primitives* respectives des applications continues

$$u \longmapsto q(u)f(u) \quad \text{et} \quad u \longmapsto u q(u)f(u)$$

Primitives de fonctions continues sur  $[0, 1]$  obligent, il s'agit d'applications de classe  $\mathcal{C}^1$  sur le segment  $[0, 1]$  ce qui, *via* l'égalité (1), permet de revendiquer *généreusement* la classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, 1]$  de  $\Phi(f)$ . Cette dernière est donc *a fortiori* continue sur notre segment et par conséquent  $\Phi$  applique bien  $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$  dans lui-même.

– Quant à la linéarité de  $\Phi$ , elle se déduit mentalement de celle de l'intégration et nous pouvons donc passer à la suite.

↑ Nous rappelons que, pour démontrer que *machin* est une application linéaire de *truc* dans *chose*, il est nécessaire de procéder en deux temps :

– il faut *impérativement* commencer par démontrer que *machin* applique véritablement *truc* dans *chose* ;

– il faut *ensuite* établir la linéarité de *machin*.

La faute grave la plus fréquente consiste à *zapper* le côté « application » et à ne traiter que la linéarité et si l'on en croit ce qui vient de se passer — 25 lignes pour établir le côté application contre une misérable ligne pour la linéarité — on imagine bien le nombre de points récoltés...

Il existe aussi des genres de gougnafiers qui traitent l'aspect « application » *après* la linéarité ! Quelle détresse...

c. Soit à nouveau  $f$  une fonction continue sur  $[0, 1]$ . Nous venons grâce à l'égalité (1) de justifier déjà la classe  $\mathcal{C}^1$  de  $f$  et comme la dérivation des primitives n'est pas plus difficile à réaliser que la quadrature du carré, l'on trouve aisément que

$$\forall t \in [0, 1] \quad [\Phi(f)]'(t) = \int_0^t q(u)f(u)du + tq(t)f(t) - tq(t)f(t)$$

ce qui après une belle simplification se décline en

$$\forall t \in [0, 1] \quad [\Phi(f)]'(t) = \int_0^t q(u)f(u)du$$

Cela démontre que  $[\Phi(f)]'$  est précisément la première des deux primitives rencontrées quelques lignes plus haut et voilà donc que  $[\Phi(f)]'$  est aussi de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, 1]$ .

Autant dire alors que  $\Phi(f)$  est effectivement de classe  $\mathcal{C}^2$  sur le segment  $[0, 1]$  et que, dérivée de primitive *again*, l'on a

$$\forall t \in [0, 1] \quad [\Phi(f)]''(t) = q(t)f(t)$$

ce qui peut également et fonctionnellement s'écrire

$$[\Phi(f)]'' = qf$$

*d.* Soit encore  $f$  une application continue sur  $[0, 1]$ . Le « si, et seulement si » nous oblige à une organisation en aller-retour. *Here we go!*

– Supposons tout d'abord que

$$\Phi(f) = f$$

Ce que nous venons d'apprendre à l'instant à propos de la classe de  $\Phi(f)$  et de ses deux premières dérivées se transmet donc à  $f$  qui se voit donc contrainte à la classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $[0, 1]$  ainsi qu'à l'égalité

$$f'' = qf$$

et voilà donc déjà que  $f$  appartient à  $F(q)$ . En outre, en ouvrant grand les mirettes, et en profitant des expressions de  $\Phi(f)$  et de sa dérivée première, il apparaît lumineusement que

$$\Phi(f)(0) = [\Phi(f)]'(0) = 0$$

informations qui elles aussi se transmettent dans la foulée à  $f$ . *So...*

– Supposons réciproquement que

$$f \in F(q) \quad \text{et} \quad f(0) = f'(0) = 0$$

et annonçons un réel  $t$  dans le segment  $[0, 1]$ . Comme  $f$  est par hypothèse de classe  $\mathcal{C}^2$  sur le segment  $[0, 1]$  elle l'est, *a fortiori*, sur le segment  $[0, t]$  et nous avons alors tout loisir de lui appliquer la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1 entre 0 et  $t$ . *This exactly yields*

$$f(t) = f(0) + tf'(0) + \int_0^t (t-u)f''(u)du$$

égalité qui, *because*

$$f'' = qf \quad \text{et} \quad f(0) = f'(0) = 0$$

se métamorphose en

$$f(t) = \int_0^t (t-u)q(u)f(u)du$$

Cette égalité permet au *physio* de revendiquer

$$f(t) = \Phi(f)(t)$$

et comme cela vaut pour *tous* les réels  $t$  de  $[0, 1]$ ...

† À bien y regarder, nous venons d'établir que

$$E_1(\Phi) = \left\{ f \in F(q) \mid f(0) = f'(0) = 0 \right\}$$

Affaire à suivre...

2. Nous remarquons juste pour causer que *due to the ambient endomorphie* la suite  $(f_n)$  est parfaitement définie et que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f_n = \Phi^n(f)$$

a. Nous allons procéder par induction sur  $n$ .

• L'initialisation ne devrait pas poser de réel problème puisque, *maximalement*, il ne fait aucun doute que

$$\forall t \in [0, 1] \quad |f(t)| \leq \|f\|_\infty$$

• Supposons désormais que, pour un entier  $n \in \mathbb{N}$ , l'on ait

$$\forall u \in [0, 1] \quad |f_n(u)| \leq \|q\|_\infty^n \|f\|_\infty \frac{u^n}{n!}$$

et annonçons  $t \in [0, 1]$  à telle enseigne que

$$f_{n+1}(t) = \int_0^t (t-u)q(u)f_n(u)du$$

Vu l'idéale position des bornes d'intégration, l'inégalité du triangle dégage déjà la majoration

$$|f_{n+1}(t)| \leq \int_0^t (t-u)|q(u)||f_n(u)|du$$

puisque, *as usual*, les quantités déjà positives sont dispensées de valuation. Nous mettons alors en avant les points suivants :

– c'est encore une fois très *maximalement* que nous avons

$$\forall u \in [0, t] \quad |q(u)| \leq \|q\|_\infty$$

– c'est ensuite l'hypothèse de récurrence qui prend le relais et qui livre sur un plateau

$$\forall u \in [0, t] \quad |f_n(u)| \leq \|q\|_\infty^n \|f\|_\infty \frac{u^n}{n!}$$

– il ne fait aucun doute que

$$\forall u \in [0, t] \quad 0 \leq t-u \leq 1$$

– les bornes de l'intégrale n'ont pas changé d'âne.

C'est cette fois grâce à la croissance et à la linéarité de l'intégration que nous en déduisons l'inégalité

$$\int_0^t (t-u)|q(u)||f_n(u)|du \leq \|q\|_\infty^{n+1} \|f\|_\infty \int_0^t \frac{u^n}{n!} du$$

et l'affaire se termine alors transitivement grâce à un mental calcul d'intégrale laissé à la sagacité du valeureux lecteur.

¶ Indiquons cependant que le calcul en question utilise fortement la *stricte* positivité avérée du nombre  $n+1$  qui autorise d'une part sa présence au dénominateur ainsi que l'égalité(\*)

$$0^{n+1} = 0$$

b. Soit  $t$  appartenant à  $[0, 1]$ . En liaison avec l'étude des séries exponentielles, le potache de première année a obligatoirement rencontré la limite

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \frac{a^n}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

et comme  $\|f\|_\infty$  n'est qu'une misérable constante, il ne peut s'opposer à

$$\|f\|_\infty \frac{(\|q\|_\infty t)^n}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Le reste n'est alors qu'une histoire de *squeezing process*

c. Selon la récente question 1.d il revient au même de supposer que

$$\Phi(f) = f$$

d'où l'on déduit officiellement et sans autre forme de procès que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f_n = \Phi^n(f) = f$$

La conclusion de la précédente devient donc ici

$$\forall t \in [0, 1] \quad f(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

et il en ressort évidemment que

$$\forall t \in [0, 1] \quad f(t) = 0$$

puisque les suites *constantes* de limite nulle...

¶ En tenant compte de la remarque que nous avons faite à l'issue de la question 1.d voilà donc que

$$E_1(\Phi) = \{0\}$$

(\*) Il faut toujours se méfier comme de la peste des sournois  $0^0$  qui peuvent parfois polluer certains calculs !

et nous apprenons ainsi que 1 n'est pas une valeur propre de l'endomorphisme  $\Phi$ .

d. Organisons-nous *un poquítín*.

- Soit  $f$  appartenant à  $F(q)$ . Vu la classe des éléments de ce dernier, le couple

$$(f(0), f'(0))$$

est totalement d'actualité et il appartient ouvertement à  $\mathbb{R}^2$ . Autant dire déjà que  $\Delta$  applique bien  $F(q)$  dans  $\mathbb{R}^2$ .

– La linéarité de  $\Delta$  repose principalement sur celle de la dérivation et accessoirement sur les *définitions* des opérations sur les fonctions.

- Soit  $f$  un élément du noyau de  $\Delta$ . Cela ne signifie ni plus ni moins que

$$f \in F(q) \quad \text{et} \quad f(0) = f'(0) = 0$$

La précédente oblige alors  $f = 0$ , chronique d'une injectivité annoncée...

En ce qui concerne le « que peut-on en déduire » nous nous proposons de jouer aux devinettes en demandant à notre sagace lecteur de choisir entre

$$\dim F(q) = \pi \quad \text{ou} \quad \dim F(q) \leq 2$$

en pensant à un certain théorème de monsieur *durang*...

### Partie 1

3. À bien y regarder, il semble bien que

$$E_a(\omega) = \left\{ f \in F(-a\omega) \mid f(0) = f(1) = 0 \right\}$$

a. C'est un peu comme au 1.a. On montre en réalité — *zoom, zoom!* — que  $E_a(\omega)$  est un sous-espace vectoriel de  $F(-a\omega)$  et on joue encore aux poupées russes. Nous laissons au dévoué lecteur le soin de se charger de l'intendance.

b. Soit  $f$  appartenant à  $E_0(\omega)$ . Nous avons par définition

$$\forall t \in [0, 1] \quad f''(t) = 0 \quad \text{et} \quad f(0) = f(1) = 0$$

Comme  $[0, 1]$  est un *intervalle* de  $\mathbb{R}$ , la première partie de cette propriété entraîne tout d'abord que  $f'$  est constante d'où il ressort que  $f$  est affine. La seconde partie révèle quant à elle que notre fonction affine s'annule deux fois ce qui ne lui laisse que peu d'avenir... Nous avons fatalement

$$f = 0$$

Comme  $E_0(\omega)$  est un espace vectoriel, il contient bien sûr la fonction nulle et le résultat des courses est ainsi

$$E_0(\omega) = \{0\}$$

4. Comme il va être fortement question de l'espace vectoriel  $F(-a)$ , nous nous permettons une petite digression. Soit  $f$  un élément de  $F(-a)$ . Il s'agit, *a priori*, d'une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $[0, 1]$  qui vérifie

$$f'' = -af$$

genre d'équation différentielle qui va totalement emballer l'affaire. En effet, comme  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ , il en est de même de  $f''$  et voilà donc que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^4$ . C'est reparti pour un tour puisque  $f''$  est alors de classe  $\mathcal{C}^4$  ce qui procure à  $f$  la classe  $\mathcal{C}^6$  and so one... De là à en déduire que  $f$  est en réalité de classe  $\mathcal{C}^\infty$  il n'y a qu'un tout petit pas, certes inductif mais cependant mental, que nous franchissons allégrement.

Comme  $f'' = -af$ , il est désormais possible d'en déduire que

$$f''' = -af'$$

ce qui montre que  $f'$  est également élément de  $F(-a)$ . Comme la dérivation  $D$  est bien connue pour sa sempiternelle linéarité, nous déduisons de tout cela que  $D$  est un endomorphisme de l'espace vectoriel  $F(-a)$  et nous arrêtons là nos tergiversations !

*a.* Supposons  $a < 0$ . Si cela ne dérange personne, nous noterons  $e_a$  et  $\epsilon_a$  les deux fonctions en question et nous signalons tranquillement que leur appartenance à  $F(-a)$  n'est qu'une pure formalité les essentielles raisons étant les égalités

$$D(e_a) = \sqrt{-a}e_a \quad ; \quad D^2(e_a) = -ae_a \quad \text{et} \quad D(\epsilon_a) = -\sqrt{-a}\epsilon_a \quad ; \quad D^2(\epsilon_a) = -a\epsilon_a$$

Le point clé concerne maintenant la famille fonctionnelle  $(e_a, \epsilon_a)$  qui selon la première et la troisième des quatre égalités précédentes est ouvertement formée de vecteurs propres de la dérivation  $D$  attachés aux valeurs propres respectives

$$\sqrt{-a} \quad \text{et} \quad -\sqrt{-a}$$

qui sont pour le moins *différentes* vu que  $a$  est ici *strictement* négatif. Un superbe théorème officiel assure que notre famille est *libre* et par conséquent

$$\dim F(-a) \geq 2$$

alors qu'il a été récemment découvert — question 2.d — que

$$\dim F(-a) \leq 2$$

Il s'avère en bref que  $F(-a)$  est un *plan vectoriel* et que  $(e_a, \epsilon_a)$  en est une base, en remerciant au passage le théorème de caractérisation des bases en dimension finie. On peut dorénavant résumer cette belle histoire *via* la *basique* présentation

$$F(-a) = \text{Vect}(e_a, \epsilon_a)$$

Nous pouvons maintenant poursuivre.

Soit  $f$  appartenant à  $E_a(1)$ . Cette fonction appartient aussi par définition à  $F(-a)$  et, base oblige, il existe deux réels  $\lambda$  et  $\mu$  tels que

$$f = \lambda e_a + \mu \epsilon_a$$

Il est également dit que  $f$  s'annule en zéro et en un et cela se traduit par le système

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda e^{\sqrt{-a}} + \mu e^{-\sqrt{-a}} = 0 \end{cases}$$

Comme  $a$  est différent de zéro ce système est mentalement(\*) de Cramer et fatalement

$$\lambda = \mu = 0$$

Autant dire alors que  $f$  est nulle et comme l'autre inclusion est *vectoriellement* triviale *the conclusion is*

$$E_a(1) = \{0\}$$

b. Supposons  $a > 0$ . Nous notons cette fois  $c_a$  et  $s_a$  les deux applications concernées. Elles appartiennent bien à  $F(-a)$  la principale raison reposant ici sur les égalités

$$D^2(c_a) = -ac_a \quad \text{et} \quad D^2(s_a) = -as_a$$

Pour ne pas changer une équipe qui gagne nous aimerions empocher la liberté de la sainte famille  $(c_a, s_a)$  mais le superbe argument de la précédente tombe à l'eau ! Il s'agit certes de deux vecteurs propres de  $D^2$  mais associés à la *même* valeur propre...

Nous devons donc procéder autrement et pourquoi pas *via* la définition. Supposons donc que  $\alpha$  et  $\beta$  soient deux réels vérifiant

$$\alpha c_a + \beta s_a = 0 \quad (\text{TL})$$

– on évalue (TL) en zéro, on obtient  $\alpha = 0$  et le test de liberté devient

$$\beta s_a = 0$$

– on évalue maintenant en  $\pi/(2\sqrt{a})$  et voilà que  $\beta$  est également nul.

Grâce à cette providentielle liberté, l'on démontre *mutatis mutandis* que

$$F(-a) = \text{Vect}(c_a, s_a)$$

et nous pouvons alors poursuivre.

Soit  $f$  appartenant à  $E_a(1)$ . Il existe comme *supra* deux réels, mettons encore  $\lambda$  et  $\mu$ , tels que

$$f = \lambda c_a + \mu s_a$$

et il est dit d'office que  $f$  doit s'annuler en zéro et en un, ce qui se traduit ici simplement par

$$\lambda = 0 \quad \text{et} \quad \mu \sin \sqrt{a} = 0$$

Dans ces circonstances, nous avons de deux choses l'une :

– ou bien  $\sin \sqrt{a}$  n'est pas nul auquel cas  $\mu = 0$ , puis

$$f = 0$$

---

(\*) Que vaut le déterminant de ce système linéaire ?

et l'on déduit alors que

$$E_a(1) = \{0\}$$

vu que l'autre inclusion...

– ou bien  $\sin \sqrt{a}$  est nul et nous apprenons alors bêtement que

$$f \in \text{Vect } s_a$$

Dans ce deuxième cas nous avons ainsi

$$E_a(1) \subset \text{Vect } s_a$$

et nous laissons au dévoué lecteur le soin de vérifier très tranquillement l'autre inclusion à telle enseigne qu'*in fine*

$$E_a(1) = \text{Vect } s_a$$

Nous rappelons pour finir que les points d'annulation de la fonction  $\sin$  sont *exactement* les  $k\pi$  où  $k$  est un entier, c'est-à-dire un élément de  $\mathbb{Z}$ .

On peut donc reformuler nos conclusions en termes de « *nature* » en assénant que

$$E_a(1) = \begin{cases} \{0\} & \text{si } \sqrt{a}/\pi \text{ n'est pas un entier.} \\ \text{Vect } s_a & \text{si } \sqrt{a}/\pi \text{ est un entier.} \end{cases}$$

5. Considérons la restriction  $\delta_a$  de l'opérateur  $\Delta$  au sous-espace  $E_a(\omega)$  de l'espace vectoriel  $F(-a\omega)$ . Les habitués des restrictions — non budgétaires ! — savent que  $\delta_a$  est encore une application *linéaire et injective* mais de  $E_a(\omega)$  dans  $\mathbb{R}^2$ . Comme les éléments de  $E_a(\omega)$  s'annulent en zéro il est indéniable que

$$\text{Im } \delta_a \subset \{0\} \times \mathbb{R}$$

et nous espérons ne choquer personne en balançant que

$$\dim(\{0\} \times \mathbb{R}) = 1$$

Comme *supra* et toujours avec l'aide du *sieur durang*, il ne fait plus aucun doute que

$$\dim E_a(\omega) \leq 1$$

et tout le monde est ravi.

6. La supposition faite par le texte permet de disposer d'une fonction *non nulle*  $f$  située dans l'espace vectoriel  $E_a(\omega)$  et précipitons-nous sur l'intégrale

$$\int_0^1 f'^2$$

qui, parce que  $f'$  est continue sur le *segment*  $[0, 1]$ , mène une paisible existence. Considérons dans la foulée les fonctions

$$u = f' \quad \text{et} \quad v = f$$

Vu les origines de classe de  $f$ , elles sont toutes les deux de classe  $C^1$  sur  $[0, 1]$  et l'on a

$$u' = f'' \quad \text{et} \quad v' = f'$$

Le théorème d'intégration *by parts* est alors formel. Nous avons sans détour

$$\int_0^1 f'^2 = [f'f]_0^1 - \int_0^1 f''f$$

égalité qui, vu que par hypothèse

$$f(0) = f(1) = 0 \quad \text{et} \quad f'' = -a\omega f$$

se métamorphose tout simplement en

$$\int_0^1 f'^2 = a \int_0^1 f^2 \omega$$

la linéarité de l'intégration ayant eu un *picochouia* de mots à dire. Nous faisons alors valoir deux choses :

– la fonction  $f'^2$  étant positive ou nulle et vu la gentille disposition des bornes, nous avons déjà

$$\int_0^1 f'^2 \geq 0$$

puisque l'intégration est bien connue pour sa positivité ou sa croissance ;

– le second point mérite un peu plus d'attention ;

– les bornes d'intégration sont dans les sens croissant *strict* ;

– la fonction  $f^2\omega$  est *continue et positive ou nulle* sur  $[0, 1]$  ;

– la fonction  $f^2\omega$  n'est pas identiquement nulle puisqu'il est stipulé que  $f$  ne l'est pas et que l'application  $\omega$  ne s'annule *jamais*.

Il résulte alors du théorème de *stricte* positivité d'une intégrale que

$$\int_0^1 f^2 \omega > 0$$

d'où il ressort dans la foulée que

$$a \geq 0$$

Oui mais voilà, le réel  $a$  ne peut pas être nul puisque depuis le 3.b nous savons que

$$E_0(\omega) = \{0\}$$

So...

7. Nous allons procéder en quatre points.

– Soit  $f$  et  $g$  deux applications continues sur le segment  $[0, 1]$ . Il en est *généreusement* de même du produit  $fg\omega$ , ce qui confère à son intégrale une pépère existence. Il en résulte ainsi que  $\langle , \rangle$  applique bien  $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}) \times \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$  dans  $\mathbb{R}$ .

– La symétrie n'aura droit à rien de plus que *no comment...*

– On fixe la fonction  $f$ . La linéarité de l'application

$$g \longmapsto \int_0^1 fg\omega$$

découle principalement de celle de l'intégration.

– Soit pour finir une application  $f$  *non nulle* et continue sur  $[0, 1]$ . Nous avons

$$\langle f, f \rangle = \int_0^1 f^2\omega$$

et il se trouve alors que nous venons, quelques lignes plus haut, d'établir la *stricte* positivité de cette intégrale.

Nous pouvons donc envisager la suite.

8. Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions appartenant respectivement à  $E_a(\omega)$  et  $E_b(\omega)$ . Ces appartenances se traduisent par les égalités

$$f'' = -a\omega f \quad ; \quad g'' = -b\omega g \quad ; \quad f(0) = f(1) = 0 \quad ; \quad g(0) = g(1) = 0$$

à telle enseigne que déjà

$$b\langle f, g \rangle = b \int_0^1 fg\omega = - \int_0^1 fg'' \quad \text{et} \quad a\langle f, g \rangle = a \int_0^1 fg\omega = - \int_0^1 f''g$$

Oui mais voilà, en procédant un peu comme à la question 6 mais *via* cette fois les fonctions

$$u = f \quad \text{et} \quad v = g'$$

le lecteur justifiera aisément l'intégration *por partes* amenant à

$$\int_0^1 fg'' = - \int_0^1 f'g'$$

les égalités  $f(0) = f(1) = 0$  ayant eu quelque part leur pesant d'arachide.

Grâce au magique *mutatis mutandis* il parviendra également à

$$\int_0^1 f''g = - \int_0^1 f'g'$$

le pesant provenant cette fois des égalités  $g(0) = g(1) = 0$ .

À bien y regarder il semble que nous soyons parvenus à

$$b \langle f, g \rangle = a \langle f, g \rangle$$

c'est-à-dire à

$$(b - a) \langle f, g \rangle = 0$$

et comme  $b - a$  n'est pas nul...

## Partie 2

9. Pour ne plus avoir à parler de lutte de classe nous enfonçons une fois pour toutes le clou en assénant que les applications  $\psi_k$  sont toutes de classe  $C^\infty$  sur le segment  $[0, 1]$ . Vu ce que nous avons rappelé plus haut à propos des annulations de la fonction  $\sin$ , nous constatons également que

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \psi_k(0) = \psi_k(1) = 0$$

À bon entendeur !

a. Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . Au vu et au su de ce que nous venons d'entendre et grâce au mental constat de l'égalité

$$\psi_k'' = -k^2 \pi^2 \psi_k$$

le réel  $a = k^2 \pi^2$  devrait faire l'affaire car il est ouvertement strictement positif.

b. Soit  $k$  et  $\ell$  deux entiers naturels non nuls et planifions *un poquitín*.

– Si  $k$  est différent de  $\ell$ , il est manifeste que  $k^2 \pi^2$  est différent de  $\ell^2 \pi^2$ . La précédente et la question 8 assurent alors de concert que  $\psi_k$  et  $\psi_\ell$  sont orthogonales et du coup

$$\langle \psi_k, \psi_\ell \rangle = 0$$

– Si  $k = \ell$ , nous avons cette fois

$$\langle \psi_k, \psi_k \rangle = 2 \int_0^1 \sin^2(k\pi t) dt$$

égalité que le lecteur *trigophile* transformera dans la foulée en

$$\langle \psi_k, \psi_k \rangle = \int_0^1 (1 - \cos(2k\pi t)) dt$$

puisqu'il est paraît-il bon de savoir par cœur que

$$\forall \vartheta \in \mathbb{R} \quad 2 \sin^2 \vartheta = 1 - \cos 2\vartheta$$

Comme  $k$  n'est pas nul, le calcul de l'intégrale passe par l'égalité de Barrow

$$\int_0^1 (1 - \cos(2k\pi t)) dt = \left[ t - \frac{\sin(2k\pi t)}{2k\pi} \right]_0^1$$

et il en ressort *in fine* que

$$\langle \psi_k, \psi_k \rangle = 1$$

Le fameux *delta* de Leopold Kronecker permet alors de recoller les morceaux puisque l'on a définitivement

$$\langle \psi_k, \psi_\ell \rangle = \delta_{k\ell}$$

c. La question précédente vient justement de mettre en avant l'orthonormalité de cette famille et il est bien connu que les familles orthonormales sont libres. *So...*

10. Si cela ne dérange personne nous allons noter  $\hat{u}$  l'application qui à toute fonction  $g$  simplement continue sur  $[0, 1]$  fait correspondre la fonction  $\hat{u}(g)$  définie sur  $[0, 1]$  par

$$\forall t \in [0, 1] \quad \hat{u}(g)(t) = 2 \cos(\pi t) g(t) - \left( \int_0^1 g(x) \psi_p(x) dx \right) \psi_{p+1}(t)$$

En réalité notre  $\hat{u}$  fonctionne exactement comme  $u$  mais au lieu d'agir uniquement sur  $G$ , il agit carrément sur le gros  $C^0([0, 1], \mathbb{R})$ .

Vu la continuité des unes et des autres, il est évident que  $\hat{u}$  applique le « gros » dans lui même et sa linéarité découle limpide de celle de l'intégration ainsi que de la définition des opérations sur les fonctions. En bref,  $\hat{u}$  est un endomorphisme du gros !

a. Soit  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ . Allons-voir du côté de l'image par  $\hat{u}$  de l'application  $\psi_k$ . On annonce un réel  $t$  du segment  $[0, 1]$  et le *physio* revendique alors l'égalité

$$\hat{u}(\psi_k)(t) = 2\sqrt{2} \cos(\pi t) \sin(k\pi t) - \langle \psi_k, \psi_p \rangle \psi_{p+1}(t)$$

Il faut maintenant réveiller le *trigophile* et Leopold qui nous transforment cela en

$$\hat{u}(\psi_k)(t) = \sqrt{2} \sin((k+1)\pi t) + \sqrt{2} \sin((k-1)\pi t) - \delta_{kp} \psi_{p+1}(t)$$

et il va maintenant falloir s'organiser *a little bit*.

– Si  $k = 1$ , le réel  $k - 1$  est nul et *because*  $p \geq 2$ ,  $\delta_{kp}$  l'est également. Le *physio* revendique alors l'égalité fonctionnelle

$$\hat{u}(\psi_1) = \psi_2$$

– Si  $2 \leq k \leq p - 1$ , le delta de Leopold est encore nul et le *physio* assène cette fois

$$\hat{u}(\psi_k) = \psi_{k+1} + \psi_{k-1}$$

– Si  $k = p$ , le delta vaut un et après une énorme simplification il ne reste que

$$\hat{u}(\psi_p) = \psi_{p-1}$$

Une des morales de cette histoire est que

$$\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket \quad \hat{u}(\psi_k) \in G$$

morale qui, vu l'engendrement de  $G$  par les  $\psi_k$ , assure que l'endomorphisme  $\hat{u}$  stabilise le sous-espace vectoriel  $G$ . L'opérateur  $u$  du texte n'est donc rien d'autre que l'endomorphisme de  $G$  induit par  $\hat{u}$  et est donc, à ce titre, un authentique endomorphisme de  $G$ .

b. La grande philosophie des restrictions et tout particulièrement des endomorphismes induits est l'important pour ne pas dire le crucial « non changement d'action » grâce auquel nous déduisons du récent  $a$  que

$$\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket \quad u(\psi_k) = \begin{cases} \psi_2 & \text{si } k = 1 \\ \psi_{k-1} + \psi_{k+1} & \text{si } 2 \leq k \leq p-1 \\ \psi_{p-1} & \text{si } k = p \end{cases}$$

Le protocole de « matricialisation » est alors catégorique. *No doubt that*

$$\text{Mat}_C(u) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & & & & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & & & & & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

L'endomorphisme  $u$  est donc *spectralement* diagonalisable puisque l'une de ses matrice est franchement symétrique réelle d'ordre supérieur ou égal à un.

† Nous trouvons le texte ici quelque peu timoré. Puisque  $C$  est une base orthonormale de l'espace vectoriel  $G$  et que la matrice de  $u$  dans cette orthonormale base est symétrique réelle, il s'agit en réalité d'un endomorphisme *symétrique* de  $G$  ce qui, sur la carte de visite, est beaucoup plus impressionnant qu'une banale diagonalisabilité...

11.a. Soit  $g$  appartenant à  $G$ . La bilinéarité du produit scalaire permet dans un premier temps d'écrire

$$\langle g, u(g) \rangle = 2 \int_0^1 \cos(\pi t) g^2(t) dt - \left( \int_0^1 g \psi_p \right) \langle g, \psi_{p+1} \rangle$$

puisque l'intégrale du produit  $g\psi_p$  n'est rien d'autre qu'un misérable scalaire. Oui mais voilà, la famille

$$(\psi_1, \dots, \psi_p, \psi_{p+1})$$

étant également orthonormale, on déduit naturellement que

$$\psi_{p+1} \perp \text{Vect}(\psi_1, \dots, \psi_p)$$

ce qui, vu la providentielle situation géographique de  $g$ , a la bonne idée d'entraîner l'orthogonalité de  $\psi_{p+1}$  à cette dernière. Nous avons en bref

$$\langle g, \psi_{p+1} \rangle = 0$$

et nous pouvons d'office aller de l'avant.

b. Notons bien sûr  $g$  un vecteur propre de  $u$  attaché à cette valeur propre à telle enseigne que

$$u(g) = \lambda g \quad \text{et} \quad g \neq 0$$

Il résulte alors de la bilinéarité du produit scalaire et de la question précédente que

$$\lambda \|g\|_2^2 = 2 \int_0^1 \cos(\pi t) g^2(t) dt$$

Une fois évaluée puis triangulée, nous en déduisons tout d'abord que

$$|\lambda| \cdot \|g\|_2^2 \leq 2 \int_0^1 |\cos(\pi t)| g^2(t) dt$$

puisque les quantités déjà positives... et que les bornes...

Mieux, puisque  $|\cos| \leq 1$ , que les bornes n'ont pas changé de bourricot et que l'intégration est croissante, l'on parvient carrément à

$$|\lambda| \cdot \|g\|_2^2 \leq 2 \int_0^1 g^2(t) dt \quad \text{i.e.} \quad |\lambda| \cdot \|g\|_2^2 \leq 2 \cdot \|g\|_2^2$$

Rappelons qu'il a été *proprement* précisé que  $g$  n'est pas la fonction nulle et que par conséquent

$$\|g\|_2^2 > 0$$

Une légitime simplification plus loin, nous en sommes déjà à

$$|\lambda| \leq 2$$

ce qui n'est pas pour nous déplaire. Poursuivons alors en deux temps.

– Supposons par l'absurde que  $\lambda = 2$ . Le report dans l'égalité située treize lignes plus haut et quelques tranquilles aménagements conduisent alors tranquillement à

$$\int_0^1 (1 - \cos(\pi t)) g^2(t) dt = 0$$

et nous faisons maintenant valoir que :

- les bornes d'intégration sont *différentes* ;
- la fonction intérieure est *continue* et ouvertement de *signe constant* sur  $[0, 1]$ .

Une importante contraposition stipule alors que la fonction intérieure est identiquement nulle sur notre segment, ce qui revient à dire que

$$\forall t \in [0, 1] \quad (1 - \cos(\pi t)) g^2(t) = 0$$

Le *trigophile* affûté sait parfaitement que

$$\forall t \in ]0, 1] \quad 1 - \cos(\pi t) \neq 0$$

et il en ressort que  $g$  est déjà irrémédiablement nulle sur le *semi-ouvert*  $]0, 1]$ . Oui mais voilà, la fonction  $g$  est également continue en zéro et nous sommes fortement censés savoir déduire de tout cela que  $g(0) = 0$ . *Mezamor*, la fonction  $g$  est nulle sur  $[0, 1]$ , ce qui est en totale contradiction avec son extrême propriété...

– Supposons maintenant que  $\lambda = -2$ . Nous ne prononcerons alors que les deux mots magiques que sont *mutatis et mutandis*.

12. Nous venons à l’instant d’apprendre qu’un tel  $\lambda$  appartient à l’ouvert  $] - 2, 2[$  et nul ne peut alors ignorer qu’il existe effectivement un réel  $\theta \in ]0, \pi[$  — par ailleurs unique — tel que

$$\lambda = 2 \cos \theta$$

*Everything is therefore under control !*

a. Un peu plus haut, nous avons vu passer la matrice de l’endomorphisme  $u$  dans la base  $\mathcal{C}$  et vu les dispositions prises celle du vecteur  $\psi$  dans cette même base n’est autre que la colonne ayant pour entrées les  $x_k$  où  $k$  batifole de 1 à  $p$ . Dans ces conditions, l’égalité vectorielle

$$u(\psi) = 2 \cos \theta \cdot \psi$$

devrait matriciellement se traduire par

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & & & & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & & & & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} = 2 \cos \theta \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix}$$

égalité matricielle se déclinant ensuite en un classique système linéaire qui requiert un peu d’observation.

- La première ligne de ce système est à l’évidence

$$x_2 = 2 \cos \theta x_1$$

- La toute dernière ligne est la non moins évidente

$$x_{p-1} = 2 \cos \theta x_p$$

– Les autres lignes se numérotent bien sûr de 2 à  $p - 1$  et à bien y regarder il s’avère que la  $k^{\text{ième}}$  s’écrit

$$x_{k-1} + x_{k+1} = 2 \cos \theta x_k$$

Les deux conventions  $x_0 = x_{p+1} = 0$  permettent de recoller les trois morceaux et l’on a alors effectivement

$$\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket \quad x_{k-1} + x_{k+1} = 2 \cos \theta x_k$$

b. La question précédente révèle avec force que la suite *finie*  $(x_0, x_1, \dots, x_p, x_{p+1})$  vérifie la relation de récurrence linéaire double dont le trinôme caractéristique est exactement

$$X^2 - 2 \cos \theta X + 1$$

Le discriminant de ce trinôme vaut  $-4 \sin^2 \theta$  et il est donc *strictement* négatif vu que  $\theta$  prend ses aises dans l'ouvert  $]0, \pi[$ . Le lecteur totalement *décomplexé* trouvera ensuite aisément que les deux racines du trinôme caractéristique sont

$$e^{i\theta} \quad \text{et} \quad e^{-i\theta}$$

et nous sommes alors officiellement tenus de savoir qu'il existe bien deux réels  $A$  et  $B$  tels que

$$\forall k \in \llbracket 0, p+1 \rrbracket \quad x_k = A \cos(k\theta) + B \sin(k\theta)$$

c. Procédons en deux temps.

- D'après la précédente, il semble que  $x_0 = A$  et comme  $x_0 = 0 \dots$
- Nous avons désormais

$$\forall k \in \llbracket 0, p+1 \rrbracket \quad x_k = B \sin(k\theta)$$

et nous ne perdons pas de vue que l'on a également  $x_{p+1} = 0$ . Du coup

$$B \sin((p+1)\theta) = 0$$

Imaginons alors par l'absurde que

$$\sin((p+1)\theta) \neq 0$$

Cela obligerait  $B$  à être nul et l'on aurait alors inéluctablement

$$\forall k \in \llbracket 0, p+1 \rrbracket \quad x_k = 0$$

et aussi tout particulièrement

$$\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket \quad x_k = 0 \quad \text{i.e.} \quad \psi = 0$$

égalité *proprement* inconcevable. Il en résulte ainsi que

$$\sin((p+1)\theta) = 0$$

et vu les sempiternelles annulations de la fonction  $\sin$ , il existe tout d'abord  $s \in \mathbb{Z}$  tel que

$$(p+1)\theta = s\pi \quad \text{i.e.} \quad \theta = \frac{s\pi}{p+1}$$

la division par  $p+1$  ne posant évidemment aucun problème. Pour finir, et comme nous n'avons pas oublié que  $\theta$  est emprisonné dans l'ouvert  $]0, \pi[$ , nous déclarons solennellement que l'entier  $s$  n'a pas vraiment le choix. Il doit être situé dans  $\llbracket 1, p \rrbracket$ .

d. Faisons un peu le point à propos de l'analyse que nous venons de mener depuis le tout récent a.

Nous avons *supposé* que  $\lambda = 2 \cos \theta$ , le réel  $\theta$  vérifiant  $0 < \theta < \pi$ , est une valeur propre de  $u$  et que

$$\psi = \sum_{k=1}^p x_k \psi_k$$

est un vecteur propre qui lui est attaché. Nous sommes alors parvenus à l'existence d'un entier  $s \in \llbracket 1, p \rrbracket$  ainsi que d'un réel  $B$ , tout ce petit monde vérifiant

$$\theta = \frac{s\pi}{p+1} \quad \text{et} \quad \psi = B \sum_{k=1}^p \sin \frac{k s \pi}{p+1} \cdot \psi_k$$

et il faut reconnaître que c'est une magnifique conclusion d'analyse !

*Dura lex sed lex*, nous devons penser à la synthèse ! À cet effet, pour chaque entier  $s$  appartenant à  $\llbracket 1, p \rrbracket$ , nous proposons(\*)

$$\lambda_s = 2 \cos \frac{s\pi}{p+1} \quad \text{et} \quad \Psi_s = \sum_{k=1}^p \sin \frac{k s \pi}{p+1} \cdot \psi_k$$

Comme il semble plus visuel de travailler matriciellement nous considérerons plutôt la matrice du vecteur  $\Psi_s$  dans la base  $\mathcal{C}$ , c'est-à-dire la colonne  $Y_s$  dont les entrées sont les

$$y_k = \sin \frac{k s \pi}{p+1} \quad \text{où} \quad k \in \llbracket 1, p \rrbracket$$

Tant que nous y sommes nous notons  $M$  la grosse matrice de  $u$  dans la base  $\mathcal{C}$  et nous allons traîner nos guêtres du côté de la colonne  $Z = MY_s$  dont les entrées seront évidemment notées avec la petite lettre  $z$ . On reprend alors l'organisation ligne par ligne déjà utilisée un petit peu plus haut.

– L'examen de la première ligne donne

$$z_1 = y_2 = \sin \frac{2s\pi}{p+1} = 2 \cos \frac{s\pi}{p+1} \sin \frac{s\pi}{p+1}$$

la dernière égalité procédant d'une fameuse formule de duplication. Le *physio* se réveille alors et clame

$$z_1 = \lambda_s y_1$$

– L'examen des lignes numérotées de 2 à  $p-1$  donne à son tour

$$\forall k \in \llbracket 2, p-1 \rrbracket \quad z_k = y_{k-1} + y_{k+1} = \sin \frac{(k-1)s\pi}{p+1} + \sin \frac{(k+1)s\pi}{p+1}$$

(\*) Lors d'une analyse-synthèse, dans l'analyse on suppose et dans la synthèse on propose...

égalité qui, grâce à l'une des formules de Simpson, en l'occurrence

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 \quad \sin a + \sin b = 2 \cos \frac{a-b}{2} \sin \frac{a+b}{2}$$

amène très facilement à

$$\forall k \in \llbracket 2, p-1 \rrbracket \quad z_k = \lambda_s y_k$$

– L'examen de la dernière ligne donne pour finir l'égalité

$$z_p = y_{p-1} = \sin \frac{(p-1)s\pi}{p+1}$$

que la *tricky attitude* suggère d'écrire plutôt

$$z_p = \sin \frac{(p-1)s\pi}{p+1} + \sin \frac{(p+1)s\pi}{p+1}$$

puisque l'énergumène que nous avons ajouté à droite ne vaut vraiment pas grand chose. Notre formule de Simpson fonctionne à nouveau et elle nous livre l'inespérée

$$z_p = \lambda_s y_p$$

grâce à laquelle l'histoire se termine sur l'égalité

$$MY_s = \lambda_s Y_s$$

Observons pour finir que  $y_1$  n'est assurément pas nul puisque

$$y_1 = \sin \frac{s\pi}{p+1} \quad \text{et} \quad 0 < \frac{s\pi}{p+1} < \pi$$

et la colonne  $Y_s$  vérifie dont le *never forget*

$$Y_s \neq 0$$

La traduction vectorielle de toute cette réalité ne se fait pas attendre et voilà donc que

$$u(\Psi_s) = \lambda_s \Psi_s \quad \text{et} \quad \Psi_s \neq 0$$

Autant dire alors que

$$\lambda_s \in \text{Spec } u \quad ; \quad \Psi_s \in E_{\lambda_s}(u) \quad ; \quad \Psi_s \neq 0$$

les deux dernières propriétés pouvant se décliner en disant que  $\Psi_s$  est un vecteur propre de  $u$  attaché à la valeur propre  $\lambda_s$ .

La destination est proche !

Nul ne peut réellement s'opposer à la queue leu leu que voici

$$0 < \frac{\pi}{p+1} < \frac{2\pi}{p+1} < \dots < \frac{p\pi}{p+1} < \pi$$

et il se trouve que la fonction  $\cos$  est officiellement *strictement* décroissante sur  $[0, \pi]$ . Nous en déduisons allégrement la nouvelle queue leu leu

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_p$$

inégalités *strictes* qui ont le mérite de révéler que les  $\lambda_s$  sont deux à deux distincts. Oui mais voilà, ces  $p$  réels  $\lambda_s$  sont depuis peu des valeurs de  $u$  qui est un endomorphisme opérant sur un espace dont la dimension est justement  $p$ .

Nous sommes alors tenus de savoir qu'il n'y a pas de valeurs propres ailleurs et que les sous-espaces propres de  $u$  sont des droites vectorielles. Bref :

$$\text{Spec } u = \{\lambda_1, \dots, \lambda_s\} \quad \text{et} \quad \forall s \in \llbracket 1, p \rrbracket \quad (\Psi_s) \text{ est une base de } E_{\lambda_s}(u)$$

Notons également que nous retrouvons ainsi la diagonalisabilité de  $u$  puisqu'il appartient au club très fermé — on les appelle parfois les *stars* — des endomorphismes qui, en dimension  $p$ , possèdent  $p$  valeurs propres *distinctes* et qu'il existe sur le marché une puissante condition suffisante...

Pour finir et pour répondre à la finale question il reste à dire que

$$(\Psi_1, \dots, \Psi_p)$$

est à n'en pas douter une base de  $G$  formée de vecteurs propres de  $u$ .

† Quand on s'intéresse aux éléments propres d'un endomorphisme il est d'usage de mettre en avant le spectre et les sous-espaces propres ce que ne fait pas exactement le texte. Nous réparons cet oubli *via* un *here you are* !

$$\text{Spec } u = \{\lambda_1, \dots, \lambda_s\} \quad \text{et} \quad \forall s \in \llbracket 1, p \rrbracket \quad E_{\lambda_s}(u) = \text{Vect } \Psi_s$$

### Partie 3

13. Vu le *lâius* précédant la question 14, nous savons d'emblée que la réponse sera plutôt non... *Here we go* !

Supposons donc par l'absurde que la réponse est oui et notons bien sûr  $(a_n)$  une suite ayant les propriétés *ad hoc* et profitons-en pour noter  $M$  un nombre réel vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < a_n \leq M$$

Soit alors  $n \in \mathbb{N}$ . Nous savons que  $a_n$  est strictement positif et que  $E_{a_n}(1)$  n'est pas réduit à  $\{0\}$ . La question 4.b est alors catégorique ! Elle stipule que le quotient

$$k_n = \frac{\sqrt{a_n}}{\pi}$$

doit être un entier et même carrément entier naturel non nul puisque son signe crève l'écran. Grâce à la *bornitude supra* on en déduit dans la foulée que

$$0 < k_n \leq \frac{\sqrt{M}}{\pi}$$

Notons enfin que les réels  $a_n$  sont deux à deux distincts et que c'est aussi naturellement le cas(\*) des entiers  $k_n$ . Nous disposons donc d'une *infinité* d'entiers situés dans la zone

$$\left] 0, \sqrt{M}/\pi \right]$$

ce qui n'est pas très raisonnable. Le lecteur *entièrement* dévoué à notre cause pourra d'ailleurs aisément établir que la zone en question ne contient que

$$\left\lfloor \frac{\sqrt{M}}{\pi} \right\rfloor$$

places entières...

14. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Puisque  $E_{a_n}(\omega)$  n'est pas l'espace nul, nous avons tout loisir de considérer une fonction *non nulle*  $g_n$  lui appartenant. La fonction

$$f_n = \frac{g_n}{\|g_n\|_2}$$

vérifie pratiquement par construction les deux propriétés

$$f_n \in E_{a_n}(\omega) \quad \text{et} \quad \|f_n\|_2 = 1$$

ce qui permet au *physio* de revendiquer le côté *ad hoc* de la suite  $(f_n)$

† Les  $a_n$  étant deux à deux distincts, la question 8 assure que les espaces  $E_{a_n}(\omega)$  sont deux à deux orthogonaux et il en est donc de même de nos applications  $f_n$ . En conséquence, la famille  $(f_n)$  est carrément *orthonormale* et cela se devait d'être mis en avant. C'est désormais chose faite !

15. Il nous semble important d'observer que pour tout entier naturel  $n$  l'on a

$$c_n(\varphi) = \langle \varphi, f_n \rangle$$

et que par conséquent

$$S_n(\varphi) = \sum_{k=0}^n \langle \varphi, f_k \rangle f_k$$

Allons-y alors gaiement !

a. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Quand on maîtrise parfaitement son cours on devine bien en  $S_n$  la projection orthogonale de  $\varphi \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$  sur le sous-espace

$$\text{Vect}(f_0, \dots, f_n)$$

(\*) La fonction « racine carrée » est injective !

puisque une importante orthonormalité a été signalée *par nos soins* à l'issue de la quatorzième. Il y a cependant un réel obstacle parce que

$$(C^0([0, 1], \mathbb{R}), <, >)$$

n'est pas un espace *euclidien* la raison étant que  $C^0([0, 1], \mathbb{R})$  est de dimension infinie(\*). Le *tricky* tour de passe-passe pour contourner l'entrave est de considérer l'espace vectoriel

$$T_n = \text{Vect}(f_0, \dots, f_n, \varphi)$$

qui est ouvertement de dimension finie et qui surtout contient la fonction  $\varphi$ .

Nous pouvons maintenant répondre à la question. Le vecteur  $S_n(\varphi)$  est, dans l'espace euclidien

$$(T_n, <, >)$$

la projection orthogonale de  $\varphi$  sur le sous-espace vectoriel  $\text{Vect}(f_0, \dots, f_n)$ .

b. Soit à nouveau  $n \in \mathbb{N}$ . L'égalité souhaitée repose sur la magique et officielle expression du carré de la norme d'un vecteur exprimé sur une base orthonormale. Quant à l'inégalité, on se place d'abord dans l'euclidien  $T_n$ , et projection orthogonale oblige, l'on ne perd pas de vue que

$$S_n(\varphi) \perp \varphi - S_n(\varphi)$$

Cela permet alors aux *pythagoriciens* de clamer haut et fort que

$$\|S_n(\varphi)\|_2^2 + \|\varphi - S_n(\varphi)\|_2^2 = \|\varphi\|_2^2$$

et nous pouvons ainsi tourner positivement la page.

c. Il s'agit d'une série dont le terme général est positif et dont la suite des sommes partielles est dorénavant majorée, par exemple par  $\|\varphi\|_2^2$ . Elle est donc *monotoniquement* convergente.

¶ Via un passage à la limite désormais légal, on déduit de l'inégalité du récent b que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n^2(\varphi) \leq \|\varphi\|_2^2$$

C'est une très célèbre inégalité due à un certain Friedrich Bessel et il eut été dommage de passer à côté...

d. Une importante condition *nécessaire* de convergence stipule que, lorsqu'une série converge, son terme général se doit de tendre vers zéro. Il s'ensuit donc dans un premier temps que

$$c_n^2(\varphi) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

et dans un second, que

$$c_n(\varphi) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

(\*) Le fait, par exemple, qu'il contienne la famille libre infinie  $(\psi_n)$  de la seconde partie devrait suffire à nous convaincre !

en invoquant, pourquoi pas, la continuité en zéro de la fonction *squareroot*. Il suffit alors de lever le voile pour voir effectivement apparaître.

$$\int_0^1 f_n \varphi \omega \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Soit pour finir  $n \in \mathbb{N}$ . Appartenance à  $E_{a_n}(\omega)$  oblige, il ne fait aucun doute que

$$f_n'' = -a_n \omega f_n$$

à telle enseigne que

$$\int_0^1 f_n'' \varphi = -a_n \int_0^1 f_n \varphi \omega$$

Comme l'intégrale du *right hand side* tend depuis peu vers zéro et comme la suite  $(a_n)$  est bornée, nous pouvons encore une fois envisager de changer de crèmerie.

16. Pour éviter de les annoncer à chaque alinéa, nous notifions  $x \in [0, 1]$  et  $n \in \mathbb{N}$  pour toute la durée de la question 16. Nous ne le dirons plus.

a. À bien y regarder, on peut donner une autre expression de  $\varphi_x$ , en l'occurrence

$$\forall t \in [0, 1] \quad \varphi_x(t) = \begin{cases} t(x-1) & \text{si } t \in [0, x] \\ x(t-1) & \text{si } t \in [x, 1] \end{cases}$$

la modification de la facette basse allant bientôt être déterminante. La fonction  $\varphi_x$  est en effet continue sur chacun des segments  $[0, x]$  et  $[x, 1]$  pour la simple et bonne raison qu'elle y est débonnairement affine. Elle est donc continue à gauche et à droite en  $x$  and *Bob's your uncle!*

b. La fonction  $f_n$  étant par essence de classe  $\mathcal{C}^2$  sur le segment  $[0, 1]$  on peut assurément lui appliquer la formule de Taylor en question qui s'écrit

$$f_n(x) = f_n(0) + x f_n'(0) + \int_0^x (x-t) f_n''(t) dt$$

Cependant, vu les origines géographiques de la fonction  $f_n$  elle se doit de s'annuler en 0 à telle enseigne que l'on a bien

$$f_n(x) = x f_n'(0) + \int_0^x (x-t) f_n''(t) dt$$

Ces mêmes origines obligent également  $f_n(1) = 0$ , ce qui s'écrit

$$f_n'(0) + \int_0^1 (1-t) f_n''(t) dt = 0$$

et qui ne peut que nous ravir !

c. Au vu et au su de la précédente, nous pouvons espérer

$$f_n(x) = -x \int_0^1 (1-t)f_n''(t) dt + \int_0^x (x-t)f_n''(t) dt$$

ce qui en *chassant* un tantinet s'écrit également

$$f_n(x) = -x \int_0^x (1-t)f_n''(t) dt - x \int_x^1 (1-t)f_n''(t) dt + \int_0^x (x-t)f_n''(t) dt$$

En regroupant linéairement la première et la troisième intégrale du *right hand side*, en faisant un peu de ménage et en organisant habilement les choses nous revendiquons déjà l'égalité

$$f_n(x) = \int_0^x t(x-1)f_n''(t) dt + \int_x^1 x(t-1)f_n''(t) dt$$

Notre « facettage » modifié de la fonction  $\varphi_x$  évite confortablement les affres des semi-ouvertures et nous avons sans problème

$$f_n(x) = \int_0^x \varphi_x(t)f_n''(t) dt + \int_x^1 \varphi_x(t)f_n''(t) dt$$

et le début de l'histoire se termine en *chassant one more time*.

La fin de l'histoire passe alors par la fin de la question 15.b dans laquelle nous choisissons

$$\varphi = \varphi_x$$

ce qui est tout à fait envisageable puisque, depuis peu, la fonction  $\varphi_x$  appartient à l'espace vectoriel  $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ .

d. Vu les origines ethniques de  $f_n$ , nous avons entre autres

$$f_n'' = -a_n \omega f_n$$

et la première partie de la précédente se métamorphose alors effectivement en

$$f_n(x) = -a_n \langle \varphi_x, f_n \rangle$$

égalité qui, *physio, physio*, est beaucoup mieux sous la forme

$$f_n(x) = -a_n c_n(\varphi_x)$$

Le passage en *absolute value* n'est bien sûr qu'une formalité et voilà donc déjà que

$$|f_n(x)| = a_n |c_n(\varphi_x)|$$

puisque les entités assurément positives sont *as usual* dispensées de valuation. Il reste maintenant à enfoncer deux clous.

– Le premier résulte de la *bounded above attitude* selon laquelle

$$a_n \leq a$$

– Le second utilise une toute petite partie de l'inégalité précédant celle de Friedrich Bessel révélant tout d'abord et sans ambages que

$$c_n^2(\varphi_x) \leq \|\varphi_x\|_2^2$$

Il en ressort ensuite que

$$|c_n(\varphi_x)| \leq \|\varphi_x\|_2$$

puisque la fonction racine carrée est croissante sur  $\mathbb{R}_+$  et possède l'énorme propriété

$$\forall u \in \mathbb{R} \quad \sqrt{u^2} = |u|$$

dont l'ignorance a d'ailleurs coûté le brevet des collèges à des générations de potaches ! Comme tout ce petit monde évolue dans la plus pure des positivités, il devrait en résulter que

$$a_n |c_n(\varphi_x)| \leq a \|\varphi_x\|_2$$

et la conclusion se fait alors très transitivement...

e. En *chassant* encore une fois au point  $x$  et en gérant correctement les facelles, on trouve tout d'abord que

$$\int_0^1 \varphi_x^2 = \int_0^x t^2(x-1)^2 dt + \int_x^1 x^2(t-1)^2 dt$$

La fin du calcul ne pose pas vraiment de problème et après un peu de ménage, on finit par trouver l'égalité

$$\int_0^1 \varphi_x^2 = \frac{x^2(x-1)^2}{3}$$

Poursuivons. Nous n'avons pas oublié que

$$\|\varphi_x\|_2^2 = \int_0^1 \varphi_x^2 \omega$$

et que, maximalité oblige, la fonction  $\omega$  est majorée par le nombre réel positif  $\|\omega\|_\infty$ . Puisque nous sommes décidément dans un havre de positivité, il s'ensuit très tranquillement que

$$\int_0^1 \varphi_x^2 \omega \leq \|\omega\|_\infty \int_0^1 \varphi_x^2$$

puisque l'intégration est linéaire et croissante, les bornes étant idéalement disposées. Selon le début de la question, nous en sommes donc déjà à

$$\|\varphi_x\|_2^2 \leq x^2(x-1)^2 \cdot \frac{\|\omega\|_\infty}{3}$$

et comme, quelques lignes plus haut, nous avons rappelé la croissance sur  $\mathbb{R}_+$  de la fonction  $\sqrt{\quad}$  ainsi que la propriété du potache, nous atteignons sans peine l'inégalité

$$\|\varphi_x\|_2 \leq x(1-x)\sqrt{\frac{\|\omega\|_\infty}{3}}$$

le point crucial à avoir bien capté étant la négativité de  $x - 1$ . Après multiplication par le réel positif  $a$  et un *chouia* de transitivité on déduit alors de la précédente qu'effectivement

$$|f_n(x)| \leq ax(1-x)\sqrt{\frac{\|\omega\|_\infty}{3}}$$

↗ Il nous semble important de doper sur-le-champ cette conclusion car nous en serons récompensés quelques lignes plus bas. Les *aficionados* des variances *bernoulliennes* ne sont pas sans savoir que la variance de n'importe quelle variable aléatoire de Bernoulli ne dépasse jamais  $1/4$  ce qui se traduit par

$$\forall u \in [0, 1] \quad u(1-u) \leq \frac{1}{4}$$

De là à en déduire que

$$|f_n(x)| \leq \frac{a}{4}\sqrt{\frac{\|\omega\|_\infty}{3}}$$

il n'y a qu'une toute petite marche que nous franchissons guillerets, les éternelles positivités des uns et des autres étant toujours et bien entendu mises à contribution.

*f.* Supposons momentanément que  $x$  soit *strictement* positif. Cela autorise la division membre à membre par  $x$  dans l'inégalité qui précède et voilà donc que

$$\left| \frac{f_n(x)}{x} \right| \leq a(1-x)\sqrt{\frac{\|\omega\|_\infty}{3}}$$

ce qui, parce que  $f_n$  a des origines, peut également s'écrire avec un *tricky* parfum *newtonien*, en l'occurrence

$$\left| \frac{f_n(x) - f_n(0)}{x} \right| \leq a(1-x)\sqrt{\frac{\|\omega\|_\infty}{3}}$$

Il suffit alors de passer à la limite lorsque  $x$  tend vers zéro.

*g.* Ce verbe « rappeler » est pour le moins bizarre, bizarre... Essayons au moins de démontrer !

Comme la fonction  $f_n''$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$  nous pouvons lui appliquer la formule d'Isaac Barrow entre 0 et  $x$  et comme  $f_n'$  est assurément l'une de ses primitives, nous revendiquons l'égalité

$$f_n'(x) = f_n'(0) + \int_0^x f_n''$$

qui n'est autre que la formule de Taylor reste intégral à l'ordre zéro, et quoi qu'il en soit, nous avons bien « rappelé » le premier *round* puisque la provenance de  $f_n$  l'oblige à vérifier

$$f_n'' = -a_n \omega f_n$$

L'inégalité triangulaire sommatoire suivie de sa cousine intégrale permettent désormais de se réclamer de

$$|f_n'(x)| \leq |f_n'(0)| + a_n \int_0^x \omega(t) |f_n(t)| dt$$

vu que les bornes de l'intégrale sont, depuis belle lurette, idyllyquement disposées et que, au risque de radoter, les protagonistes déjà positifs... La toute récente question  $f$  et la continuelle positivité de l'intégrande permettent même d'aller carrément plus loin et *boum!*

$$|f_n'(x)| \leq a \sqrt{\frac{\|\omega\|_\infty}{3}} + a_n \int_0^1 \omega(t) |f_n(t)| dt$$

Soit alors  $t \in [0, 1]$ . Nous mettons en avant les éléments suivants :

– *primo*, la sempiternelle

$$a_n \leq a$$

– *deuzio*, la non moins maximaliste

$$\omega(t) \leq \|\omega\|_\infty$$

– *tertio*, la conclusion améliorée par nos soins de la fraîche question  $e$  selon laquelle

$$|f_n(t)| \leq \frac{a}{4} \sqrt{\frac{\|\omega\|_\infty}{3}}$$

Le lecteur avisé n'aura maintenant aucun souci à en déduire que

$$a_n \int_0^1 \omega(t) |f_n(t)| dt \leq \frac{a^2}{4} \|\omega\|_\infty \sqrt{\frac{\|\omega\|_\infty}{3}}$$

et comme il se fait tard nous lui laissons, quitte à radoter, le soin de se charger de l'intendance...

Il semble alors bien que nous soyons parvenus à

$$|f_n'(x)| \leq a \sqrt{\frac{\|\omega\|_\infty}{3}} + \frac{a^2}{4} \|\omega\|_\infty \sqrt{\frac{\|\omega\|_\infty}{3}}$$

ce qui, à une mise en facteur près, ne peut que nous satisfaire.

17. Il a été dit depuis fort longtemps que la fonction  $\omega$  est à valeurs *strictement* positives et c'est donc également le cas de son maximum. Nous avons ainsi

$$\|\omega\|_\infty > 0$$

et cela devrait suffire à justifier la *stricte* positivité du réel  $C$ . Soit alors  $n \in \mathbb{N}$ . La fin de la toute proche question 16.g produit la majoration

$$|f'_n| \leq C$$

et l'affaire se conclut alors grâce à une mentale application de l'inégalité des accroissements finis sous sa forme valuée s'entend.

† Le lecteur cultivé aura reconnu en  $f_n$  une fonction  $C$ -lipschitzienne en hommage au mathématicien allemand Rudolph Lipschitz.

18. La *stricte* positivité de  $C$  n'était certes pas indispensable pour la 17. En revanche ce n'est désormais plus la même histoire vu que  $C$  est passé sous la ligne de flottaison et tout cela c'est pour causer bien sûr...

a. La fin de la question 16.c a révélé que, pour tout réel  $x$  du segment  $[0, 1]$ , l'on a

$$f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Soit alors  $h$  appartenant à  $[[0, N]]$ . Comme  $\alpha_h$  appartient à notre segment il ne fait aucun doute que

$$f_n(\alpha_h) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

ce qui est un providentiel *epsilontik jack-pot* sur lequel nous jouons la somme de  $\epsilon/2$ . Nous y gagnons un entier naturel — dépendant évidemment de  $h$  — que nous notons  $p_h$  tel que

$$\forall n \geq p_h \quad |f_n(\alpha_h)| < \frac{\epsilon}{2}$$

Proposons maintenant et classiquement

$$p = \max(p_0, \dots, p_N)$$

et annonçons *ensuite*(\*) un entier  $n \geq p$  puis un entier  $k \in [[0, N]]$ . Maximum oblige, notre entier  $n$  est fatalement supérieur à  $p_k$  et du coup

$$|f_n(\alpha_k)| < \frac{\epsilon}{2}$$

ce qui nous permet d'envisager la suite.

b. Toujours à propos de ces histoires d'ordre soulevées par la note de bas de page, il est *impératif* d'annoncer *d'abord* un entier  $n$  supérieur à l'entier  $p$  de la précédente et d'annoncer *ensuite* un réel  $x$  du segment  $[0, 1]$ .

Comme les réels  $\alpha_k$  forment une subdivision du segment  $[0, 1]$  — il paraît même que c'est la régulière ! — le réel  $x$  appartient fatalement à l'un des morceaux et il existe donc bien un entier  $k$  situé entre 0 et  $N - 1$  tel que

$$\alpha_k \leq x \leq \alpha_{k+1}$$

(\*) Dans ce genre de situation l'ordre dans lequel on annonce les protagonistes est désespérément crucial ! À bon entendeur...

La classique, mais cependant *tricky*, égalité

$$f_n(x) = f_n(\alpha_k) + f_n(x) - f_n(\alpha_k)$$

une fois triangulée nous amène à

$$|f_n(x)| \leq |f_n(\alpha_k)| + |f_n(x) - f_n(\alpha_k)|$$

Oui mais voilà nous savons tout d'abord que

$$|f_n(\alpha_k)| < \frac{\epsilon}{2}$$

puisqu'il y eu le récent  $a$  et que nous avons situé  $n$  de façon précisément *ad hoc* et nous savons en second lieu — merci Rudolf! — que

$$|f_n(x) - f_n(\alpha_k)| \leq C(x - \alpha_k)$$

dans la mesure où  $x$  et  $\alpha_k$  sont dans  $[0, 1]$  et que  $x - \alpha_k$  est positif. N'ayant pas perdu de vue que  $x$  est également inférieur à  $\alpha_{k+1}$  et que  $C$  n'a pas viré sa cuti, nous avons dans la foulée et tour à tour

$$C(x - \alpha_k) \leq C(\alpha_{k+1} - \alpha_k) = \frac{C}{N} \leq \frac{\epsilon}{2}$$

l'inégalité finale reposant sur le choix judicieux de l'entier  $N$ . Voici donc pour finir que

$$|f_n(\alpha_k)| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{et} \quad |f_n(x) - f_n(\alpha_k)| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

et il s'en déduit(\*) effectivement que

$$|f_n(x)| < \epsilon$$

† Il y a ici une colossale remarque à faire.

– La fin de la timide question 16.c, en l'occurrence

$$\forall x \in [0, 1] \quad f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

se traduit de manière *epsilon* par l'énoncé

$$\forall x \in [0, 1] \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists p \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq p \quad |f_n(x)| < \epsilon \quad (\text{s})$$

– Nous venons à l'instant de prouver magistralement le nouvel énoncé

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists p \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq p \quad \forall x \in [0, 1] \quad |f_n(x)| < \epsilon \quad (\text{u})$$

(\*) Comme cochon !

Malgré des apparences trompeuses — il n'y a finalement qu'un changement de place de la quantification sur  $x$  — la différence entre ces deux énoncés est titanesque car il faut en effet bien capter que

– dans l'énoncé (S) l'entier  $p$  dépend inéluctablement de  $x$  puisque ce dernier est annoncé *avant* ;

– dans l'énoncé (U) l'entier  $p$  ne dépend sûrement pas de  $x$  puisque celui-ci pointe son nez *après* ce qui change considérablement les choses comme nous allons le constater à la suivante.

Ces délicates problématiques n'ont jamais pris place dans les programmes officiels de nos classes mais rien n'empêche bien sûr d'aller les titiller dans un problème !

Signalons enfin pour la culture que les *pros* des suites de fonctions traduisent (S) en disant que la suite  $(f_n)$  converge *simplement* vers la fonction nulle alors qu'ils traduisent (U) en clamant que la suite  $(f_n)$  converge *uniformément* vers la fonction nulle.

c. Soit à nouveau  $\epsilon > 0$ . L'énoncé (U) de l'uniformité produit un autonome entier  $p$  qui vérifie

$$\forall n \geq p \quad \forall x \in [0, 1] \quad |f_n(x)| < \epsilon$$

Soit alors  $n \geq p$ . Les réels  $|f_n(x)|$  étant absolument *tous* strictement inférieur à  $\epsilon$  il en est bien sûr de même de leur *maximum* puisque ce dernier fait partie de la bande. Autant dire alors que

$$\|f_n\|_\infty < \epsilon$$

et, à bien y regarder, nous avons établi que, pour tout  $\epsilon$  strictement positif, il existe un entier naturel  $p$  tel que

$$\forall n \geq p \quad \|f_n\|_\infty < \epsilon$$

ce qui n'est autre que la définition *epsilon* de la limite

$$\|f_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

† Comme nous l'avons laissé entendre un peu plus haut, nous avons ici remporté l'affaire grâce à l'énoncé (U) de la convergence uniforme. Nous demandons au lecteur qui a encore des jambes, d'essayer de la vaincre *via* l'énoncé (S) de la convergence simple et de rapidement se persuader qu'il n'y arrivera pas ! Dans l'énoncé (S), le fameux entier  $p$  qui dépendant de  $x$  lui mettra, inévitablement, plus que des bâtons dans les roues...

d. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Après toutes les terribles épreuves que nous avons traversées ensemble, nous pensons le lecteur endurant capable de justifier par lui-même l'encadrement

$$0 \leq \int_0^1 f_n^2 \omega \leq \|f_n\|_\infty^2 \cdot \|\omega\|_\infty$$

La question précédente et le *squeezing process* sont alors intraitables. *No doubt that*

$$\int_0^1 f_n^2 \omega \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

mais cela n'est pas vraiment sage, dans la mesure où, depuis la genèse, l'on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_0^1 f_n^2 \omega = 1$$

Il n'y a définitivement *aucune* fonction  $\omega$  vérifiant la propriété  $(H_\omega)$ .

Le désert, la zone, le néant...

# MATHÉMATIQUES

**DURÉE : 4 HEURES.**

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

*Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

*Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.*

## S U J E T

*L'objet du problème est d'aborder quelques questions mathématiques relatives au comportement asymptotique de systèmes dynamiques discrets ou continus susceptibles de modéliser l'évolution temporelle de divers phénomènes, en particulier économiques (croissance économique, prix d'équilibre, etc.).*

*Les trois parties du problème sont indépendantes.*

**Dans tout le problème :**

- On note  $p$  un entier supérieur ou égal à 1.
- Pour tout vecteur  $b \in \mathbb{R}^p$ , on note  $B$  la matrice colonne de ses coordonnées dans la base canonique de  $\mathbb{R}^p$ .
- La transposée d'une matrice  $A$  est notée  $A^T$ . La matrice identité de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  est notée  $I_p$ .
- Pour toute application  $x : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^p$   
 $t \mapsto x(t) = (x_1(t), \dots, x_p(t))$ , on note :
  - \*  $x'(t) = (x'_1(t), \dots, x'_p(t))$  en tout point  $t \in \mathbb{R}_+$  où les fonctions  $x_1, \dots, x_p$  sont dérivables ;
  - \*  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = (\lim_{t \rightarrow +\infty} x_1(t), \dots, \lim_{t \rightarrow +\infty} x_p(t))$  lorsque les fonctions  $x_1, \dots, x_p$  admettent des limites finies lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ .
- Pour toute suite  $(x(n))_{n \in \mathbb{N}} = (x_1(n), \dots, x_p(n))_{n \in \mathbb{N}}$  de vecteurs de  $\mathbb{R}^p$  pour laquelle les suites  $(x_1(n))_{n \in \mathbb{N}}, \dots, (x_p(n))_{n \in \mathbb{N}}$  sont convergentes, on définit la limite de la suite  $(x(n))_{n \in \mathbb{N}}$  par :
  - \*  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x(n) = (\lim_{n \rightarrow +\infty} x_1(n), \dots, \lim_{n \rightarrow +\infty} x_p(n))$ .

**Partie I. Deux exemples de pilotage linéaire.**

Soit  $A$  une matrice non nulle de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  et  $b$  un vecteur de  $\mathbb{R}^p$ . Soit  $x_1, \dots, x_p$   $p$  fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}_+$ .

On dit qu'une application  $x : t \mapsto x(t) = (x_1(t), \dots, x_p(t))$  définie sur  $\mathbb{R}_+$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^p$ , est *pilotée par le couple*  $(A, b)$ , si pour tout réel  $t \geq 0$ , les matrices colonnes  $X(t)$  et  $X'(t)$  de  $x(t)$  et  $x'(t)$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^p$  vérifient le système :  $\forall t \geq 0, X'(t) = AX(t) + B$ .

On appelle *équilibre du système piloté par le couple*  $(A, b)$ , tout vecteur  $x^* \in \mathbb{R}^p$  vérifiant :  $AX^* + B = 0$ .

On dit qu'un équilibre  $x^*$  est *attractif* si pour toute application  $x$  pilotée par  $(A, b)$ , on a :  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x^*$ .

1. Le cas  $p=1$ .

Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$  et  $x$  une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}_+$ , à valeurs réelles, vérifiant :  $\forall t \geq 0, x'(t) = ax(t) + b$ .

- Calculer la dérivée de la fonction  $y : t \mapsto \left(x(t) + \frac{b}{a}\right)e^{-at}$ .
- En déduire que pour tout  $t \geq 0$ , on a :  $x(t) = -\frac{b}{a} + \left(x(0) + \frac{b}{a}\right)e^{at}$ .
- On identifie  $a$  à la matrice de  $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$  dont l'unique coefficient est  $a$ . Montrer que le système piloté par le couple  $(a, b)$  admet un unique équilibre, puis montrer que cet équilibre est attractif si et seulement si  $a < 0$ .

2. Exemple 1. Soit  $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$  et  $b = (1, 1)$ . Soit  $x : t \mapsto x(t) = (x_1(t), x_2(t))$  une application définie sur  $\mathbb{R}_+$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$ , pilotée par le couple  $(A, b)$ .

- Déterminer l'unique équilibre  $x^*$  du système piloté par le couple  $(A, b)$ .
- Justifier l'existence d'une matrice inversible  $Q$  telle que la matrice  $Q^{-1}AQ$  soit diagonale. Pourquoi peut-on choisir la matrice  $Q$  de telle manière que  $Q^{-1} = Q^T$  ?
- Trouver deux réels  $\lambda$  et  $\mu$  ( $\lambda \leq \mu$ ) et une matrice inversible  $Q$  vérifiant :  $Q^{-1} = Q^T$  et  $Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ .
- Pour tout  $t \geq 0$ , on pose :  $W(t) = Q^T X(t)$ .
  - Vérifier pour tout  $t \geq 0$ , l'égalité :  $W'(t) = DW(t) + Q^T B$  où  $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ .
  - À l'aide des résultats de la question 1, en déduire que l'équilibre  $x^*$  est attractif.

3. On suppose  $p \geq 2$ . Soit  $\mathcal{B}_p = (e_1, \dots, e_p)$  la base canonique de  $\mathbb{C}^p$  et  $u_p$  l'unique endomorphisme de  $\mathbb{C}^p$  tel que  $u_p(e_1) = e_p$  et pour tout  $k \in \llbracket 2, p \rrbracket$ ,  $u_p(e_k) = e_{k-1}$ .

- Écrire la matrice  $A_p$  de l'endomorphisme  $u_p$  dans la base  $\mathcal{B}_p$ . Quel est son rang ?
- Soit  $\varepsilon \in \mathbb{C}$  une racine  $p$ -ième de l'unité et  $G$  la matrice colonne de  $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$  de composantes  $1, \varepsilon, \dots, \varepsilon^{p-1}$ . Montrer que  $G$  est un vecteur propre de  $A_p$  et préciser la valeur propre complexe associée.
- Montrer que l'endomorphisme  $u_p$  est diagonalisable.
- Montrer que le polynôme  $X^p - 1$  de  $\mathbb{C}[X]$  est un polynôme annulateur de  $u_p$ .  
L'endomorphisme  $u_p$  admet-il un polynôme annulateur non nul de degré strictement inférieur à  $p$  ?
- Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$ . L'endomorphisme  $P(u_p)$  de  $\mathbb{C}^p$  est-il diagonalisable ? Quelles sont ses valeurs propres ?

4. Exemple 2. Soit  $\alpha$  et  $\beta$  deux réels tels que  $\alpha > 0, \beta > 0, \alpha \neq \beta, \alpha + \beta \neq 1$  et  $M = \begin{pmatrix} -1 & \alpha & \beta \\ \beta & -1 & \alpha \\ \alpha & \beta & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

- On note  $A$  la matrice  $A_p$  de la question 3 dans le cas où  $p = 3$ .
  - Déterminer un polynôme  $P$  à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 2, tel que  $M = P(A)$ .
  - En déduire les valeurs propres complexes de  $M$  ainsi que leurs parties réelles et imaginaires respectives.
- Soit  $c = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$ .
  - Trouver l'unique équilibre  $x^*$  du système piloté par le couple  $(M, c)$ .
  - Vérifier que l'application  $x : t \mapsto x(t) = x^* + e^{(\alpha+\beta-1)t}c$  est pilotée par le couple  $(M, c)$ .
  - En déduire une condition nécessaire portant sur  $\alpha$  et  $\beta$  pour que l'équilibre  $x^*$  soit attractif.

On suppose désormais que la condition précédente est réalisée.

- On pose :  $N = M^T + M$ .
  - Quelles sont les valeurs propres de la matrice  $N$  ?
  - Déterminer un réel  $\theta > 0$  tel que toutes les valeurs propres de  $N$  soient inférieures ou égales à  $-2\theta$ .

- d) On rappelle que  $c = (1, 1, 1)$ . On considère une application  $x$  pilotée par le couple  $(M, c)$ .  
 On note  $y$  l'application définie sur  $\mathbb{R}_+$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^3$ , telle que  $y : t \mapsto x(t) - x^*$  et  $\varphi$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+$ , à valeurs réelles, telle que  $\varphi : t \mapsto e^{2\theta t} \|Y(t)\|^2$ , où  $\|\cdot\|$  est la norme euclidienne canonique de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ .
- (i) Vérifier que l'application  $y$  est pilotée par le couple  $(M, 0_{\mathbb{R}^3})$ .
  - (ii) Montrer que  $\varphi$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$ , et que :  $\forall t \in \mathbb{R}_+, \varphi'(t) = e^{2\theta t} \times Y(t)^T (N + 2\theta I_3) Y(t)$ .
  - (iii) Montrer que la fonction  $\varphi$  est décroissante sur  $\mathbb{R}_+$ .
  - (iv) En déduire que l'équilibre  $x^*$  est attractif.

**Partie II. Un exemple de pilotage non linéaire.**

Un exemple de *pilotage non linéaire* est fourni par un modèle de croissance économique endogène à deux secteurs dans lequel le taux de croissance du stock de capital et le taux de croissance du stock de connaissances sont représentés, depuis une date choisie comme origine, par des fonctions  $x_1$  et  $x_2$  respectivement.

Dans ce modèle où  $\rho$  désigne un paramètre réel strictement positif, les deux fonctions  $x_1$  et  $x_2$  sont dérivables sur  $\mathbb{R}_+$ , à valeurs réelles, et vérifient le système :

$$\forall t \geq 0, \begin{cases} x_1'(t) = F_1(x_1(t), x_2(t)) \\ x_2'(t) = F_2(x_1(t), x_2(t)) \end{cases} \quad (S)$$

dans lequel les deux fonctions  $F_1$  et  $F_2$  définies sur  $\mathbb{R}^2$ , à valeurs réelles, sont données par :

$$\forall (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} F_1(u_1, u_2) = (-u_1 + \rho(u_2 - u_1) + 1) u_1 \\ F_2(u_1, u_2) = (-u_2 + \rho(u_1 - u_2) + 1) u_2 \end{cases}$$

5.a) Pour tout réel  $\nu > -1$ , on pose :  $\forall t \geq 0, x_1(t) = x_2(t) = \frac{1}{1 + \nu e^{-t}}$ .

Vérifier que l'application  $x : t \mapsto (x_1(t), x_2(t))$  est solution du système (S).

- b) En déduire que pour tout réel  $c \in ]0, 1[$ , il existe une solution de (S) à valeurs dans  $[c, +\infty[$ .
- c) Quel est l'unique couple  $x^* = (x_1^*, x_2^*) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$  vérifiant  $F_1(x_1^*, x_2^*) = 0$  et  $F_2(x_1^*, x_2^*) = 0$  ?
- d) Toutes les solutions de (S) convergent-elles vers  $x^*$  lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$  ?

6. Pour tout réel  $r$ , on note  $q_r$  la forme quadratique sur  $\mathbb{R}^2$  associée à la matrice symétrique  $Q_r = \begin{pmatrix} 1 & -r \\ -r & 1 \end{pmatrix}$ .

On note  $C_r$  l'ensemble défini par :  $C_r = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2; q_r(u_1, u_2) = 1\}$ .

- a) Pour quelles valeurs de  $r$  la forme quadratique  $q_r$  est-elle définie positive ? Que peut-on dire alors de la partie  $C_r$  de  $\mathbb{R}^2$  ?

Dans toute la suite de cette question,  $r$  et  $s$  sont deux réels vérifiant les inégalités :  $0 < s < r < 1$ .

- b) Justifier que l'ensemble  $\{q_s(u_1, u_2); (u_1, u_2) \in C_r\}$  admet une borne inférieure, notée  $m_{r,s}$ , et une borne supérieure, notée  $M_{r,s}$ , et que ces deux bornes sont atteintes.
- c) Justifier que la contrainte d'appartenance à l'ensemble  $C_r$  est non critique.
- d) Énoncer la condition nécessaire du premier ordre pour un extremum de  $q_s$  sous la contrainte  $C_r$ .
- e) En déduire les valeurs de  $m_{r,s}$  et  $M_{r,s}$  et établir l'existence d'un réel  $\mu$  tel que :

$$\forall (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2, q_s(u_1, u_2) \leq \mu q_r(u_1, u_2).$$

7. On conserve les notations de la question 6.

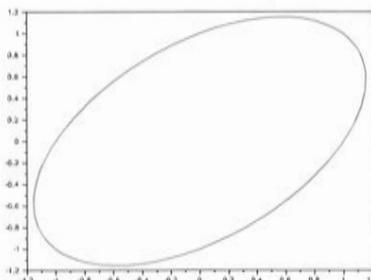
- a) Soit  $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$  et  $(u_1, u_2) = \frac{\sqrt{2}}{2}(v_1 - v_2, v_1 + v_2)$ .

Vérifier que  $(u_1, u_2) \in C_r$  si et seulement si on a :  $(1 - r)(v_1)^2 + (1 + r)(v_2)^2 = 1$ .

On se place désormais dans le cas où  $r = \frac{1}{2}$  et  $s = \frac{1}{4}$ .

b) Pour faire tracer par *Scilab* le domaine  $C_r$ , on peut utiliser le code suivant qui donne le graphique ci-dessous :

```
(1) n=100;
(2) theta=linspace(0,2*pi,n);
(3) ct=cos(theta);
(4) st=sin(theta);
(5) Cr=[ct-(1/sqrt(3))*st;ct+(1/sqrt(3))*st];
(6) plot(Cr(1,:),Cr(2,:))
```



En s'appuyant sur le résultat de la question 7.a), expliquer la méthode employée.

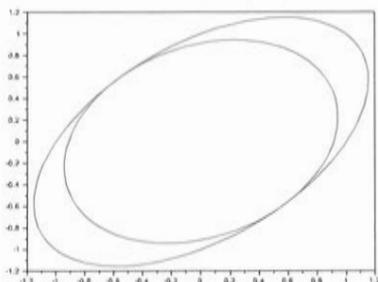
On précisera la signification de la ligne (2) ainsi que le format et le contenu des matrices  $Cr$  et  $Cr(1, :)$ .

c) Soit  $z_0 > 0$  une valeur affectée à la variable  $z$  utilisée ci-dessous. Compléter la ligne (7) afin de tracer la ligne de niveau  $z_0$  de la fonction  $q_s$ .

```
(7) Csz=[sqrt(z)*(?? *ct+?? *st); sqrt(z)*(?? *ct+?? *st)];
(8) plot(Csz(1,:),Csz(2,:))
```

d) Le graphique suivant a été obtenu à l'aide des deux scripts précédents pour une valeur  $z_0$  affectée à la variable  $z$ . Laquelle ?

On justifiera la réponse donnée et on précisera pourquoi les deux courbes ont des tangentes communes.



8. Soit  $c$  un réel de  $]0, 1[$  et  $x$  une solution de (S) à valeurs dans  $[c, +\infty[$ .

On pose pour tout  $t \geq 0$  :  $y_1(t) = x_1(t) - 1$  et  $y_2(t) = x_2(t) - 1$ . Pour  $s = \frac{\rho}{1 + \rho}$ , on note  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+$ , à valeurs réelles, telle que  $f(t) = q_s(y_1(t), y_2(t))$ .

a) Vérifier pour tout  $t \geq 0$ , l'égalité :  $f'(t) = -2(1 + \rho) \left( x_1(t)(y_1(t) - s y_2(t))^2 + x_2(t)(y_2(t) - s y_1(t))^2 \right)$ .

b) En déduire que pour  $r = \frac{2s}{1 + s^2}$ , on a pour tout  $t \geq 0$  :  $f'(t) \leq -2c \times \frac{1-s}{1-r} \times q_r(y_1(t), y_2(t))$ .

c) Justifier pour tout  $t \geq 0$ , l'inégalité :  $f'(t) \leq -2c f(t)$ . En déduire que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$ .

9. Quelle propriété peut-on déduire de l'étude précédente pour toute solution de (S) dont chacune des composantes admet un minorant strictement positif ?

**Partie III. Pilotage pas à pas dans un contexte aléatoire.**

Dans cette partie, on s'intéresse à un exemple de système se présentant sous la forme d'une équation de récurrence dont les coefficients sont soumis à une perturbation aléatoire.

On suppose  $p \geq 2$ . Soit  $A$  une matrice non nulle de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  et  $b$  un vecteur de  $\mathbb{R}^p$ .

Soit  $(x(n))_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de vecteurs de  $\mathbb{R}^p$  définie par son terme initial  $x(0)$  et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, X(n+1) = AX(n) + B.$$

On appelle *équilibre du système piloté pas à pas* par le couple  $(A, b)$ , tout vecteur  $x^* = (x_1^*, \dots, x_p^*) \in \mathbb{R}^p$  qui vérifie :  $X^* = AX^* + B$ .

On suppose qu'il existe une matrice inversible  $Q \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  telle que la matrice  $D = Q^{-1}AQ$  soit diagonale et que tous les coefficients diagonaux  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  de  $D$  appartiennent à l'intervalle ouvert  $] -1, +1[$ .

10. Montrer que le système piloté pas à pas par le couple  $(A, b)$  admet un unique équilibre  $x^*$ .

La perturbation aléatoire du système se traduit par le fait que les coordonnées de  $x^*$  sont des paramètres inconnus qu'on peut chercher à estimer à partir des données observées que constituent les valeurs successives de vecteurs aléatoires  $y(n) = (y_1(n), \dots, y_p(n))$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^p$  et soumis au système perturbé.

Soit  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , centrées et admettant chacune un moment d'ordre 2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $v_n = V(U_n)$  la variance de  $U_n$ .

Soit  $x(0) \in \mathbb{R}^p$  et  $(y(n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ , la suite de vecteurs aléatoires à valeurs dans  $\mathbb{R}^p$  définie par :

$$\begin{cases} Y(1) = (A + U_1 I_p) X(0) + B \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, Y(n+1) = (A + U_{n+1} I_p) Y(n) + B \end{cases}$$

où, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $Y(n)$  est la matrice colonne  $(y_k(n))_{1 \leq k \leq p}$ .

11. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $\mathbf{E}(y(n))$  le vecteur  $(E(y_1(n)), \dots, E(y_p(n))) \in \mathbb{R}^p$  et  $\mathbf{E}(Y(n))$  la matrice colonne de ses coordonnées dans la base canonique de  $\mathbb{R}^p$ .

a) Calculer  $\mathbf{E}(Y(1))$  et justifier pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'égalité :  $\mathbf{E}(Y(n+1)) - X^* = A(\mathbf{E}(Y(n)) - X^*)$ .

b) En déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{E}(y(n)) = x^*$ .

12. Soit  $(z(n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ , la suite de vecteurs aléatoires à valeurs dans  $\mathbb{R}^p$  définie par :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, Z(n) = Q^{-1}Y(n)$ .

a) Montrer pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , que :  $V(z_k(n+1)) = (\lambda_k^2 + v_{n+1})V(z_k(n)) + v_{n+1} (E(z_k(n)))^2$ .

b) En déduire que si la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est convergente et de limite nulle, alors il existe un réel  $c_k \in ]0, 1[$ , un entier naturel  $N$  et un réel  $M_k > 0$  tels que :  $\forall n \geq N, V(z_k(n+1)) \leq c_k V(z_k(n)) + M_k v_{n+1}$ .

13. On suppose que la série de terme général  $v_n$  est convergente. Soit  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ .

Avec les notations de la question 12.b), on pose pour tout  $m \in \mathbb{N} : \alpha_m = V(z_k(N+m))$  et  $w_m = M_k v_{N+m+1}$ .

a) Montrer que pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , on a :  $\alpha_{m+1} \leq (c_k)^{m+1} \alpha_0 + \sum_{j=0}^m w_j (c_k)^{m-j}$ .

b) En déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} V(z_k(n)) = 0$ .

c) Montrer que la suite  $(y_k(n))_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge en probabilité vers  $x_k^*$ .

Grâce aux résultats des questions 11.b) et 13.c), on peut dire que  $(y(n))_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite d'estimateurs de  $x^*$  asymptotiquement sans biais et convergente.

# CORRIGÉ

Par Jean-Louis Roque, professeur au lycée Pasteur à Neuilly-sur-Seine, et external lecteur à ESSEC Business School.

HEC

CORRIGÉ

Comme cela se pratique assez souvent, le texte aurait pu choisir d'identifier les vecteurs colonnes de  $M_{p,1}(\mathbb{R})$  aux listes de  $\mathbb{R}^p$  correspondantes, mais il ne l'a désespérément pas fait ! Il faudra donc souvent tourner la tête de  $\pi/2$  et ne pas trop craindre le *torticolis*...

## Partie 1

1. C'est à la future question *c* que le texte identifiera le réel  $a$  à la matrice d'ordre un  $[a]$ . Nous pensons qu'il n'est point saugrenu de le faire sur-le-champ.

Nous en voulons pour preuve que, dans ces conditions, les applications  $x$  en question sont tout bêtement celles qui sont pilotées par le couple  $(a, b)$  et nous saurons nous en souvenir !

*a.* Les généreux théorèmes généraux de la dérivabilité assurent la dérivabilité sur  $\mathbb{R}_+$  de l'application  $y$  et l'on trouve alors aisément que

$$\forall t \geq 0 \quad y'(t) = 0$$

*b.* Comme  $\mathbb{R}_+$  est un *intervalle*(\*) de  $\mathbb{R}$ , la conclusion de la précédente impose la constance à la fonction  $y$  ce qui se traduit immédiatement par

$$\forall t \geq 0 \quad y(t) = y(0)$$

*c*'est-à-dire

$$\forall t \geq 0 \quad \left(x(t) + \frac{b}{a}\right)e^{-at} = x(0) + \frac{b}{a}$$

À quelques minimales aménagements près, cela devrait nous permettre d'envisager la suite.

¶ Précisons au demeurant que nous trouvons regrettable de ne pas aller un tout petit peu plus loin. À bien y regarder, nous venons d'établir que si  $x$  est une application pilotée par le couple  $(a, b)$ , il existe une constante réelle, à savoir

$$k = x(0)$$

telle que

$$\forall t \geq 0 \quad x(t) = -\frac{b}{a} + \left(k + \frac{b}{a}\right)e^{at}$$

Le point important est qu'il y a une réciproque à cela. Il est en effet facile de vérifier que *toutes* les applications ayant le *look*

$$t \mapsto -\frac{b}{a} + \left(k + \frac{b}{a}\right)e^{at}$$

où  $k$  est *n'importe quelle* constante réelle, sont pilotées par le couple  $(a, b)$ . En conséquence, les applications pilotées par le couple  $(a, b)$ , sont, ni plus, ni moins, que celles de type

$$t \mapsto -\frac{b}{a} + \left(k + \frac{b}{a}\right)e^{at}$$

(\*) L'argument est crucial ! D'aucuns l'ayant oublié un certain matin du mois de mai 1982 en gardent encore un souvenir très amer...

où  $k$  est *n'importe quelle* constante réelle.

c. Comme  $a$  n'est décidément pas nul le système en question n'a évidemment qu'un unique équilibre en l'occurrence

$$x^* = -\frac{b}{a}$$

Pour le reste, organisons-nous en deux temps.

– Supposons que  $x^*$  soit attractif. La pertinente remarque faite à l'issue de la précédente révèle que l'application

$$x : t \mapsto -\frac{b}{a} + e^{at}$$

attachée au judicieux choix de la constante

$$k = -\frac{b}{a} + 1$$

est pilotée par le couple  $(a, b)$ . On déduit alors de l'attractivité que

$$e^{at} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$$

et les *aficionados exponentiels* savent bien que cela impose inéluctablement la *stricte* négativité de  $a$ .

– Supposons, réciproquement, que  $a$  soit strictement négatif et annonçons une application  $x$  pilotée par le couple  $(a, b)$ . La question précédente révélant alors que

$$\forall t \geq 0 \quad x(t) = -\frac{b}{a} + \left(x(0) + \frac{b}{a}\right)e^{at}$$

il s'ensuit implacablement que

$$x(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} -\frac{b}{a}$$

ce qui ne peut que nous réjouir.

2.a. La matrice  $A$  étant mentalement inversible — son déterminant vaut 3 — notre système a effectivement un équilibre unique  $x^*$  déterminé par l'égalité

$$X^* = -A^{-1} \cdot B = -A^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

L'importante formule des cofacteurs — inverse d'une matrice d'ordre deux — nous apprenant que

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

il s'ensuit aisément que

$$X^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

et autant dire alors *in fine* que

$$x^* = (1, 1) = b$$

b. La matrice  $A$  est symétrique réelle d'ordre non nul et grâce au théorème spectral elle est *orthodiagonalisable*. La messe est donc définitivement dite.

Regrettons simplement que le texte n'appelle point un chat un chat. Est-ce un gros mot d'évoquer la notion de « matrice orthogonale » ?

c. Il s'agit de procéder à l'*orthodiagonalisation* de la matrice  $A$  et nous espérons que l'impétrant est rompu à ce genre d'activité. Il remarquera à cet effet que

$$A = J_2 - 3I_2$$

où  $J_2$  est l'archi classique matrice  $(2, 2)$  dont les entrées sont toutes égales à un et comme il est cultivé, il n'ignore sûrement pas que les éléments propres de cette dernière sont

$$\text{Spec } J_2 = \{0, 2\}$$

puis

$$E_0(J_2) = \text{Vect} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad ; \quad E_2(J_2) = \text{Vect} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Il s'ensuit alors *affinement* que

$$\text{Spec } A = \{-3, -1\}$$

puis

$$E_{-3}(A) = \text{Vect} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad ; \quad E_{-1}(A) = \text{Vect} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Il ne reste plus qu'à orthonormaliser les bases de nos deux espaces-propres ce qui se fera par exemple *via*

$$E_{-3}(A) = \text{Vect} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad ; \quad E_{-1}(A) = \text{Vect} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

et l'affaire sera désormais terminée si nous proposons

$$\lambda = -3 \quad ; \quad \mu = -1 \quad ; \quad Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

d. Le chapeau du tout début du texte a défini la dérivation vectorielle de la fameuse façon dite « composante à composante ». Il devrait alors naturellement en résulter que  $W$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  et que

$$\forall t \geq 0 \quad W'(t) = Q^T \cdot X'(t)$$

Nous laissons à notre valeureux ami le soin de se charger de l'intendance. Passons maintenant à la suite.

i. Soit  $t \geq 0$ . Le pilotage de notre système se traduit par

$$X'(t) = A \cdot X(t) + B$$

ce que notre orthodiagonalisation transforme en

$$X'(t) = Q \cdot D \cdot Q^T \cdot X(t) + B$$

Multiplions alors à gauche par  $Q^T = Q^{-1}$ , donnons la parole au *physio* et voilà qu'effectivement

$$W'(t) = D \cdot W(t) + Q^T \cdot B$$

ii. Soit à nouveau  $t \geq 0$ . Comme

$$Q^T \cdot B = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

la précédente égalité matricielle se détricote en les deux systèmes scalaires

$$w_1'(t) = -3w_1(t) \quad \text{et} \quad w_2'(t) = -w_2(t) + \sqrt{2}$$

respectivement pilotés par les couples

$$(-3, 0) \quad \text{et} \quad (-1, \sqrt{2})$$

L'indiscutable négativité stricte des deux compères  $\lambda$  et  $\mu$  et la scalaire question 1 sont alors catégoriques. Nous devons attractivement avoir

$$w_1(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad w_2(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} \sqrt{2}$$

à telle enseigne que

$$W(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Comme il est orthogonalement acquis que

$$X(t) = Q \cdot W(t)$$

il s'en déduit(\*) très tranquillement que

$$X(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} Q \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

ce qui, après un rapide calcul mental, devient

$$X(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(\*) Comme cochon !

chronique d'une attractivité annoncée...

3.a. Il suffit d'appliquer le protocole de *matricialisation*. Nous trouvons alors

$$A_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{c|c} 0 & I_{p-1} \\ \hline I_1 & 0 \end{array} \right]$$

Les  $p$  colonnes de cette matrice sont, à un petit désordre près, les colonnes *canoniques* de l'espace vectoriel  $M_{p,1}(\mathbb{C})$ . Autant dire alors qu'elles forment une famille libre ce qui nous amène tout naturellement à

$$\text{rg } A_p = p$$

b. Il ne fait aucun doute que

$$A_p \cdot G = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \vdots \\ \varepsilon^{p-1} \\ 1 \end{bmatrix}$$

et comme précisément  $\varepsilon^p = 1$  cela se métamorphose très opérationnellement en

$$A_p \cdot G = \varepsilon G$$

Vu sa toute première entrée la colonne  $G$  n'est assurément pas nulle(\*) et la voilà donc désormais vecteur propre de  $A_p$  attachée à la valeur propre  $\varepsilon$ .

c. À bien y regarder, nous venons de démontrer que *toute* racine  $p^{\text{ième}}$  de l'unité est une valeur propre de  $A_p$  et nous savons bien qu'il y en a exactement  $p$  différentes. Notre matrice  $A_p$ , carrée d'ordre  $p$ , possède donc  $p$  valeurs propres *différentes* et si l'on en croit une certaine condition suffisante, elle doit impérativement se diagonaliser. Son acolyte  $u_p$  est alors prié de faire la même chose. Ajoutons, juste pour causer, que

$$\text{Spec } u_p = \text{Spec } A_p = \mathbb{U}_p$$

où  $\mathbb{U}_p$  désigne l'ensemble des racines  $p^{\text{ièmes}}$  de l'unité.

d. Écrivons par exemple

$$\mathbb{U}_p = \{z_1, \dots, z_p\}$$

La récente question c produit une base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{C}^p$  pour laquelle

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_p) = \text{diag}(z_1, \dots, z_p)$$

égalité qui nous amène diagonalement à

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_p^p) = \text{diag}(z_1^p, \dots, z_p^p) = \text{diag}(1, \dots, 1) = I_p$$

(\*) *Never forget!*

la pénultième égalité profitant de ce que la puissance  $p^{\text{ième}}$  d'une racine  $p^{\text{ième}} \dots$

Il en résulte dans la foulée que

$$u_p^p = \text{Id}$$

et le polynôme  $X^p - 1$  est bien annulateur de notre affaire.

Soit pour finir  $M$  un polynôme annulateur non nul de  $u_p$ . Comme nous n'avons pas égaré l'important thème « annulateur et spectre », il devrait sur-le-champ s'ensuire

$$\text{Spec } u_p \subset \text{root } M$$

Les différents complexes  $z_1, \dots, z_p$  sont à présent des racines du polynôme *non nul*  $M$  ce qui oblige inéluctablement

$$\deg M \geq p$$

La réponse à la question posée est donc irrévocablement non !

† Les initiés auront reconnu en  $X^p - 1$  le polynôme *minimal* de l'endomorphisme  $u_p$ . Parmi ses annulateurs non nuls, c'est de loin *the best* !

e. Nous repartons de l'égalité

$$\text{Mat}_B(u_p) = \text{diag}(z_1, \dots, z_p)$$

que nous avons écrite quelques lignes plus haut. Il en résulte cette fois que

$$\text{Mat}_B(P(u_p)) = \text{diag}(P(z_1), \dots, P(z_p))$$

et par conséquent  $P(u_p)$  est diagonalisable, son spectre étant donné par

$$\text{Spec } P(u_p) = \{P(z_1), \dots, P(z_p)\}$$

quelques répétitions, *here and there*, étant assurément possibles...

4.a. Nous avons ici

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et l'impétrant doit prendre l'initiative de calculer le carré de cette dernière ce qui devrait l'amener à

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

i. Le *physio* se réveille alors en se réclamant de l'égalité

$$M = \beta A^2 + \alpha A - I_3$$

ce qui nous permet, dans la foulée, de proposer

$$P = \beta X^2 + \alpha X - 1$$

ii. L'ensemble des racines cubiques de l'unité est bien connu. Il s'agit de

$$\mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\} = \{1, j, \bar{j}\}$$

où le complexe  $j$  est au choix

$$j = e^{2i\pi/3} \quad \text{ou} \quad j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

La récente question 3.e et la précédente stipulent alors de concert que

$$\text{Spec } M = \left\{ \beta + \alpha - 1, \beta j^2 + \alpha j - 1, \beta j + \alpha j^2 - 1 \right\}$$

Quelques calculs anodins, laissés à la charge du lecteur dévoué, conduisent alors aux résultats suivants :

valeur propre	$\beta + \alpha - 1$	$\beta j^2 + \alpha j - 1$	$\beta j + \alpha j^2 - 1$
partie réelle	$\beta + \alpha - 1$	$-\frac{\alpha + \beta + 2}{2}$	$-\frac{\alpha + \beta + 2}{2}$
partie imaginaire	0	$(\alpha - \beta)\frac{\sqrt{3}}{2}$	$(\beta - \alpha)\frac{\sqrt{3}}{2}$

b. Les hypothèses

$$\alpha + \beta \neq 1 \quad ; \quad \alpha > 0 \quad ; \quad \beta > 0$$

assurent déjà que les parties réelles de nos valeurs propres ne sont pas nulles ce qui, *a fortiori*, oblige

$$0 \notin \text{Spec } M$$

i. Selon le test du spectre la matrice  $M$  est inversible et le système en question a effectivement un unique équilibre  $x^*$  naturellement cousin de la colonne

$$X^* = -M^{-1} \cdot C$$

Il est évidemment hors de question de chercher à calculer la matrice  $M^{-1}$  pour la simple et bonne raison qu'elle doit avoir une tête plus que patibulaire !

Il est préférable de remarquer que la somme des éléments de chaque ligne de  $M$  est toujours égale à  $\alpha + \beta - 1$ . Il s'ensuit alors très classiquement que

$$M \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = (\alpha + \beta - 1) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

c'est-à-dire

$$M \cdot C = (\alpha + \beta - 1) \cdot C$$

et comme  $M$  est toujours inversible, voilà bien après multiplication à gauche que

$$C = (\alpha + \beta - 1)M^{-1} \cdot C$$

Il a déjà été dit que  $\alpha + \beta - 1$  n'est pas nul et nous pouvons alors revendiquer

$$X^* = -\frac{1}{\alpha + \beta - 1} \cdot C$$

C'est maintenant en tournant la tête de  $\pi/2$  qu'apparaît *in fine* l'égalité

$$x^* = -\frac{1}{\alpha + \beta - 1} \cdot c$$

ii. L'application  $x$  est à coup sûr dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  et l'on a sans surprise

$$\forall t \geq 0 \quad X'(t) = (\alpha + \beta - 1)e^{(\alpha + \beta - 1)t} \cdot C$$

À côté de cela, pour tout réel  $t$  positif, l'on a également

$$M \cdot X(t) = M \cdot X^* + e^{(\alpha + \beta - 1)t} \cdot M \cdot C$$

Il reste alors à mettre en avant les mentales égalités

$$M \cdot X^* = -C \quad \text{et} \quad M \cdot C = (\alpha + \beta - 1)C$$

pour que le *physio* se mette à clamer que

$$M \cdot X(t) = -C + X'(t)$$

chronique d'un pilotage annoncé...

iii. Supposons que  $x^*$  soit attractif. Comme la toute récente  $x$  est pilotée par le couple en question, nous devons avoir

$$e^{(\alpha + \beta - 1)t}c \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$$

ce qui, parce que le vecteur  $c$  a au moins(\*) une entrée non nulle, se doit d'obliger

$$e^{(\alpha + \beta - 1)t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$$

Les *aficionados exponentiels* sont à nouveau mis à contribution. *No doubt that*

$$\alpha + \beta - 1 < 0$$

(\*) Il en a carrément trois !

Voici donc une condition nécessaire intéressante, à savoir

$$x^* \text{ attractif} \implies \alpha + \beta < 1$$

¶ Il y a ici un petit souci. Il n'y malheureusement pas *unicité* d'une telle condition puisque par exemple

$$x^* \text{ attractif} \implies \alpha + \beta \neq 3$$

ou pire, pour plaisanter un peu

$$x^* \text{ attractif} \implies \pi \text{ est irrationnel}$$

sont également nécessaires !

L'article définit la phrase : « On suppose désormais que la condition précédente... » est donc quelque part déplacé. Il y avait donc intérêt à tomber d'emblée sur la bonne condition !

c. En ouvrant bien les mirettes, on trouve aisément

$$N = (\alpha + \beta)J_3 - (\alpha + \beta + 2)I_3$$

où  $J_3$  est ici la matrice carrée d'ordre trois dont toutes les entrées sont égales à 1.

i. *Everybody knows that*

$$\text{Spec } J_3 = \{0, 3\}$$

et il s'ensuit *affinement* que

$$\text{Spec } N = \{-(\alpha + \beta + 2), 2(\alpha + \beta - 1)\}$$

ii. Le récent et textuel « désormais » assurant que

$$\alpha + \beta < 1$$

le lecteur n'aura aucun mal à se persuader que le réel

$$\theta = 1 - (\alpha + \beta)$$

fait *farpaitement* l'affaire.

¶ Il est important de noter que le réel  $-2\theta$  est en réalité la plus grande valeur propre de la matrice  $N$ .

d.i. Bien entendu l'application  $y$  est tout aussi dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  que sa copine  $x$  et l'on a tranquillement

$$\forall t \geq 0 \quad Y'(t) = X'(t) = M \cdot X(t) + C = M \cdot (X(t) - X^*)$$

la dernière égalité profitant de ce que depuis une fort belle lurette, nous avons en *équilibre*

$$M \cdot X^* = -C$$

Autant dire alors que

$$\forall t \geq 0 \quad Y'(t) = M \cdot Y(t)$$

and Bob's your uncle !

ii. Nous avons déjà observé que l'application  $Y$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  et comme

$$\|Y\|^2 = Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2$$

il en est généralement de même de l'application  $\|Y\|^2$ . En outre et mentalement, nous avons

$$\forall t \geq 0 \quad (\|Y\|^2)'(t) = 2Y_1(t)Y_1'(t) + 2Y_2(t)Y_2'(t) + 2Y_3(t)Y_3'(t)$$

ce qui, très *scalairement*, devient la plus jolie

$$\forall t \geq 0 \quad (\|Y\|^2)'(t) = 2 \langle Y(t), Y'(t) \rangle = 2 \langle Y(t), M \cdot Y(t) \rangle$$

puisque l'application  $y$  a récemment décidé de copiloter  $(M, 0)$ . La dérivabilité de  $\varphi$  s'en déduit aussi charitablement et de plus

$$\forall t \geq 0 \quad \varphi'(t) = e^{2\theta t} \left( 2\theta \|Y(t)\|^2 + 2 \langle Y(t), M \cdot Y(t) \rangle \right)$$

la farouche volonté de n'avoir pas mis « 2 » en facteur étant dictée par ce qui va suivre.

Soit alors  $t$  positif. La symétrie du produit scalaire autorise l'égalité

$$\langle Y(t), M \cdot Y(t) \rangle = \langle M \cdot Y(t), Y(t) \rangle$$

et la machinerie canonique se met alors en route en indiquant tout d'abord que

$$\|Y(t)\|^2 = Y(t)^T \cdot Y(t)$$

en révélant ensuite que

$$\langle Y(t), M \cdot Y(t) \rangle = Y(t)^T \cdot (M \cdot Y(t)) = Y(t)^T \cdot M \cdot Y(t)$$

et en assénant enfin que

$$\langle M \cdot Y(t), Y(t) \rangle = (M \cdot Y(t))^T \cdot Y(t) = Y(t)^T \cdot M^T \cdot Y(t)$$

la toute dernière égalité reposant sur l'inénarrable « *dressing undressing principle* ».

C'est alors la *tricky* écriture

$$2 \langle Y(t), M \cdot Y(t) \rangle = \langle Y(t), M \cdot Y(t) \rangle + \langle M \cdot Y(t), Y(t) \rangle$$

ou, ce qui revient dorénavant au même

$$2 \langle Y(t), M \cdot Y(t) \rangle = Y(t)^T \cdot M \cdot Y(t) + Y(t)^T \cdot M^T \cdot Y(t)$$

qui nous amène après ouverture des mirettes à

$$2 \langle Y(t), M \cdot Y(t) \rangle = Y(t)^T \cdot N \cdot Y(t)$$

Le résultat des courses est alors

$$\varphi'(t) = e^{2\theta t} \left( 2\theta Y(t)^T \cdot Y(t) + Y(t)^T \cdot N \cdot Y(t) \right)$$

égalité qu'une bénigne réorganisation métamorphose effectivement en

$$\varphi'(t) = e^{2\theta t} \cdot Y(t)^T \cdot (2\theta I_3 + N) \cdot Y(t)$$

iii. La matrice  $N$  est ouvertement symétrique réelle et nous avons déjà signalé que le réel  $-2\theta$  est sa plus grande valeur propre. L'importante majoration(\*) de Rayleigh-Ritz assure alors que, pour toute colonne  $X$  réelle de hauteur 3, l'on a

$$X^T \cdot N \cdot X \leq -2\theta \|X\|^2$$

ou, ce qui revient quasiment au même

$$X^T \cdot (N + 2\theta I_3) \cdot X \leq 0$$

Soit alors à nouveau  $t \geq 0$ . Il résulte de notre dernier *scoop* et de la légendaire positivité exponentielle que

$$\varphi'(t) \leq 0$$

et comme  $\mathbb{R}_+$  est un *intervalle*...

iv. La fonction  $\varphi$  est désormais *décroissante* sur  $\mathbb{R}_+$  et à bien y regarder elle y est également *minorée* par zéro. Cela déclenche le colossal théorème de la limite monotone et voilà donc que  $\varphi$  a une limite finie en plus l'infini. Comme

$$\forall t \geq 0 \quad \|Y(t)\|^2 = e^{-2\theta t} \cdot \varphi(t)$$

et parce que  $\theta$  est *strictement* positif l'on conclut aisément que

$$\|Y(t)\|^2 \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$$

d'où il ressort très facilement que

$$y(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$$

Vu les origines de la fonction  $y$  il s'ensuit carrément que

$$x(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} x^*$$

chronique d'une attractivité annoncée...

¶ Il est alors l'heure de peaufiner la condition nécessaire de la question 4.b.iii. Nous avons à l'avenir l'équivalence logique

$$x^* \text{ attractif} \iff \alpha + \beta - 1 < 0$$

¶ Nous avons le sentiment qu'il y ait eu un peu de flottement à propos des hypothèses faites au tout début au sujet des réels  $\alpha$  et  $\beta$ . Il semble que nous n'ayons utilisé que les conditions

$$\alpha + \beta \neq 1 \quad \text{et} \quad \alpha + \beta \geq 0$$

(\*) On rappelle qu'il y a en réalité un encadrement de Rayleigh-Ritz mais sa minoration ne semble pas ici passionner les foules...

## Partie 2

5. L'hypothèse  $\nu > -1$  a entre-autre avantage de bien définir les fonctions  $x_1$  et  $x_2$  sur l'intervalle  $\mathbb{R}_+$  ainsi que d'y certifier leur dérivabilité.

a. Soit  $t \geq 0$ . Nous avons

$$x_1'(t) = x_2'(t) = \frac{\nu e^{-t}}{(1 + \nu e^{-t})^2}$$

alors que

$$F_1(x_1(t), x_2(t)) = F_2(x_1(t), x_2(t)) = (1 - x_1(t))x_1(t) = \frac{\nu e^{-t}}{(1 + \nu e^{-t})^2}$$

la toute dernière version procédant d'une minuscule réduction au même dénominateur. Nous pouvons donc aller de l'avant.

b. Soit  $c$  appartenant à l'ouvert  $]0, 1[$ . Il existe un réel  $\nu$  strictement positif d'ailleurs tel que

$$\frac{1}{1 + \nu} = c$$

et il s'agit ni plus, ni moins que de

$$\nu = \frac{1 - c}{c}$$

Les récentes fonctions  $x_1$  et  $x_2$  de la précédente question sont alors ouvertement croissantes et ont pour tableau de variations

$t$	0	$+\infty$
$x_i'$	+	
$x_i$	$c$	$\nearrow$ 1

Le couple  $(x_1, x_2)$  est depuis peu solution de  $(S)$  et il est désormais à valeurs dans l'ensemble

$$([c, 1])^2$$

Comme l'on a l'inclusion

$$([c, 1])^2 \subset ([c, +\infty[)^2$$

la conclusion est claire mais on peut légitimement se poser la question de la possible faute de frappe...

c. Procédons par la délicieuse route de l'analyse-synthèse.

– Supposons que  $(x_1^*, x_2^*)$  soit un tel couple. Comme il s'agit d'un couple de réels non nuls, nous revendiquons tout d'abord le système

$$\begin{cases} 1 - x_1^* + \rho(x_2^* - x_1^*) = 0 \\ 1 - x_2^* + \rho(x_1^* - x_2^*) = 0 \end{cases}$$

L'addition membre à membre de ces deux égalités conduit gentiment à

$$x_1^* + x_2^* = 2$$

alors que leur soustraction amène en douceur à

$$(2\rho + 1)(x_2^* - x_1^*) = 0$$

Comme le réel  $1 + 2\rho$  n'a jamais eu l'intention saugrenue de s'annuler il semble que nous en sommes *in fine* à

$$x_1^* + x_2^* = 2 \quad \text{et} \quad x_1^* = x_2^*$$

d'où il ressort *de memoria* que fatalement

$$x_1^* = x_2^* = 1$$

Cette pertinente conclusion d'analyse montre que, quoi qu'il arrive, unicité il y aura dans notre projet, et nous pouvons alors entamer la synthèse.

— Ce n'est qu'une formalité — nous la laissons *as usual* à l'impétrant — que de vérifier que le couple  $(1, 1)$  est profondément convenable et il y a donc effectivement qu'un seul couple digne d'intérêt, en l'occurrence

$$x^* = (1, 1)$$

*d.* Considérons le couple fonctionnel  $(x_1, x_2)$  dont les deux entrées sont égales à l'application nulle. Il est assurément solution de  $(S)$  mais pourtant...

La réponse à la question posée est donc définitivement non.

† Le verbe « converger » est ici totalement déplacé puisque l'objet concerné n'est ni une suite, ni une série, ni même une intégrale impropre...

6. Il y a dans cette question une ou deux choses non officiellement claires que nous nous efforçons de décanter.

DÉFINITION :

Soit  $n$  un entier naturel non nul,  $A$  une matrice symétrique réelle d'ordre  $n$  et  $q$  la forme quadratique sur  $\mathbb{R}^n$  attachée à la matrice  $A$ . On dit que  $A$  est définie positive si

$$\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\} \quad X^T \cdot A \cdot X > 0 \quad (\text{DP})$$

L'ensemble des matrices symétriques réelles définies positives est internationalement noté

$$S_n^{+*} \quad \text{ou} \quad S_n^{++}$$

et il a une importance considérable à de nombreux endroits de la mathématique.

La condition (DP) s'écrit également

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad q(x) > 0$$

et l'application  $q$  prend à son tour le nom de forme quadratique définie positive.

CARACTÉRISATION SPECTRALE :

Soit  $n$  un entier naturel non nul et  $A$  une matrice symétrique réelle d'ordre  $n$ . On a l'équivalence logique

$$A \in S_n^{+*} \iff \text{Spec } A \subset \mathbb{R}_+^*$$

ce que le frenchy traduit en disant qu'une matrice symétrique réelle est définie positive si, et seulement si, ses valeurs propres sont strictement positives.

a. Soit  $r$  un nombre réel. Il est très facile de constater que

$$\text{Spec } Q_r = \{1 - r, 1 + r\}$$

Les valeurs propres de  $Q_r$  ne sont donc strictement positives qu'à la condition *sine qua non* que le réel  $r$  appartienne à l'ouvert  $] - 1, 1[$ . Il résulte alors de nos mises au clair que

$$q_r \text{ définie positive} \iff |r| < 1$$

Poursuivons notre affaire. Si cela ne dérange personne et parce que nous le valons bien nous utiliserons ici(\*) les lettres  $x$  et  $y$  en place de  $u_1$  et  $u_2$  à telle enseigne que nous avons *quadratiquement*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad q_r(x, y) = x^2 + y^2 - 2rxy$$

– Notons alors tout d'abord que

$$q_r(1, 0) = 1$$

ce qui prouve déjà que  $C_r$  est une partie *non vide* de  $\mathbb{R}^2$ .

– Observons ensuite que les formes quadratiques sur *tous* les  $\mathbb{R}^n$  du monde y sont polynomialement continues et que  $C_r$  est précisément l'image réciproque du fermé  $\{1\}$  de  $\mathbb{R}$  par la forme quadratique  $q_r$ . N'en déplaise alors à Felix Hausdorff, l'ensemble  $C_r$  est une partie *fermée* de  $\mathbb{R}^2$ .

† Il est important de constater que ces deux premières propriétés sont d'actualité pour n'importe quelle valeur du réel  $r$ . C'est pour la troisième qui va immédiatement suivre que nous annonçons  $r$  vérifiant désormais

$$|r| < 1$$

– Ce troisième et dernier point point est un peu plus délicat à négocier. Soit  $(x, y)$  appartenant à  $C_r$ . Nous avons

$$x^2 + y^2 = 1 + 2rxy$$

(\*) Il nous arrivera plus tard de faire également le même choix !

d'où il ressort *absolument* que

$$x^2 + y^2 \leq 1 + 2|xy| \cdot |r| \leq 1 + (x^2 + y^2) \cdot |r|$$

la dernière inégalité provenant, positivement, de la très classique majoration

$$2|xy| \leq x^2 + y^2$$

*remarquablement* connue de tous les potaches du collège ! Nous en sommes ainsi à

$$(1 - |r|)(x^2 + y^2) \leq 1$$

Oui mais voilà, il est bien précisé ici que

$$1 - |r| > 0$$

à telle enseigne que

$$x^2 + y^2 \leq \frac{1}{1 - |r|}$$

Cela montre imparablement que  $\mathcal{C}_r$  est incluse dans une boule fermée de centre l'origine et dont le malicieux lecteur débusquera le rayon. À ce titre l'ensemble  $\mathcal{C}_r$  est une authentique partie *bornée* de  $\mathbb{R}^2$ .

En résumé, lorsque  $q_r$  est définie positive, l'ensemble  $\mathcal{C}_r$  est une partie fermée, bornée et non vide de  $\mathbb{R}^2$  ce qui devrait bientôt intéresser un certain Karl...

b. Nous mettons en avant les deux allégations suivantes.

- Vu l'idyllique position de  $r$ ,  $\mathcal{C}_r$  est une partie fermée, bornée et non vide de  $\mathbb{R}^2$ .
- Au riche de radoter, la forme quadratique  $q_s$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$  et elle l'est donc *a fortiori* sur  $\mathcal{C}^r$ .

Cela déclenche sur-le-champ l'important théorème d'optimisation de Karl Weierstrass et, sur l'ensemble  $\mathcal{C}_r$  s'entend, l'application  $q_s$  possède un *maximum* et un *minimum* et puis c'est tout !

¶ Pourquoi diable compliquer les choses en parlant de bornes et d'atteinte ?

c. Nous avons déjà évoqué la continuité des formes quadratiques. Elles ont en réalité beaucoup plus de classe que cela et en particulier la classe  $\mathcal{C}^1$ . C'est donc le cas de l'application  $q_r$  sur le grand ouvert  $\mathbb{R}^2$  et nous avons en outre

$$\forall u \in \mathbb{R}^2 \quad \nabla q_r(u) = 2(u_1 - ru_2, u_2 - ru_1)$$

Soit maintenant  $u$  appartenant à  $\mathcal{C}_r$  et supposons par l'absurde que

$$\nabla q_r(u) = 0$$

Vu la position géographique de  $r$  on en déduit mentalement que  $u$  est nul ce qui n'est pas très sérieux puisqu'il se trouve dans  $\mathcal{C}_r$ ...

Bref,

$$\forall u \in \mathcal{C}_r \quad \nabla q_r(u) \neq 0$$

et tout le monde est ravi.

d. Il suffit de demander !

CONDITION NÉCESSAIRE DU PREMIER ORDRE :

L'application  $q_s$  est quadratiquement de classe  $\mathcal{C}^1$  sur l'ouvert  $\mathbb{R}^2$  et la contrainte d'appartenance à  $\mathcal{C}_r$  est non critique. Dans ces conditions, si l'application  $q_s$  admet en un point  $u$  de  $\mathbb{R}^2$  un extremum local sous la contrainte  $\mathcal{C}_r$ , il faut impérativement que

i. Le point  $u$  appartienne à  $\mathcal{C}_r$ .

ii. Il existe un réel  $\lambda$  tel que

$$\nabla q_s(u) = \lambda \nabla q_r(u)$$

On dit alors que  $u$  est un point critique de la fonction  $q_s$  sous la contrainte  $\mathcal{C}_r$ .

e. Nous commençons par rechercher les points critiques de  $q_s$  sous la contrainte  $\mathcal{C}_r$  et parce que c'est plus *zouli* nous préférons encore une fois  $x$  et  $y$  à  $u_1$  et  $u_2$ .

– Supposons que  $(x, y)$  soit un tel point. D'après la récente question de cours, nous devons avoir

$$(x, y) \in \mathcal{C}_r$$

et il doit exister un réel  $\lambda$  tel que

$$(x - sy, y - sx) = \lambda(x - ry, y - rx)$$

ce qui peut se consigner dans le système

$$\begin{cases} (1 - \lambda)x + (\lambda r - s)y = 0 \\ (\lambda r - s)x + (1 - \lambda)y = 0 \\ x^2 + y^2 - 2rxy = 1 \end{cases}$$

On s'intéresse alors fortement au sous-système linéaire d'ordre deux que forment les deux premières équations. Il ne peut absolument pas être de Cramer sans quoi il n'aurait que la solution  $(0, 0)$  en totale opposition avec la troisième équation. Nous apprenons alors que son déterminant est nul, c'est-à-dire

$$(1 - \lambda)^2 = (\lambda r - s)^2$$

ou encore

$$1 - \lambda = \lambda r - s \quad \text{ou} \quad 1 - \lambda = s - \lambda r$$

Au vu et au su de l'idéale position du réel  $r$ , cela ne laisse que deux possibilités pour le sieur  $\lambda$ , en l'occurrence

$$\lambda_1 = \frac{1 + s}{1 + r} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{1 - s}{1 - r}$$

– Lorsque  $\lambda = \lambda_1$ , le report dans la première du système et la providentielle

$$s \neq r$$

conduisent tout d'abord à

$$y = -x$$

égalité qui, injectée dans la troisième, révèle gentiment

$$2x^2(1+r) = 1$$

c'est-à-dire

$$x = a \quad \text{ou} \quad x = -a$$

où, histoire d'alléger un peu les écritures, nous avons décidé du baptême

$$a = \frac{1}{\sqrt{2(1+r)}}$$

ouvertement autorisé par la gentille position stratégique de  $r$ .

– Lorsque  $\lambda = \lambda_2$ , c'est *mutatis mutandis* que l'on parvient cette fois à

$$y = x$$

égalité qui, injectée dans la troisième, révèle maintenant

$$2x^2(1-r) = 1$$

Autant dire alors que

$$x = b \quad \text{ou} \quad x = -b$$

où, histoire de délester le discours, nous avons ici opté pour

$$b = \frac{1}{\sqrt{2(1-r)}}$$

la position de  $r$  étant encore une fois au cœur du débat !

La conclusion de cette belle analyse(\*) nous apprend que les points critiques de  $q_s$  sous la contrainte  $C_r$  doivent nécessairement appartenir à l'ensemble

$$\{(a, -a), (-a, a), (b, b), (-b, -b)\}$$

Nous laissons à notre courageux lecteur le soin de se charger de la synthèse et il vérifiera que les quatre acolytes — non anonymes ! — que nous venons de croiser sont effectivement convenables.

Voilà donc que l'application  $q_s$  possède définitivement quatre points critiques sous la contrainte  $C_r$  et il s'agit du quatuor mis en évidence quelques lignes plus haut.

(\*) Car il s'agit bien d'une analyse !

Maintenant que les *seuils critiques* ont été atteints nous revenons à nos ovins, en l'occurrence le maximum et le minimum de l'application  $q_s$ . Selon la condition nécessaire énoncé plus haut ils doivent impérativement être atteints en l'un des points du quatuor et c'est là que nous faisons valoir que

$$q_s(a, -a) = q_s(-a, a) = \frac{1+s}{1+r} \quad \text{et} \quad q_s(b, b) = q_s(-b, -b) = \frac{1-s}{1-r}$$

les calculs se faisant à *la mano*, tout en ajoutant que

$$\frac{1+s}{1+r} < \frac{1-s}{1-r}$$

puisque après réduction au même dénominateur apparaît l'égalité

$$\frac{1-s}{1-r} - \frac{1+s}{1+r} = 2 \cdot \frac{r-s}{1-r^2}$$

Il n'en faut décidément pas plus pour revendiquer les égalités

$$m_{r,s} = \frac{1+s}{1+r} \quad \text{et} \quad M_{r,s} = \frac{1-s}{1-r}$$

tout en précisant que le minimum n'est atteint qu'aux points  $(a, -a)$  et  $(-a, a)$  et le maximum aux points  $(b, b)$  et  $(-b, -b)$ .

Soit pour finir  $u$  appartenant à  $\mathbb{R}^2$  et organisons-nous en deux temps.

- Si  $u \neq 0$ , la *définiepositivité* de  $q_r$  permet de considérer le vecteur

$$\frac{u}{\sqrt{q_r(u)}}$$

qui a *quadratiquement* le bon goût d'appartenir à  $\mathcal{C}_r$ , à telle enseigne que

$$q_s\left(\frac{u}{\sqrt{q_r(u)}}\right) \leq M_{r,s}$$

inégalité qui *requadratiquement* nous amène naturellement à

$$\frac{q_s(u)}{q_r(u)} \leq M_{r,s}$$

Un petit coup de positivité plus loin, nous voilà rendus à

$$q_s(u) \leq M_{r,s} q_r(u)$$

- Si  $u = 0$ , l'inégalité précédente reste manifestement d'actualité et la proposition

$$\mu = M_{r,s}$$

devra immanquablement satisfaire tout le monde.

† Nous venons d'établir que

$$\forall u \in \mathbb{R}^2 \quad q_s(u) \leq M_{r,s} q_r(u)$$

ce qui est infiniment plus abouti que la simple existence d'un réel  $\mu$  vérifiant

$$\forall u \in \mathbb{R}^2 \quad q_s(u) \leq \mu q_r(u)$$

Cette simple existence aurait pu aisément s'obtenir à moindre frais...

7.a. Quelques développements *remarquablement* collégiens nous persuadent quasi mentalement de l'égalité

$$q_r\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(v_1 - v_2, v_1 + v_2)\right) = (1-r)v_1^2 + (1+r)v_2^2$$

et l'équivalence logique s'en déduit aussitôt sans que, une fois n'est pas coutume, aucune planification ne s'impose.

† Nous laissons au dévoué lecteur le soin de découvrir que l'application de  $\mathbb{R}^2$  dans lui-même qui à chaque couple  $(v_1, v_2)$  fait correspondre le couple  $(u_1, u_2)$  c'est-à-dire l'application  $\rho_{\pi/4}$  définie par

$$\forall (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \quad \rho_{\pi/4}(v_1, v_2) = \frac{\sqrt{2}}{2}(v_1 - v_2, v_1 + v_2)$$

est loin d'être anodine. Il vérifiera quasi mentalement qu'il s'agit d'un *genuine* endomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  dont la matrice dans la base canonique est précisément

$$\text{Mat}_{\text{can}}(\rho_{\pi/4}) = \begin{bmatrix} \cos(\pi/4) & -\sin(\pi/4) \\ \sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{bmatrix}$$

puisque tout *trigophile* qui se respecte sait *farpaitement* que

$$\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Le géomètre dans l'âme aura alors reconnu la rotation de centre  $(0, 0)$  et d'angle  $\pi/4$ .

Nous ne pouvions évidemment pas passer sous silence d'aussi sérieuses et jolies choses...

b. Compte tenu de la fameuse question 7.a et de la plus *pythagoricienne* des formules de trigonométrie, l'on se doute que la route choisie va consister à créer un certain nombre de couples  $(v_1, v_2)$  — *grosso modo* une centaine ! — pour lesquels

$$\sqrt{1-r} \cdot v_1 \quad \text{et} \quad \sqrt{1+r} \cdot v_2$$

soient respectivement le cosinus et le sinus d'une *même* réel. Il devra alors impérativement s'ensuire que

$$(1-r)v_1^2 + (1+r)v_2^2 = 1$$

ce qui déposera le couple

$$(u_1, u_2) = \rho(v_1, v_2)$$

dans l'ensemble  $C_r$ , l'application  $\rho$  ayant eu nos faveurs à l'époque.

Allons donc voir avec impatience si c'est bien ce que fait le fameux code...

Nous ne nous attardons pas sur la première instruction qui se passe de tout commentaire(\*) et nous prenons alors les autres instructions les unes après les autres :

– après avoir consulté la manuel des *scilab* *seniors* nous affirmons que la commande (2) place dans la matrice ligne **theta** les cent points formant la subdivision uniforme — ou régulière — du segment  $[0, 2\pi]$ . Si l'on ne tombe pas dans l'éternel panneau du « poteaux *versus* intervalles », l'on en déduit que ces cent points sont les

$$\vartheta_k = k \cdot \frac{2\pi}{99} \quad \text{où } k \in \llbracket 0, 99 \rrbracket$$

et c'est d'ailleurs pour cette raison que nous aurions préféré  $n = 101$ ...

- l'instruction (3) place alors dans la matrice ligne nommée **ct** les réels

$$\cos \vartheta_k \quad \text{où } k \in \llbracket 0, 99 \rrbracket$$

- de la même façon, l'instruction (4) place dans la matrice ligne **st** les réels

$$\sin \vartheta_k \quad \text{où } k \in \llbracket 0, 99 \rrbracket$$

À ce stade là du code nous disposons de délicieux couples, en l'occurrence les

$$(\cos \vartheta_k, \sin \vartheta_k) \quad \text{où } k \in \llbracket 0, 99 \rrbracket$$

formés, comme prévu *supra*, de cosinus et de sinus d'un *même* réel.

Comme les réels  $1-r$  et  $1+r$  sont depuis longtemps *strictement* positifs(\*\*) nous pouvons définir les couples  $(v_{1k}, v_{2k})$  par les relations

$$\sqrt{1-r} \cdot v_{1k} = \cos \vartheta_k \quad \text{et} \quad \sqrt{1+r} \cdot v_{2k} = \sin \vartheta_k$$

puis récupérer leurs images  $(u_{1k}, u_{2k})$  par l'application  $\rho$  qui sont définies par

$$u_{1k} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-r}} \cos \vartheta_k - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+r}} \sin \vartheta_k \quad (S_1)$$

puis

$$u_{2k} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-r}} \cos \vartheta_k + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+r}} \sin \vartheta_k \quad (S_2)$$

(\*) À cela près que nous aurions préféré  $n=101$ ... *Nobody's perfect!*

(\*\*) Nous n'avons évidemment pas oublié que  $r$  vaut ici  $1/2$  mais c'est pour des raisons purement stratégiques que nous préférons prendre notre temps...

Nous décidons seulement maintenant d'aller plus loin en faisant valoir que  $r$  vaut ici  $1/2$  et que quelques tranquilles simplifications métamorphosent ainsi ces données en

$$u_{1k} = \cos \vartheta_k - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \vartheta \quad \text{et} \quad u_{2k} = \cos \vartheta_k + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \vartheta$$

– en ouvrant parfaitement les mirettes, l'instruction (5) remplit une matrice à deux lignes et 100 colonnes dont les entrées de la  $k^{\text{ième}}$  colonne sont *miraculeusement* les deux réels

$$\cos \vartheta_k - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \vartheta_k \quad ; \quad \cos \vartheta_k + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \vartheta_k$$

c'est-à-dire précisément  $u_{1k}$  et  $u_{2k}$  et dès lors

$$(u_{1k}, u_{2k}) \in \mathcal{C}_r$$

puisque tout s'est déroulé comme nous l'avons organisé quelques lignes plus haut.

– l'instruction (6) se charge pour finir de la partie *artistique* de l'affaire et, à la manière de Seurat, Signac, Pissaro et autres Verhaeren, la commande **plot** va imprimer les cent points

$$(u_{1k}, u_{2k}) \quad \text{où} \quad k \in \llbracket 0, 99 \rrbracket$$

de l'ellipse(\*)  $\mathcal{C}_r$  et donner ainsi le *zouli* dessin figurant dans le texte.

† La chose que l'on peut cependant déplorer est cette curieuse attitude qu'a eu *scilab* de ne pas placer les axes à la croisée des chemins...

c. La ligne de niveau  $z_0$  de la fonction  $q_s$  est, par définition, l'ensemble de tous les couples  $(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$  qui vérifient

$$q_s(u_1, u_2) = z_0$$

Comme  $q_s$  est une forme quadratique et que  $z_0$  est *strictement* positif, il s'agit également de l'ensemble des couples  $(u_1, u_2)$  pour lesquels

$$q_s\left(\frac{1}{\sqrt{z_0}}(u_1, u_2)\right) = 1 \quad \text{i.e.} \quad \frac{1}{\sqrt{z_0}}(u_1, u_2) \in \mathcal{C}_s$$

Nous avons bien compris comment la question *b* a géré le cas de  $\mathcal{C}_r$  and, sure, we aren't be borned yesterday. Nous décidons donc de ressortir les deux formules stratégiques (s) *supra*, d'y remplacer bêtement  $r$  par  $s = 1/4$  et d'y changer les  $u_{ik}$  en

$$\frac{u_{ik}}{\sqrt{z_0}}$$

Cela nous amène quasimentement aux nouvelles égalités

$$u_{1k} = \sqrt{z_0} \left[ \sqrt{\frac{2}{3}} \cos \vartheta_k - \sqrt{\frac{2}{5}} \sin \vartheta_k \right] \quad ; \quad u_{2k} = \sqrt{z_0} \left[ \sqrt{\frac{2}{3}} \cos \vartheta_k + \sqrt{\frac{2}{5}} \sin \vartheta_k \right]$$

(\*) Il se trouve que  $\mathcal{C}_r$  fait partie de la bande des fameuses coniques étudiées entre autres par Blaise Pascal et qui compte les ellipses, les paraboles et les hyperboles.

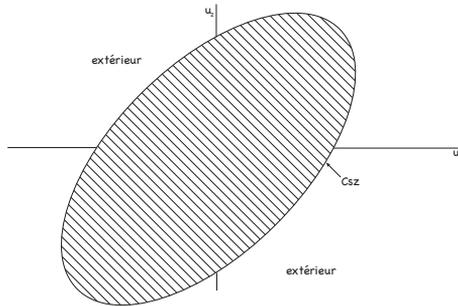
La complétion de la ligne (7) se fait alors en reconnaissant les siens. *Here you are !*

$$C_{sz} = [ \text{sqrt}(z) * (\text{sqrt}(2/3) * ct - \text{sqrt}(2/5) * st) ;$$

$$\text{sqrt}(z) * (\text{sqrt}(2/3) * ct + \text{sqrt}(2/5) * st) ] ;$$

instruction que nous avons dû écrire sur deux lignes parce qu'elle était décidément trop longue et nous prions du coup le lecteur de bien vouloir nous pardonner ce désagrément !

d. Nous ne disposons pas du *hawk-eye* pour être vraiment sûr que les deux ellipses se rencontrent mais nous allons être obligés de supposer que c'est la plus pure des réalités et nous allons être également contraints de lire(\*) sur le dessin que l'ellipse  $C_r$  est entièrement située dans la partie extérieure de sa cousine  $C_{sz}$  représentée sur la figure ci-dessous.



L'ellipse  $C_{sz}$  fait en réalité apparaître trois régions du plan :

- l'ellipse proprement dite, formée par les points  $u$  de  $\mathbb{R}^2$  vérifiant

$$q_s(u) = z_0$$

- la partie intérieure — hachurée sur la figure — correspondant aux points  $u$  de  $\mathbb{R}^2$  satisfaisant à

$$q_s(u) \leq z_0$$

et il s'agit évidemment d'une partie intérieure au sens large, c'est-à-dire ellipse comprise.

- la fameuse partie extérieure — au sens large *again* — décrite par les points  $u$  du plan pour lesquels

$$q_s(u) \geq z_0$$

Au vu et au su de ce que nos lectures graphiques nous ont apprises il semble inévitable que

$$\forall u \in C_r \quad q_s(u) \geq z_0$$

(\*) Bien que cela soit totalement prohibé par l'académie, nous n'avons ici pas le choix. Nous devons nous appuyer sur un croquis pour obtenir des informations fiables !

ce qui veut déjà dire que  $z_0$  minore la fonction  $q_s$  sur l'ensemble  $\mathcal{C}_r$  et comme nous avons bien deviné que les deux ellipses en question s'effleurent, notre minorant est atteint en au moins un point de  $\mathcal{C}_r$  à telle enseigne que

$$z_0 = \min_{\mathcal{C}_r} q_s \quad \text{i.e.} \quad z_0 = m_{r,s}$$

puisque nous n'avons pas égaré les notations adoptées lors de la sixième question. En outre et si l'on en croit l'*alinea* 6.e il semble que

$$m_{r,s} = \frac{1+s}{1+r}$$

et puisque nous sommes censés avoir supposé que

$$r = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad s = \frac{1}{4}$$

le résultat des courses est finalement

$$z_0 = \frac{5}{6}$$

Reste pour finir à causer de tangentes communes. Nous nous calons derechef sur l'éternel *alinea* 6.e qui permet d'affirmer que les points d'atteinte de notre minimum — les fameux points d'affleurement — sont

$$(a, -a) \quad \text{et} \quad (-a, a) \quad \text{où} \quad a = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

puisque, dans cette question  $r$  est définitivement égal à  $1/2$ , et que dans le cas général

$$a = \frac{1}{\sqrt{2(1+r)}}$$

Nous allons maintenant tourner la tête de  $\pi/4$  dans le sens des aiguilles d'une montre et travailler ainsi dans un nouveau repère dont les formules de changement se déduisent aisément de la *rotationnelle* remarque que nous avons faite à l'issue de la question 7.a, à savoir

$$(u_1, u_2) = \rho_{\pi/4}(v_1, v_2) = \frac{\sqrt{2}}{2}(v_1 - v_2, v_1 + v_2)$$

ou si l'on préfère l'envers du décor

$$(v_1, v_2) = \rho_{-\pi/4}(u_1, u_2) = \frac{\sqrt{2}}{2}(u_1 + u_2, u_1 - u_2)$$

Dans ce nouveau décor, les choses vont se passer de la façon suivante

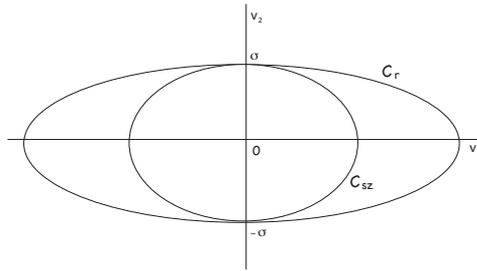


figure elliptique

une des raisons essentielles étant que les fameux points d'affleurement ont aisément pour nouvelle adresse

$$\rho_{-\pi/4}(a, -a) \quad ; \quad \rho_{-\pi/4}(-a, a) \quad \text{où} \quad a = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

c'est-à-dire

$$(0, \sigma) \quad ; \quad (0, -\sigma) \quad \text{où} \quad \sigma = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Nous mettons en outre en avant deux choses :

– au vu et au su de la question 7.a — encore elle ! — la toute nouvelle équation de l'ellipse  $\mathcal{C}_r$  est

$$\frac{1}{2}v_1^2 + \frac{3}{2}v_2^2 = 1$$

– grâce à la même source mais légèrement modifiée, celle de l'ellipse  $\mathcal{C}_{sz}$  est à son tour

$$\frac{3}{4}v_1^2 + \frac{5}{4}v_2^2 = \frac{5}{6}$$

puisqu'on nous a récemment découvert que  $z_0$  se doit de valoir  $5/6$ .

Considérons alors la partie *nord* de la figure elliptique précédente — celle située au nord de l'axe des abscisses — qui met en scène deux demi-ellipses dont il est facile de constater que ce sont les représentations graphiques des fonctions

$$v_1 \mapsto \sigma \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{2}} \quad \text{et} \quad v_1 \mapsto \sigma \sqrt{1 - \frac{9v_1^2}{10}}$$

où  $\sigma$  a été défini quelques lignes plus haut. Nous laissons désormais au lecteur le soin de vérifier que ce sont deux applications dérivables en zéro et dont les dérivées en zéro sont nulles. Les deux courbes ont donc à leur pôle nord  $(0, \sigma)$  la même tangente horizontale.

Les événements du *sud* n'auront droit, quant à eux, qu'aux deux mots magiques que sont les compères *mutatis* et *mutandis*.

8. Comme  $x_1$  et  $x_2$  sont dérivables sur  $\mathbb{R}_+$ , il en est évidemment de même de  $y_1$  et  $y_2$  puis ensuite de  $f$  parce que

$$f = y_1^2 + y_2^2 - 2s y_1 y_2$$

*Everything is therefore under control!*

† Nous sommes permis au passage de raisonner fonctionnellement ce qui permet de gommer les pollueurs «  $(t)$  » et dans la foulée, de nous faire des vacances !

† Comme  $\rho$  est strictement positif il en est de même de  $\rho + 1$  et sa place au dénominateur n'est donc pas usurpée. Nous ne le redirons plus !

a. On trouve aisément

$$f' = 2y_1'(y_1 - sy_2) + 2y_2'(y_2 - sy_1)$$

et nous allons nous occuper séparément des deux compères du *right hand side*.

– Solution de  $(S)$  oblige, nous avons par hypothèse

$$y_1' = x_1' = x_1(\rho(x_2 - x_1) - (x_1 - 1)) = x_1(\rho(y_2 - y_1) - y_1)$$

la dernière égalité ne réclamant que les mirettes dans l'axe des verres ! Il suffit alors de bien capter que tour à tour

$$\rho(y_2 - y_1) - y_1 = \rho y_2 - (\rho + 1)y_1 = -(\rho + 1)(y_1 - sy_2)$$

pour apprendre que s'agissant de notre premier compère l'on a

$$2y_1'(y_1 - sy_2) = -2(\rho + 1)x_1(y_1 - sy_2)^2$$

– On démontre *mutatis mutandis* que

$$2y_2'(y_2 - sy_1) = -2(\rho + 1)x_2(y_2 - sy_1)^2$$

et nous pouvons ainsi envisager la suite.

b. Nous continuons à gommer les «  $(t)$  ». Il vient d'être dit que

$$x_1 \geq c \quad \text{et} \quad x_2 \geq c$$

et vu le signe des uns et des autres nous ne tardons pas de déduire de la précédente que

$$f' \leq -2c(1 + \rho)((y_2 - sy_1)^2 + (y_2 - sy_1)^2)$$

ce qui, une fois que le potache a fait le ménage, devient

$$f' \leq -2c(1 + \rho)((1 + s^2)(y_1^2 + y_2^2) - 4sy_1y_2)$$

Une fois le réel  $1 + s^2$  mis tout à fait légalement en facteur, le *physio* assène

$$f' \leq -2c(1 + \rho)(1 + s^2)q_r(y_1, y_2)$$

la notation  $q_r(y_1, y_2)$  étant empruntée aux probabilistes qui n'ont jamais voulu utiliser le «  $\circ$  » pour exprimer une composition. La destination est proche. Pour l'atteindre, il reste à accepter gentiment les deux égalités

$$1 + \rho = \frac{1}{1 - s} \quad \text{et} \quad 1 - r = 1 - \frac{2s}{1 + s^2} = \frac{(1 - s)^2}{1 + s^2}$$

desquelles on déduit *de memoria* que

$$(1 + \rho)(1 + s^2) = \frac{1 - s}{1 - r}$$

et l'on a donc effectivement

$$f' \leq -2c \cdot \frac{1 - s}{1 - r} \cdot q_r(y_1, y_2)$$

c. Nous laissons au lecteur le soin de s'assurer des inégalités

$$0 < s < r < 1$$

qui réveillent la récente question 6.e à tel point que

$$q_r(y_1, y_2) \geq \frac{1 - r}{1 - s} q_s(y_1, y_2)$$

La multiplication par un *néglatif* opérant un naturel retournement de situation nous en déduisons effectivement

$$f' \leq -2cf$$

Comme nous ne changeons pas une équipe qui gagne, nous allons nous inspirer fortement de ce qui s'est passé à la fin de la question 4.d.

À cet effet, nous considérons la fonction  $\phi$  définie sur  $\mathbb{R}_+$  par

$$\forall t \geq 0 \quad \phi(t) = e^{2ct} f(t)$$

Elle y est manifestement dérivable et l'on a

$$\forall t \geq 0 \quad \phi'(t) = e^{2t}(f'(t) + 2cf(t)) \leq 0$$

la négativité provenant précisément de ce que nous venons d'apprendre à l'instant.

- Comme *supra* l'application  $\phi$  décroît sur  $\mathbb{R}_+$ .
- Comme *supra* elle possède une limite finie en plus l'infini.

Il reste alors à observer que

$$\forall t \geq 0 \quad f(t) = e^{-2ct} \cdot \phi(t)$$

et à ne pas avoir perdu de vue que  $c$  est *strictement* positif.

¶ Le texte a imposé  $c < 1$ , ce qui est visiblement totalement inutile... À bon entendeur !

9. Soit  $x$  une telle solution de  $(S)$ . Il existe donc deux réels *strictement* positifs  $c_1$  et  $c_2$  tels que

$$\forall t \geq 0 \quad x_1(t) \geq c_1 \quad \text{et} \quad x_2(t) \geq c_2$$

Le réel

$$c = \min(c_1, c_2)$$

vérifie par construction

$$c > 0 \quad ; \quad \forall t \geq 0 \quad x_1(t) \geq c \quad \text{et} \quad x_2(t) \geq c$$

et nous nous retrouvons ainsi dans le nouveau cadre — simplifié par nos soins ! — de la précédente dont nous conservons bien entendu toutes les notations. Le résultat des courses est alors

$$q_s(y(t)) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$$

C'est cette fois la minoration de Rayleigh-Ritz qui va terminer l'affaire. Elle révèle en effet que

$$\forall t \geq 0 \quad m \|y(t)\|^2 \leq q_s(y(t))$$

où  $m$  est la plus petite valeur propre de la matrice  $Q_s$ . Cette dernière étant définie positive il s'ensuit que  $m$  est *strictement* positive et nous avons par *séquent con*(\*),

$$\forall t \geq 0 \quad 0 \leq \|y(t)\|^2 \leq \frac{1}{m} \cdot q_s(y(t))$$

Il en résulte aisément par *squeeze* que

$$y(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$$

et comme  $x$  et  $y$  sont liés par la relation

$$x = x^* + y$$

voilà que fatalement

$$x(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} x^*$$

En conclusion, toute solution  $x$  de  $(S)$  dont les entrées sont minorées par des réels *strictement* positifs se doit de vérifier

$$x(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} x^*$$

### Partie 3

Les deux dernières lignes du chapeau de cette troisième partie signalent en particulier que  $A$  est diagonalisable et que

$$\text{Spec } A \subset ]-1, 1[$$

10. Comme le spectre de  $A$  est inclus dans l'ouvert  $] -1, 1[$ , il en résulte *affinement* que

$$\text{Spec}(I_p - A) \subset ]0, 2[$$

et la matrice  $I_p - A$  devient alors inversible puisque 0 n'appartient pas à son spectre. Dans ces conditions l'équation

$$(I_p - A) \cdot X^* = B$$

(\*) Dédectif typiquement toulousain !

a effectivement une unique solution en la personne de

$$X^* = (I_p - A)^{-1} \cdot B$$

11. Nous commençons par quelques petites mises au point.

*i.* La suite  $(Y(n))$  est parfaitement définie, c'est indéniable, mais nous allons préciser par induction que, pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ , le vecteur aléatoire  $Y(n)$  est fonction des aléas numériques  $U_1, \dots, U_n$ .

- Au vu et au su de l'égalité

$$Y(1) = (A + U_1 I_p) \cdot X(0) + B$$

l'initialisation est *in the pocket*.

- Supposons que, pour un certain  $n \in \mathbb{N}^*$ , il existe une fonction(\*)  $\phi$  telle que :

$$Y(n) = \phi(U_1, \dots, U_n)$$

Puisqu'alors

$$Y(n+1) = (A + U_{n+1} I_p) \cdot \phi(U_1, \dots, U_n) + B$$

il semble que la messe soit dite.

*ii.* Nous observerons ensuite que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  et pour tout couple  $(i, j)$  d'éléments de  $\llbracket 1, p \rrbracket$ , l'élément en place  $(i, j)$  de la matrice aléatoire  $A + U_k \cdot I_p$  n'est autre que

$$A_{ij} + \delta_{ij} U_k$$

où l'on ne présente plus le fameux « delta » de Leopold Kronecker.

*iii.* Une dernière chose, le texte parle avec beaucoup de légèreté de l'espérance des vecteurs  $y(n)$ , sans savoir si ces derniers ont vraiment des raisons d'espérer. Nous devons donc être vigilants et sur-le-champ d'ailleurs...

*a.* Nous allons derechef nous affranchir de nos récentes craintes par récurrence et nous y parlerons également de calcul.

- Soit alors  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ . D'après ce que nous venons de narrer et la formule du produit matriciel d'Arthur Cayley, il semble que

$$Y_i(1) = \sum_{j=1}^p (A_{ij} + \delta_{ij} U_1) X_j(0) + b_i$$

Comme la variable  $U_1$  possède une espérance il résulte du théorème de linéarité que c'est aussi le cas de  $Y_i(1)$  « même que(\*\*) », selon la formule de linéarité l'on devrait avoir

$$E(Y_i(1)) = \sum_{j=1}^p A_{ij} x_j(0) + b_i$$

(\*) Nous laissons au lecteur le soin de préciser son départ et son arrivée...

(\*\*) Comme on dit dans les cours de récré !

puisqu'il a été précisé que  $U_1$  est centrée. Autant dire alors en compactant cela que

$$\mathbb{E}(Y(1)) = A \cdot X(0) + B = X(1)$$

la dernière égalité reposant sur la définition inductive de la suite  $(X(n))$ .

L'initialisation est initialisée...

• Supposons que pour un entier  $n \geq 1$  le vecteur  $Y(n)$  possède une espérance et annonçons un élément  $i$  de  $\llbracket 1, p \rrbracket$ . La même argumentation que celle développée pendant le *début d'initié* dévoile cette fois que

$$Y_i(n+1) = \sum_{j=1}^p (A_{ij} + \delta_{ij}U_{n+1})Y_j(n) + b_i$$

Selon l'hypothèse de récurrence et notre première mise au point nous sommes en mesure d'affirmer que

- les variables  $Y_j(n)$  sont des fonctions de  $U_1, \dots, U_n$  ;
- selon le lemme des coalitions la variable  $U_{n+1}$  est indépendante des  $Y_j(n)$  ;
- les variables  $Y_j(n)$  possèdent une espérance ;
- selon le *genious* théorème « espérance du produit de variables indépendantes » les produits  $U_{n+1}Y_j(n)$  possèdent également une espérance puisque c'est le cas de la variable  $U_{n+1}$  et qu'une certaine indépendance mentionnée quelques lignes plus haut est là pour nous conforter. En outre

$$\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket \quad \mathbb{E}(U_{n+1}Y_j(n)) = \mathbb{E}(U_{n+1})\mathbb{E}(Y_j(n)) = 0$$

puisque la variable  $U_{n+1}$  est centrée. Le théorème de linéarité assure alors une espérance à la variable  $Y_i(n+1)$  ainsi que l'égalité

$$\mathbb{E}(Y_i(n+1)) = \sum_{j=1}^p A_{ij}\mathbb{E}(Y_j(n)) + b_i$$

et tout cela se compacte matriciellement en

$$\mathbb{E}(Y(n+1)) = A \cdot \mathbb{E}(Y(n)) + B$$

Il est également dit depuis une fort belle lurette que

$$X^* = A \cdot X^* + B$$

et une simple soustraction membre à membre amène définitivement à

$$\mathbb{E}(Y(n+1)) - X^* = A \cdot (\mathbb{E}(Y(n)) - X^*)$$

† La suite vectorielle  $(Y(n))$  est depuis peu arithmético-géométrique et il se trouve que le vecteur  $X^*$  est précisément son point fixe. Tout cela n'est donc pas vraiment très étonnant...

b. Bien qu'il s'agisse de suites vectorielles, l'arithmético-géomètre se doit d'accepter inductivement que

$$\forall n \geq 1 \quad E(Y(n)) - X^* = A^{n-1} \cdot (E(Y(1)) - X^*)$$

Soit alors  $n \geq 1$ . Les *pros* de la diagonalisation savent bien que

$$A^{n-1} = Q \cdot D^{n-1} \cdot Q^{-1}$$

ainsi que

$$D^{n-1} = \text{diag}(\lambda_1^{n-1}, \dots, \lambda_p^{n-1})$$

La situation rêvée des réels  $\lambda_i$  réveille en nous de bons souvenirs de la classe de première scientifique à telle enseigne que

$$\forall i \in [1, p] \quad \lambda_i^{n-1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

Nous en déduisons tout d'abord que

$$D^{n-1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

puis dans la foulée que

$$A^{n-1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

où, histoire de compléter le tableau du tout début du texte, nous définissons, composante à composante, la notion de limite d'une suite de matrices.

Il en résulte alors aisément que

$$Y(n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} X^*$$

ce qui, une fois que la tête a pivoté de  $\pi/2$ , devient comme promis

$$y(n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x^*$$

12. Grâce à l'égalité de diagonalisation

$$A = QDQ^{-1}$$

il est très facile de déduire le fonctionnement de la suite  $(Z(n))$  de celui de sa proche cousine  $(Y(n))$  et le résultat des courses est le suivant :

$$\begin{cases} Z(1) = (D + U_1 I_p) Q^{-1} X(0) + Q^{-1} B \\ \forall n \geq 1 \quad Z(n+1) = (D + U_{n+1} I_p) Z(n) + Q^{-1} B \end{cases}$$

Gardons cela au chaud quelques instants et mettons-nous en route.

a. Soit  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ . Il y a encore un peu vigilance à avoir puisqu'il n'est pas totalement clair que les  $z_k(n)$  possèdent réellement une variance. Nous allons, comme *supra*, nous en assurer par induction sur  $n$  tout en menant dans la foulée les aspects calculatoires de l'affaire.

• Notons  $\alpha_k$  et  $\beta_k$  les  $k^{\text{ièmes}}$  entrées repectives des colonnes  $Q^{-1}X(0)$  et  $Q^{-1}B$ . Il résulte de la définition inductive de la suite  $(Z(n))$  que

$$z_k(1) = \alpha_k(\lambda_k + U_1) + \beta_k$$

les finesses *métamécaniques*(\*) des effets des multiplications par les matrices diagonales étant supposées maîtrisées par l'impétrant. Comme il est dit que  $U_1$  possède une variance, il en résulte immédiatement que  $z_k(1)$  — fonction affine de  $U_1$  — en a une également mais nous ne la calculerons pas pour la simple et bonne raison qu'elle ne le mérite pas !

• Supposons que, pour un entier  $n \in \mathbb{N}^*$ , la variable  $z_k(n)$  dispose d'une variance. Commençons par signaler que la même définition inductive et les mêmes finesses métamécaniques permettent, cette fois, de revendiquer l'égalité

$$z_k(n+1) = (\lambda_k + U_{n+1})z_k(n) + \beta_k$$

où le réel  $\beta_k$  a déjà été présenté plus haut. Occupons-nous alors de la variable

$$\zeta = (\lambda_k + U_{n+1})z_k(n)$$

et également de son carré

$$\zeta^2 = (\lambda_k + U_{n+1})^2 z_k^2(n)$$

Nous faisons à leur égard les remarques suivantes :

- en ce qui concerne  $\zeta$  nous faisons valoir trois choses ;
- comme  $U_{n+1}$  est centrée, la variable  $\lambda_k + U_{n+1}$  possède une espérance et

$$E(\lambda_k + U_{n+1}) = \lambda_k$$

un certain théorème de linéarité étant assurément derrière tout cela ;

– selon l'hypothèse de récurrence, il est dit que  $z_k(n)$  possède une variance. Elle possède ainsi fatalement une espérance ;

– une dernière chose et non des moindres passe par l'indépendance, déjà justifiée, des variables  $U_{n+1}$  et  $Y(n)$ . Le lemme des coalitions est alors catégorique, les variables

$$U_{n+1} \quad \text{et} \quad Z(n) = Q^{-1}Y(n)$$

le sont également tout comme dans la foulée  $U_{n+1}$  et  $z_k(n)$ . En coalisant derechef, nous parvenons enfin à l'indépendance des variables

$$\lambda_k + U_{n+1} \quad \text{et} \quad z_k(n)$$

(\*) Il s'agit de cette habileté, ce *know how*, permettant de mener les calculs matriciels avec le plus de légèreté possible...

L'important théorème « espérance du produit de variables indépendantes » pointe son nez pour la deuxième fois et voici donc que  $\zeta$  possède une espérance et que

$$E(\zeta) = \lambda_k E(z_k(n))$$

– nous passons maintenant à la copine  $\zeta^2$  et aux allégations suivantes :

– le remarquable potache *ado* révèle que

$$(\lambda_k + U_{n+1})^2 = \lambda_k^2 + 2\lambda_k U_{n+1} + U_{n+1}^2$$

et nous n'avons pas oublié que  $U_{n+1}$  est centrée et qu'elle possède un moment d'ordre deux(\*) égal à  $v_{n+1}$ . Nous pouvons ainsi linéairement asséner que  $(\lambda_k + U_{n+1})^2$  possède une espérance et que

$$E(\lambda_k + U_{n+1})^2 = \lambda_k^2 + v_{n+1}$$

– l'hypothèse de récurrence assure une variance à la variable  $z_k(n)$ , elle lui procure dans la foulée un moment d'ordre deux ;

– nous venons quelques lignes plus haut de mentionner l'indépendance des aléas  $U_{n+1}$  et  $z_k(n)$ . La frénésie coalisatrice entraîne cette fois celle des variables

$$(\lambda_k + U_{n+1})^2 \quad \text{et} \quad z_k^2(n)$$

qui déclenche instantanément et pour la troisième fois le théorème « espérance du produit... ».

En bref, la variable  $\zeta$  possède un moment d'ordre deux et

$$E(\zeta^2) = E(\lambda_k + U_{n+1})^2 \cdot E(z_k^2(n)) = (\lambda_k^2 + v_{n+1})E(z_k^2(n))$$

la dernière égalité provenant de la première des remarques effectuées *supra*. Il reste à avoir une pensée émue pour un célèbre *tandem* et voilà que  $\zeta$  possède une variance donnée par

$$V(\zeta) = E(\zeta^2) - E^2(\zeta)$$

Compte tenu des divers résultats que nous venons d'obtenir, nous revendiquons l'égalité

$$V(\zeta) = (\lambda_k^2 + v_{n+1})E(z_k^2(n)) - \lambda_k^2 E^2(z_k(n))$$

Le recours au tour de passe-passe

$$\lambda_k^2 = (\lambda_k^2 + v_{n+1}) - v_{n+1}$$

nous permet de transformer la chose en

$$V(\zeta) = (\lambda_k^2 + v_{n+1}) \left[ E(z_k^2(n)) - E^2(z_k(n)) \right] + v_{n+1} E^2(z_k(n))$$

(\*) Pour une variable centrée, le moment d'ordre deux ou la variance...

égalité qui, *via* une nouvelle promenade en *tandem*, devient

$$V(\zeta) = (\lambda_k^2 + v_{n+1})V(z_k(n)) + v_{n+1}E^2(z_k(n))$$

Il suffit pour finir de ne pas avoir égaré l'origine de la variable  $\zeta$ , à savoir

$$z_k(n+1) = \zeta + \beta_k$$

ainsi que le fameux théorème « variance et affinité ». La variable  $z_k(n+1)$  possède bel et bien une variance et l'on a comme promis

$$V(z_k(n+1)) = (\lambda_k^2 + v_{n+1})V(z_k(n)) + v_{n+1}E^2(z_k(n))$$

b. Soit à nouveau  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ . Nous allons nous appuyer sur deux choses :

– *primo*, il est dit *grosso modo* que

$$\lambda_k^2 + v_{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \lambda_k^2$$

et nous n'avons pas oublié que  $\lambda_k^2$  est *strictement* inférieur à un. Il est donc possible de proposer un réel  $c_k$  vérifiant

$$\lambda_k^2 < c_k < 1$$



et compte tenu de la précédente limite, la quantité  $\lambda_k^2 + v_{n+1}$  sera *un jour* inférieure ou égale à  $c_k$  ce qui, mathématiquement dit, se traduit par l'existence d'un entier naturel  $N$  tel que

$$\forall n \geq N \quad \lambda_k^2 + v_{n+1} \leq c_k \quad (\text{uno})$$

– *deuzio*, nous venons d'apprendre que la suite vectorielle  $(E(y(n)))$  est convergente. Comme la matrice  $Q^{-1}$  est constante, le lecteur motivé en déduira très facilement que la suite  $(E(z(n)))$  est également convergente tout comme, en conséquence directe, la suite  $(E(z_k(n)))$  de ses  $k^{\text{ièmes}}$  composantes. Il en résulte alors *carrément* que la suite

$$(E(z_k(n)))^2$$

converge aussi et qui dit convergence dit, *a fortiori*, *bornitude* ! Bref, il existe un réel strictement positif  $M_k$  tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (E(z_k(n)))^2 \leq M_k \quad (\text{dos})$$

Comme nous sommes — variances obligent — au carrefour de la positivité, la récente question *a* et les non moins récentes (*uno*) et (*dos*) permettent, mentalement, de passer à l'assaut final !

13. Commençons par signaler que la convergence de la série

$$\sum v_n$$

et une importante condition nécessaire entraînent obligatoirement

$$v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

à telle enseigne que nous sommes bien dans le cocon de la 12.b ce qui est déjà une excellente chose.

Soit alors  $j \in \mathbb{N}$ . Après avoir observé que  $j + N \geq N$ , la conclusion du cocon est

$$V(z_k(j + N + 1)) \leq c_k V(z_k(j + N)) + M_k v_{j+N+1}$$

que les nouvelles notations adoptées métamorphosent en

$$\alpha_{j+1} - c_k \alpha_j \leq w_j$$

au prix d'un décisif rappatriement à gauche et c'est déjà une excellente entrée en matière pour la suite.

a. Soit à nouveau  $j \in \mathbb{N}$  et ressortons notre récente avancée, en l'occurrence

$$\alpha_{j+1} - c_k \alpha_j \leq w_j$$

Soit maintenant  $m \in \mathbb{N}$  et multiplions l'affaire par le positif  $c_k^{m-j}$  ce qui nous amène gentiment à

$$\underbrace{c_k^{m-j} \alpha_{j+1} - c_k^{m-j+1} \alpha_j}_{j\text{-téléscope}} \leq w_j c_k^{m-j}$$

Comme nous venons de le souligner cette multiplication a eu le bonheur de mettre en place un télescope. L'addition membre à membre, l'entier  $j$  baguenaudant de 0 à  $m$ , et les effets magiques du télescopage conduisent alors à

$$\alpha_{m+1} - c_k^{m+1} \alpha_0 \leq \sum_{j=0}^m w_j c_k^{m-j}$$

ce qui, *grosso modo*, est exactement le but recherché...

b. Soit à nouveau  $m \in \mathbb{N}$ . Pour soulager un peu les écritures nous adoptons la notation

$$u_m = \sum_{j=0}^m w_j c_k^{m-j}$$

et comme il y a ici un fort *serial perfume*, nous allons carrément nous précipiter sur la série

$$\sum_{n \geq 0} u_n$$

Soit donc  $n \in \mathbb{N}$  et  $S_n$  sa somme partielle d'ordre  $n$ . Nous avons tour à tour

$$S_n = \sum_{m=0}^n u_m = \sum_{m=0}^n \sum_{j=0}^m w_j c_k^{m-j} = \sum_{j=0}^n w_j \sum_{m=j}^n c_k^{m-j}$$

la toute dernière avancée procédant d'une banale réversion de sommations. Pout y voir un peu plus clair le pointilliste écrira volontiers notre somme partielle sous la forme

$$S_n = \sum_{j=0}^n w_j (1 + c_k + \cdots + c_k^{n-j})$$

and due to the ambient positivity, il ne devrait pas être insurmontable d'en déduire que

$$S_n \leq \sum_{j=0}^n w_j (1 + c_k + \cdots + c_k^n)$$

ce qui peut finalement s'écrire

$$S_n \leq (1 + c_k + \cdots + c_k^n) (w_0 + w_1 + \cdots + w_n)$$

Notons alors  $C_n$  et  $W_n$  les sommes partielles d'ordre  $n$  respectives des deux séries

$$\sum_{n \geq 0} c_k^n \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 0} w_n$$

ce qui permet de transformer notre inégalité en

$$S_n \leq C_n W_n$$

Il est maintenant temps de mettre en avant les informations suivantes :

– l'idéale position du réel  $c_k$  permet au *serial geometer* de clamer la convergence de la série

$$\sum_{n \geq 0} c_k^n$$

et nous notons  $C$  sa somme.

– il est également dit que la série de terme général  $(v_n)$  converge et il se trouve que par définition

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = M_k v_{N+n+1}$$

La convergence de la série de terme général  $(w_n)$  s'en déduit immédiatement et nous notons  $W$  sa somme. Nous apprenons ainsi que

$$C_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} C \quad \text{et} \quad W_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} W$$

ces convergences s'effectuant en *croissant* puisque toutes les séries du secteur sont à termes positifs. Voilà donc en définitive que

$$S_n \leq CW$$

La suite des sommes partielles de la série de terme général  $(u_n)$  est donc *majorée* et comme cette dernière est justement dans le fameux secteur, elle se doit de converger comme en atteste le théorème de la limite monotone. La condition nécessaire de convergence d'une série oblige alors

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

ce qui est une excellente chose. Rappelons-nous maintenant que depuis la précédente

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad 0 \leq \alpha_{m+1} \leq c_k^{m+1} + u_m$$

et que, depuis la classe de première scientifique, l'on sait que

$$c_k^{m+1} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$$

puisque le réel  $c_k$  n'a toujours pas quitté sa stratégique situation. Le *squeezing process* est alors catégorique et du coup

$$\alpha_{m+1} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$$

Autant dire alors que

$$V(z_k(N+m+1)) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$$

ce qui, à un léger décalage près, ne peut que nous satisfaire...

c. Partons de l'égalité matricielle

$$Y(n) = QZ(n)$$

qui révèle que

$$y_k(n) = \sum_{j=1}^p q_j z_j(n)$$

où, histoire de ne pas trop alourdir le discours, nous avons baptisé  $q_1, \dots, q_p$  les entrées de la  $k^{\text{ème}}$  ligne de la matrice  $Q$ . Comme les variables  $z_j(n)$  possèdent depuis peu une variance il en est de même de  $y_k(n)$  et parmi les deux formules donnant la variance d'une combinaison linéaire nous optons, une fois n'est pas coutume, pour

$$V(y_k(n)) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p q_i q_j \operatorname{cov}(z_i(n), z_j(n))$$

Soit alors  $i$  et  $j$  deux éléments de  $\llbracket 1, p \rrbracket$ .

Selon l'inégalité de Cauchy-Bouniakovski-Schwarz nous avons

$$|\operatorname{cov}(z_i(n), z_j(n))| \leq \sqrt{V(z_i(n))} \sqrt{V(z_j(n))}$$

et après avoir bien capté que la question précédente, valable pour *n'importe quel* entier de  $\llbracket 1, p \rrbracket$ , vaut aussi bien pour  $i$  et pour  $j$ , nous déduisons aisément *by squeeze* que

$$\operatorname{cov}(z_i(n), z_j(n)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Comme l'entier  $p$  est définitivement fixé, il doit radicalement s'ensuivre que

$$V(y_k(n)) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

ce que le thème « variance et affinité » modifie dans la foulée en

$$V(y_k(n) - x_k^*) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

À côté de cela nous ressortons la question 11.b de laquelle découle aisément

$$E(y_k(n) - x_k^*) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

la philosophie du « composante à composante » et une certaine linéarité n'étant pas totalement étrangères à l'affaire. Les deux dernières limites que nous venons d'évoquer et le *tandem* le plus célèbre du *moment* nous en révèlent une troisième, en l'occurrence

$$E(y_k(n) - x_k^*)^2 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

Soit alors  $\epsilon > 0$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ . D'après l'inégalité de d'Andreï Markov dans sa version carrée il semble que

$$p(|y_k(n) - x_k^*| > \epsilon) \leq \frac{E(y_k(n) - x_k^*)^2}{\epsilon^2}$$

Le *squeezing process* frappe une nouvelle fois et voilà donc que

$$p(|y_k(n) - x_k^*| > \epsilon) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

chronique d'une convergence en probabilité annoncée...

† Toujours dans le respect de la notion de composante à composante, cette dernière propriété peut *vectériellement* se reformuler en

$$y(n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{P}} x^*$$

## MATHÉMATIQUES II

DURÉE : 4 HEURES.

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

*Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

*Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.*

## S U J E T

**Dans tout le problème :**

- On note  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espace probabilisé et  $X$  une variable aléatoire définie sur  $(\Omega, \mathcal{A})$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ .
- Toutes les variables aléatoires intervenant dans le problème sont définies sur le même espace  $(\Omega, \mathcal{A})$  qui est, sauf mention contraire, muni de la probabilité  $P$ .
- On note  $S_X$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  à valeurs réelles, telle que :  $\forall x \in \mathbb{R}, S_X(x) = P\{X > x\}$ .

*Dans le cadre de l'évaluation des risques encourus par des établissements financiers, il est nécessaire de retrancher à la valeur moyenne attendue des investissements (espérance mathématique "pure") un terme correctif d'autant plus important que le risque est plus grand.*

*L'objet du problème est de déterminer grâce à une "fonction de distorsion", une "espérance corrigée" qui prend en compte cette notion de risque et qui possède les propriétés requises pour une évaluation cohérente de risques financiers, en particulier, une propriété de sous-additivité nécessaire pour valoriser équitablement les avantages éventuels de la diversification.*

**Partie I. Probabilité de surpassement et espérance.**

1. On suppose uniquement dans cette question que  $X$  suit la loi exponentielle  $\mathcal{E}(\lambda)$  (avec  $\lambda > 0$ ).

a) Vérifier l'égalité :  $E(X) = \int_0^{+\infty} S_X(x) dx$ .

b) Donner l'allure de la courbe représentative de la fonction de répartition  $F$  de  $X$  et interpréter  $E(X)$  en terme d'aire grâce à la formule précédente.

2. Soit  $h$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+$  par :  $h(x) = \frac{1}{(x+1)(x+2)}$ .

a) Justifier la convergence de l'intégrale  $\int_0^{+\infty} h(x) dx$ .

b) Déterminer deux réels  $c$  et  $d$  vérifiant pour tout réel  $x \geq 0$ , la relation :  $h(x) = \frac{c}{x+1} + \frac{d}{x+2}$ .  
En déduire une primitive de  $h$  sur  $\mathbb{R}_+$ .

c) Montrer que la fonction  $f_0 : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{(x+1)(x+2) \ln 2} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$  est une densité de probabilité.

3. On suppose dans cette question que  $X$  admet pour densité la fonction  $f_0$  définie à la question 2.c).
- La variable aléatoire  $X$  admet-elle une espérance ?
  - Pour tout  $x$  réel, calculer  $S_X(x)$  et en trouver un équivalent lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .
  - Étudier la convergence de l'intégrale  $\int_0^{+\infty} S_X(x) dx$ .
- 4.a) Justifier la monotonie de la fonction  $S_X$  et trouver la limite de  $S_X(x)$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .
- Montrer que la fonction  $S_X$  est continue à droite. À quelle condition est-elle continue en 0 ?
5. Dans cette question, on suppose que  $X$  admet une densité  $f$  nulle sur  $]-\infty, 0]$ , continue sur  $]0, +\infty[$  mais non nécessairement en 0.
- Montrer que la fonction  $S_X$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et de classe  $C^1$  sur  $]0, +\infty[$ .
  - Justifier la convergence de l'intégrale  $\int_0^1 xf(x) dx$ .
  - Établir pour tout réel  $A \geq 0$ , l'égalité :  $\int_0^A S_X(x) dx = AS_X(A) + \int_0^A xf(x) dx$ .
  - En déduire que si l'intégrale  $\int_0^{+\infty} S_X(x) dx$  est convergente, alors  $X$  admet une espérance.
  - Montrer que si  $X$  admet une espérance, alors on a pour tout réel  $A \geq 0$  :  $\int_A^{+\infty} xf(x) dx \geq AS_X(A)$ .
  - Déduire des résultats précédents que  $X$  admet une espérance si et seulement si l'intégrale  $\int_0^{+\infty} S_X(x) dx$  est convergente, et que dans ce cas, on a :  $E(X) = \int_0^{+\infty} S_X(x) dx$  [1].
6. Dans cette question, on suppose que  $X$  est discrète et à valeurs dans  $\mathbb{N}$ .
- Établir pour tout entier naturel  $n$ , l'égalité :  $\sum_{k=0}^n S_X(k) = (n+1)P\{X \geq n+1\} + \sum_{k=0}^n k P\{X = k\}$ .
  - En déduire que si la série de terme général  $S_X(n)$  est convergente, alors  $X$  admet une espérance.
  - Montrer que  $X$  admet une espérance si et seulement si la série de terme général  $S_X(n)$  est convergente, et que dans ce cas, on a :  $E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} S_X(n)$ .
  - On suppose que  $X$  admet une espérance.
    - Exprimer pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , l'intégrale  $\int_0^N S_X(x) dx$  à l'aide d'une somme partielle de la série de terme général  $S_X(n)$ .
    - En déduire que  $E(X) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A S_X(x) dx$ .

Ainsi, la relation [1] reste applicable dans le cas des variables aléatoires à valeurs dans  $\mathbb{N}$  ; on admet qu'elle reste applicable à toute variable aléatoire pour laquelle l'intégrale  $\int_0^{+\infty} S_X(x) dx$  est convergente.

**Partie II. Fonctions de distorsion et espérances corrigées : un exemple.**

On appelle *fonction de distorsion* toute fonction  $g$  définie, continue et croissante sur l'intervalle  $[0, 1]$  qui vérifie les trois propriétés supplémentaires suivantes :  $g(0) = 0$ ,  $g(1) = 1$  et  $g$  est concave sur  $]0, 1[$ .

Pour toute fonction de distorsion  $g$ , on dit que  $X$  admet une *espérance corrigée par  $g$* , si la fonction composée  $g \circ S_X$  admet une intégrale convergente sur  $[0, +\infty[$ .

Cette intégrale, notée  $E_g(X)$ , est appelée espérance de  $X$  corrigée par  $g$ . Ainsi :  $E_g(X) = \int_0^{+\infty} g(S_X(x)) dx$ .

7. Exemple . Soit  $\Phi$  la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite dont la dérivée, notée  $\varphi$ , est telle que :  $\forall t \in \mathbb{R}, \varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$ .

a) Justifier que  $\Phi$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $]0, 1[$ . On note  $\Psi$  la bijection réciproque de  $\Phi$ .

Soit  $\alpha \in ]0, \frac{1}{2}[$  et  $w_\alpha$  la fonction définie sur  $[0, 1]$  telle que :  $w_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \Phi(\Psi(x) - \Psi(\alpha)) & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$ .

b) Montrer que la fonction  $w_\alpha$  est continue sur  $[0, 1]$  et dérivable sur  $]0, 1[$ .

c) On note  $w'_\alpha$  la dérivée de  $w_\alpha$ . Établir pour tout  $x \in ]0, 1[$ , la relation :  $w'_\alpha(x) = \exp\left(\Psi(\alpha)\Psi(x) - \frac{(\Psi(\alpha))^2}{2}\right)$ .

d) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction  $w_\alpha$  au point d'abscisse  $\alpha$ .

e) Vérifier que  $w_\alpha$  est une fonction de distorsion.

8. On considère à nouveau la fonction de distorsion  $w_\alpha$  définie dans la question 7.

Soit  $Y$  une variable aléatoire définie sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  qui suit une loi normale d'écart-type égal à 1, dont l'espérance est notée  $\mu$ , et soit  $X$  une variable aléatoire qui suit la même loi que  $\exp(Y)$ .

a) Justifier l'existence de l'espérance de  $X$  et la calculer.

b) Montrer que pour tout réel  $x > 0$ , on a :  $w_\alpha(S_X(x)) = P([X e^{-\Psi(\alpha)} > x])$ .

c) En déduire l'existence et la valeur de  $E_{w_\alpha}(X)$ .

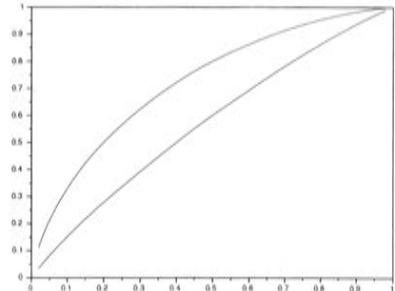
9. Pour faire tracer par *Scilab* la courbe représentative de  $w_\alpha$ , on utilise la fonction *cdfnor* qui permet de calculer les valeurs de la fonction de répartition de variables aléatoires de loi normale.

Si une variable aléatoire  $Z$  suit la loi normale centrée réduite et si  $x$  et  $p$  sont deux réels reliés par l'égalité  $P([Z \leq x]) = p$ , alors :

- $p$  est calculable en *Scilab* par *cdfnor*("Pq", x, 0, 1) ;
- $x$  est calculable en *Scilab* par *cdfnor*("X", 0, 1, p, 1-p).

Le graphique ci-dessous a été obtenu en affectant successivement à la variable *alpha* les valeurs 0.2 et 0.4, et en exécutant les cinq instructions codées comme suit, la quatrième étant incomplète.

- (1) `qa=cdfnor("X",0,1,alpha,1-alpha)`
- (2) `p=[0.02 :0.01 :0.98]`
- (3) `q=cdfnor("X",zeros(p),ones(p),p,1-p)-qa*ones(p)`
- (4) `wa=cdfnor("Pq",?, ?, ?)`
- (5) `plot(p,wa)`



a) Quelles sont les valeurs affectées aux variables  $p$  et  $q$  par les instructions (2) et (3) (on en précisera le format matriciel) ?

b) Compléter la quatrième ligne de code.

c) À laquelle des deux courbes correspond la valeur  $\alpha = 0.2$  (on justifiera mathématiquement la réponse) ?

d) Comment trouver les tangentes aux deux courbes en  $(0,0)$  et  $(1,1)$  ?

e) Que deviendrait la courbe représentative de  $w_\alpha$  si on faisait tendre  $\alpha$  vers 0 ?

**Partie III. Sous-additivité des espérances corrigées.**

Les notations et le contexte de cette partie sont identiques à ceux des parties I et II.

Dans cette partie, on note  $g$  une fonction de distorsion arbitraire et on suppose l'existence de  $E_g(X)$ . Soit  $B$  un réel positif et soit  $Y$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$  telle que  $P(\{Y \in [0, B]\}) = 1$ . L'objectif de cette partie consiste à établir l'inégalité :  $E_g(X + Y) \leq E_g(X) + E_g(Y)$  [2].

10. a) Soit  $x$  un réel fixé de  $[0, 1]$ . Justifier pour tout entier  $n \geq 1$ , l'inégalité :

$$g\left(x\left(1 - \frac{1}{n}\right) + (1-x)\frac{1}{n}\right) \geq xg\left(1 - \frac{1}{n}\right) + (1-x)g\left(\frac{1}{n}\right).$$

b) En déduire que  $g(x) \geq x$ .

c) Soit  $a, b$  et  $\varepsilon$  trois réels tels que :  $0 < a < b < b + \varepsilon < 1$ .

Justifier l'existence d'un réel  $\lambda \in [0, 1]$  vérifiant les deux égalités : 
$$\begin{cases} \lambda a + (1-\lambda)(b + \varepsilon) = b \\ (1-\lambda)a + \lambda(b + \varepsilon) = a + \varepsilon \end{cases}$$

En déduire l'inégalité :  $g(b + \varepsilon) - g(a + \varepsilon) \leq g(b) - g(a)$ .

11. a) Montrer que  $E(X)$  existe et que  $E(X) \leq E_g(X)$ .

b) Montrer que si  $X$  est une variable aléatoire certaine, on a  $E_g(X) = E(X)$ .

c) Soit  $r > 0$  et  $s \geq 0$ . Montrer que  $E_g(rX + s)$  existe et que :  $E_g(rX + s) = rE_g(X) + s$ .

d) Soit  $T$  et  $W$  deux variables aléatoires telles que  $P(\{0 \leq T \leq W\}) = 1$ .

Sous réserve d'existence, comparer  $E_g(T)$  et  $E_g(W)$ .

12. Justifier l'existence de  $E_g(Y)$  et de  $E_g(X + Y)$  ; établir les inégalités :  $E_g(Y) \leq B$  et  $E_g(X + Y) \leq E_g(X) + B$ .

13. On se propose de montrer par récurrence sur l'entier  $n$  que l'inégalité [2] est vraie pour toute variable aléatoire  $U$  telle que  $P(\{U \in [0, n]\}) = 1$ .

Soit  $n$  un entier naturel donné. On suppose que quelle que soit la probabilité  $P$  sur  $(\Omega, \mathcal{A})$ , l'inégalité [2] est vraie pour toute fonction de distorsion  $g$ , pour toute variable aléatoire  $X$  possédant une espérance corrigée par  $g$  et pour toute variable aléatoire  $U$  telle que  $P(\{U \in [0, n]\}) = 1$ .

a) Déduire de la question 12 que la propriété ci-dessus est vérifiée pour  $n = 0$ .

b) On suppose la propriété ci-dessus vérifiée pour un entier naturel  $n$  donné.

Soit  $Z$  une variable aléatoire telle que  $P(\{Z \in [0, n + 1]\}) = 1$  et  $p = P(\{Z > 0\}) > 0$ .

On pose  $P^* = P_{\{Z > 0\}}$  (probabilité conditionnelle sachant  $\{Z > 0\}$ ). Pour tout réel  $x > 0$ , on pose :

$$S_X^*(x) = P^*([X > x]), \quad S_Z^*(x) = P^*([Z > x]) \quad \text{et} \quad S_{X+Z}^*(x) = P^*([X + Z > x]).$$

(i) Établir l'égalité :  $S_{X+Z}(x) = (1-p)P_{\{Z=0\}}([X > x]) + pS_{X+Z}^*(x)$ .

(ii) Exprimer  $S_X(x)$  et  $S_Z(x)$  en fonction de  $p, P_{\{Z=0\}}([X > x]), S_X^*(x)$  et  $S_Z^*(x)$ .

(iii) En utilisant le résultat de la question 10.c), déduire des relations précédentes l'inégalité :

$$g(S_{X+Z}(x)) - g(S_X(x)) - g(S_Z(x)) \leq g(pS_{X+Z}^*(x)) - g(pS_X^*(x)) - g(pS_Z^*(x)).$$

c) Justifier que la fonction  $h : x \mapsto \frac{g(px)}{g(p)}$  est une fonction de distorsion et établir l'inégalité :

$$\int_0^{+\infty} h(S_{X+Z}^*(x)) dx \leq \int_0^{+\infty} h(S_X^*(x)) dx + \int_0^{+\infty} h(S_Z^*(x)) dx.$$

d) En déduire l'inégalité :  $E_g(X + Z) \leq E_g(X) + E_g(Z)$ . Conclure.

14. Pour tout entier  $n \geq 1$  et tout  $\omega \in \Omega$ , on pose :  $Y_n(\omega) = \frac{1}{n} [n Y(\omega)]$ , où  $[u]$  désigne la partie entière de  $u$ .

- a) Justifier l'existence de  $E_g(Y_n)$  et  $E_g(X + Y_n)$  ; établir l'inégalité :  $E_g(X + Y_n) \leq E_g(X) + E_g(Y_n)$ .  
b) Pour  $x > 0$ , comparer les événements  $[Y_n > x]$  et  $[Y > x]$ , et montrer que  $E_g(Y_n) \leq E_g(Y)$ .  
c) Montrer que pour tout entier  $n \geq 1$ , on a :

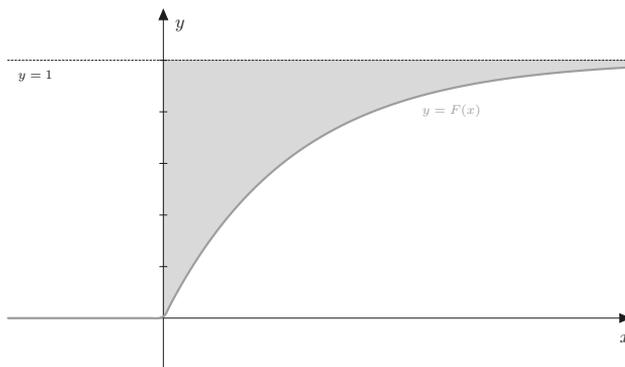
$$\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} g(S_{X+Y}(x)) dx = \int_0^{+\infty} g\left(S_{X+Y}\left(x + \frac{1}{n}\right)\right) dx \leq E_g(X + Y_n).$$

- d) En déduire l'inégalité [2].

## Partie I. Probabilité de surpassement et espérance

1.a) Pour tout  $x$  réel,  $S_X(x) = 1 - P([X \leq x])$  d'où pour tout  $x \geq 0$ ,  $S_X(x) = 1 - (1 - \exp(-\lambda x)) = \exp(-\lambda x)$ . On sait d'après le cours que puisque  $\lambda > 0$ ,  $\int_0^{+\infty} \exp(-\lambda x) dx$  converge et vaut  $\frac{1}{\lambda}$ . Donc  $\int_0^{+\infty} S_X(x) dx = \frac{1}{\lambda} = E(X)$ .

b) On rappelle que  $F(x) = 1 - \exp(-\lambda x)$  si  $x \geq 0$  et  $F(x) = 0$  sinon. D'où la courbe représentative de  $F$  :



L'aire de la partie grisée prolongée jusqu'à l'infini vaut  $\int_0^{+\infty} S_X(x) dx$  puisque c'est  $\int_0^{+\infty} (1 - F(x)) dx$ .

2.a) La fonction  $h$  est définie et continue sur  $[0, +\infty[$ , d'où l'intégrale est impropre en  $+\infty$  uniquement.

- $h$  est à valeurs positives et  $h(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$ ,
- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$  converge,

d'où par comparaison

$$\int_0^{+\infty} h(x) dx \text{ converge.}$$

b) On obtient que  $c = 1$  et  $d = -1$  conviennent. Ainsi pour tout  $x \geq 0$ ,  $h(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$ .

On en déduit que

la fonction  $x \mapsto \ln(x+1) - \ln(x+2)$  est une primitive de  $h$  sur  $\mathbb{R}_+$ .

c)  $f_0$  est définie, à valeurs positives sur  $\mathbb{R}$  et continue sur  $\mathbb{R}^*$  d'après les propriétés des opérations sur les fonctions continues.

Il suffit alors de montrer que  $\int_{-\infty}^{+\infty} f_0(x) dx$  converge et vaut 1 pour prouver que  $f_0$  est une densité de probabilité.

D'après la question précédente, on peut affirmer que  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)(x+2)} dx$  converge.

En effet :

- $\forall x \geq 0, \ln(x+1) - \ln(x+2) = \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)$ , d'où  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x+1) - \ln(x+2) = 0$ .
- $h$  possède donc une primitive qui admet une limite finie en  $+\infty$ .

On peut alors en conclure que  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)(x+2)} dx$  converge. En notant  $H$  cette primitive, on en déduit de plus que :  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)(x+2)} dx = 0 - H(0) = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(2)$ .

D'où,  $\int_0^{+\infty} f_0(x) dx$  converge et vaut 1.

**3.a)** Nous devons nous intéresser à la convergence de  $\int_0^{+\infty} x f_0(x) dx$ . Cette intégrale est impropre en  $\infty$  et  $x f_0(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$ .  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$  diverge, d'où d'après le cours, cette équivalence de fonctions à valeurs positives montre que  $\int_1^{+\infty} x f_0(x) dx$  diverge. On en conclut que  $E(X)$  n'existe pas .

**b)** Par définition :  $\forall x \in \mathbb{R}, S_X(x) = \int_x^{+\infty} f_0(t) dt$ .

- Lorsque  $x \leq 0, \int_x^{+\infty} f_0(t) dt = \int_0^{+\infty} f_0(t) dt = 1$  d'où  $S_X(x) = 1$ .
- Lorsque  $x > 0, S_X(x) = \frac{1}{\ln(2)} \int_x^{+\infty} \frac{1}{(t+1)(t+2)} dt$  et en utilisant la primitive de  $h$ ,

$$S_X(x) = \frac{1}{\ln(2)} (0 - H(x)) = -\frac{1}{\ln(2)} \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = \frac{1}{\ln(2)} \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right)$$

En  $+\infty, \frac{x+2}{x+1} \rightarrow 1$ , d'où  $\ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x+2}{x+1} - 1$  i.e.  $\ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$ . Finalement

$$S_X(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x \ln(2)}$$

**c)** On montre comme dans la question 3.a) que

$$\int_0^{+\infty} S_X(x) dx \text{ diverge.}$$

**4.a)** Si  $F$  est la fonction de répartition de  $X, F$  est croissante, d'où  $-F$  est décroissante et puisque, pour tout  $x \in \mathbb{R}, S_X(x) = 1 - F(x)$ , donc  $S_X$  est décroissante sur  $\mathbb{R}$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$ , d'où il vient  $\lim_{x \rightarrow +\infty} S_X(x) = 0$ .

**b)** La fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle est continue à droite en tout point, d'où  $S_X$  est continue à droite en tout point et donc en 0.

$S_X$  est continue à gauche en 0 ssi  $\lim_{x \rightarrow 0^-} S_X(x) = S_X(0)$ .  $X$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$ , d'où pour tout  $x < 0, S_X(x) = P([X > x]) = 1$ . Ainsi  $S_X$  est continue à gauche en 0 ssi  $S_X(0) = 1$  i.e.  $P([X > 0]) = 1$ . Or  $P([X \geq 0]) = 1 = P([X = 0]) + P([X > 0])$ .

On en conclut que  $S_X$  est continue à gauche en 0 ssi  $P([X = 0]) = 0$ .

5.a) La fonction de répartition  $F$  de  $X$  étant continue sur  $\mathbb{R}$  puisque  $X$  est à densité,  $S_X$  l'est aussi. De plus,  $f$  étant continue sur  $]0, +\infty[$ ,  $F$  est de classe  $C^1$  sur  $]0, +\infty[$ , d'où  $S_X$  aussi.

b) Cette intégrale est éventuellement impropre en 0.  $x \mapsto xf(x)$  est à valeurs positives sur  $[0, 1]$  et  $xf(x) = o(f(x))$ . Or

$$\int_0^1 f(x)dx \text{ converge d'où par comparaison } \int_0^1 xf(x)dx \text{ converge.}$$

c) On suppose  $A > 0$ , le cas  $A = 0$  n'ayant aucun intérêt. Soit  $0 < a < A$ . Réalisons une intégration par parties sur  $\int_a^A S_X(x)dx$  en posant pour  $x \in [a, A]$ ,  $u(x) = S_X(x), v(x) = x$ .  $u$  et  $v$  sont de classe  $C^1$  sur le segment d'intégration, d'où on peut intégrer par parties :

$$\int_a^A S_X(x)dx = [S_X(x)x]_a^A - \int_a^A (-f(x))x dx = AS_X(A) - aS_X(a) + \int_a^A xf(x)dx$$

$aS_X(a) \rightarrow 0$  quand  $a \rightarrow 0$  car  $S_X$  est bornée par 0 et 1. On peut passer à la limite sur  $a$  tendant vers 0 :

$$\int_0^A S_X(x)dx = AS_X(A) + \int_0^A xf(x)dx$$

d) Si  $\int_0^{+\infty} S_X(x)dx$  converge alors pour tout  $A > 0$ ,  $\int_0^{+\infty} S_X(x)dx \geq \int_0^A S_X(x)dx$  puisque  $S_X$  est à valeurs positives.

En remarquant que  $AS_X(A) \geq 0$ , de l'égalité précédente on déduit que, pour tout  $A > 0$ ,  $\int_0^A xf(x)dx \leq \int_0^A S_X(x)dx$ .

La condition nécessaire et suffisante de convergence des intégrales impropres de fonctions positives est vérifiée :

$\int_0^{+\infty} xf(x)dx$  converge donc  $E(X)$  existe .

e) Pour tout  $A \geq 0$ ,  $AS_X(A) = \int_A^{+\infty} Af(x)dx$ . Pour tout  $x \geq A$ ,  $Af(x) \leq xf(x)$ . Par croissance de l'intégrale impropre, sachant que  $\int_A^{+\infty} xf(x)dx$  est convergente, on obtient :

$$\int_A^{+\infty} Af(x)dx \leq \int_A^{+\infty} xf(x)dx \text{ d'où } AS_X(A) \leq \int_A^{+\infty} xf(x)dx$$

f) Démontrons cette équivalence par double implication :

- Supposons que  $\int_0^{+\infty} S_X(x)dx$  converge. Alors d'après la question d)  $E(X)$  existe.

La question e) montre aussi que  $\lim_{A \rightarrow +\infty} AS_X(A) = 0$ . On fait alors tendre  $A$  vers  $+\infty$  dans l'égalité du 4.c), ce qui

$$\text{donne : } \int_0^{+\infty} S_X(x)dx = \int_0^{+\infty} xf(x)dx = E(X).$$

- Réciproquement, supposons que  $E(X)$  existe.

La question e) permet d'établir comme nous l'avons déjà dit, que  $\lim_{A \rightarrow +\infty} AS_X(A) = 0$ .

L'égalité de la question c)  $\int_0^A S_X(x)dx = AS_X(A) + \int_0^A xf(x)dx$  montre que  $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A S_X(x)dx$  existe, est finie et

$$\text{vaut } \int_0^{+\infty} S_X(x)dx = E(X).$$

L'équivalence et l'égalité sont ainsi démontrées.

6.a) Travaillons sur la somme :  $\sum_{k=0}^n kP([X = k])$ .

Pour tout  $k \geq 1, X$  étant à valeurs entières,  $P([X > k - 1]) = P([X = k]) + P([X > k])$ , donc  $P([X = k]) = P([X > k - 1]) - P([X > k])$ .

D'où :

$$\sum_{k=0}^n kP(X = k) = \sum_{k=1}^n kP(X = k) = \sum_{k=1}^n k(P([X > k - 1]) - P([X > k])) = \sum_{k=1}^n kP([X > k - 1]) - \sum_{k=1}^n kP([X > k])$$

d'où par changement d'indice,

$$\sum_{k=0}^n kP(X = k) = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)P([X > k]) - \sum_{k=1}^n kP([X > k]) = P([X > 0]) + \sum_{k=1}^{n-1} P([X > k]) - nP([X > n])$$

d'où

$$\sum_{k=0}^n kP(X = k) + nP([X > n]) = \sum_{k=0}^{n-1} P([X > k])$$

i.e.

$$\sum_{k=0}^n kP(X = k) + nP([X \geq n + 1]) = \sum_{k=0}^{n-1} P([X > k])$$

On ajoute  $P([X \geq n + 1]) = P([X > n])$  aux deux membres de l'égalité :

$$\sum_{k=0}^n kP(X = k) + (n + 1)P([X \geq n + 1]) = \sum_{k=0}^n P([X > k])$$

ce qui donne l'égalité à prouver.

b) Le raisonnement est analogue à celui fait dans la question 5.d).

c) Démontrons cette équivalence par double implication :

- Supposons que  $\sum_{k=0}^{+\infty} S_X(k)$  converge.

Alors d'après la question b)  $E(X)$  existe. Pour tout  $n \geq 0$ ,

$$(n + 1)P([X \geq n + 1]) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (n + 1)P([X = k]) \text{ et pour tout } k \geq n + 1, (n + 1)P([X = k]) \leq kP([X = k]). \text{ D'où :}$$

$$0 \leq (n + 1)P([X \geq n + 1]) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} kP([X = k])$$

d'où  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n + 1)P([X \geq n + 1]) = 0$ . On fait alors tendre  $n$  vers  $+\infty$  dans l'égalité du 6.a), ce qui donne :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} S_X(k) = \sum_{k=0}^{+\infty} kP([X = k]) = E(X).$$

- Réciproquement, supposons que  $E(X)$  existe.

On montre alors comme précédemment que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n + 1)P([X \geq n + 1]) = 0$ .

L'égalité de la question a) permet alors de montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n S_X(k)$  existe, est finie et vaut  $E(X)$ .

L'équivalence et l'égalité sont ainsi démontrées.

d)

(i) Par définition, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $S_X(x) = P([X > x])$ . Si  $k \in \mathbb{N}$  et  $x \in [k, k + 1[$ ,  $P([X > x]) = P([X > k])$ . Ainsi, la fonction  $S_X$  est une fonction constante sur chaque intervalle  $[k, k + 1[$  donc elle est continue par morceaux sur  $[0, N]$ , d'où l'intégrale est bien définie.

Utilisons la relation de Chasles : 
$$\int_0^N S_X(x)dx = \sum_{k=0}^{N-1} \int_k^{k+1} S_X(x)dx = \sum_{k=0}^{N-1} S_X(k)$$
 puisque  $S_X$  est constante sur  $[k, k + 1[$ .

(ii) On suppose que  $E(X)$  existe d'où  $\sum_{k=0}^{+\infty} S_X(k)$  converge et vaut  $E(X)$ .

La fonction  $S_X$  est à valeurs positives sur  $\mathbb{R}_+$  d'où, pour tout  $A > 0$ ,

$$\int_0^{[A]} S_X(x)dx \leq \int_0^A S_X(x)dx \leq \int_0^{[A]+1} S_X(x)dx$$

et ainsi :

$$\sum_{k=0}^{[A]-1} S_X(k) \leq \int_0^A S_X(x)dx \leq \sum_{k=0}^{[A]} S_X(k).$$

Lorsque  $A \rightarrow +\infty$ ,  $[A] \rightarrow +\infty$ , d'où  $\sum_{k=0}^{[A]-1} S_X(k) \rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} S_X(k)$  et  $\sum_{k=0}^{[A]} S_X(k) \rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} S_X(k)$ . Le théorème de convergence par encadrement permet de conclure :

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A S_X(x)dx \text{ existe et vaut } E(X).$$

## Partie II. Fonctions de distorsion et espérances corrigées : un exemple.

7.a) Puisque que la densité usuelle  $\varphi$  de la loi normale centrée réduite est continue sur  $\mathbb{R}$ , on sait d'après le cours que  $\Phi$ , la fonction de répartition de cette loi est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  et que  $\varphi$  est sa dérivée. Cette dérivée est à valeurs strictement positives sur  $\mathbb{R}$ , d'où par le théorème de la bijection ( $\Phi$  est continue sur  $\mathbb{R}$ ),

$$\Phi \text{ établit une bijection de } \mathbb{R} \text{ sur } ] \lim_{t \rightarrow -\infty} \Phi(t), \lim_{t \rightarrow +\infty} \Phi(t) [ \text{ soit } ]0, 1[$$

puisque  $\Phi$  est une fonction de répartition.

b) Comme réciproque de  $\Phi$ ,  $\Psi$  est continue sur  $]0, 1[$ . D'où par composition  $w_\alpha$  est continue sur  $]0, 1[$ .

Montrons que  $\lim_{x \rightarrow 0} w_\alpha(x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 1} w_\alpha(x) = 1$ .

Quand  $x \rightarrow 0$ ,  $\Psi(x) \rightarrow -\infty$ , d'où  $\Psi(x) - \Psi(\alpha) \rightarrow -\infty$ , d'où en composant par  $\Phi$ ,  $w_\alpha(x) \rightarrow 0$ .

On raisonne de même lorsque  $x \rightarrow 1$ .  $w_\alpha$  est continue sur  $]0, 1[$ .

Pour la dérivabilité, on sait d'après le cours que, puisque  $\Phi$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et que sa dérivée se s'annule pas,  $\Psi$  est dérivable sur  $]0, 1[$ . On peut alors en conclure par composition que  $w_\alpha$  est dérivable sur  $]0, 1[$ .

c) D'après la formule de la dérivée d'une composée,  $\forall x \in ]0, 1[$ ,  $w'_\alpha(x) = \Psi'(x)\Phi'(\Psi(x) - \Psi(\alpha))$ . Et d'après la formule de la dérivée d'une réciproque,  $\Psi'(x) = \frac{1}{\varphi(\Psi(x))}$ , d'où  $\forall x \in ]0, 1[$ ,

$$w'_\alpha(x) = \frac{\varphi(\Psi(x) - \Psi(\alpha))}{\varphi(\Psi(x))} = \frac{\exp(-\frac{1}{2}(\Psi(x) - \Psi(\alpha))^2)}{\exp(-\frac{1}{2}(\Psi(x))^2)} = \exp\left(-\frac{1}{2}(\Psi(x))^2 + \Psi(x)\Psi(\alpha) - \frac{1}{2}(\Psi(\alpha))^2 + \frac{1}{2}(\Psi(x))^2\right)$$

soit  $w'_\alpha(x) = \exp(\Psi(x)\Psi(\alpha) - \frac{1}{2}(\Psi(\alpha))^2)$

d) L'équation de la tangente est la suivante :  $y = w_\alpha(\alpha) + (x - \alpha)w'_\alpha(\alpha)$ . Or  $w_\alpha(\alpha) = \Phi(0) = \frac{1}{2}$  et  $w'_\alpha(\alpha) = \exp(\frac{1}{2}(\Psi(\alpha))^2)$ . D'où on obtient l'équation suivante :

$$y = \frac{1}{2} + (x - \alpha) \exp\left(\frac{1}{2}(\Psi(\alpha))^2\right)$$

e)  $w_\alpha$  vérifie bien les conditions concernant la valeur en 0 et la valeur en 1. Elle est aussi, continue sur  $]0, 1[$ , croissante sur  $]0, 1[$  puisque continue et de dérivée positive sur  $]0, 1[$ .

Montrons qu'elle est concave sur  $]0, 1[$ .

$\alpha \in ]0, \frac{1}{2}[$  d'où  $\Psi(\alpha) < 0$ , et avec la croissance de  $\Psi$  comme réciproque de  $\Phi$ , on en déduit que la fonction  $x \mapsto \Psi(x)\Psi(\alpha) - \frac{1}{2}(\Psi(\alpha))^2$  est décroissante sur  $]0, 1[$ . En composant par la fonction exponentielle qui est croissante, on obtient que la fonction  $w'_\alpha$  est décroissante sur  $]0, 1[$ .

On peut alors affirmer que  $w_\alpha$  est concave sur  $]0, 1[$ . Finalement  $w_\alpha$  est bien une fonction de distorsion.

8.a)  $Y$  suit la loi normale  $(\mu, 1)$  d'où  $Y_0 = Y - \mu$  suit la loi normale  $(0, 1)$ . On peut donc écrire que  $X = \exp(\mu) \exp(Y_0)$ .

D'après le théorème de transfert,  $E(\exp(Y_0))$  existe si et seulement si  $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(t) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$  est convergente.

Pour tout  $t$  réel :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(t) \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2 - t}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(t - 1)^2 + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{e} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(t - 1)^2\right)$$

Or  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(t - 1)^2\right) dt$  converge et vaut 1 comme l'intégrale sur  $\mathbb{R}$  d'une densité de probabilité de la loi normale  $(1, 1)$ . Donc, on peut en conclure que  $E(\exp(Y_0))$  existe et vaut  $\sqrt{e}$ . D'où  $E(X)$  existe et vaut  $e^{\mu + \frac{1}{2}}$ .

b) Par définition, pour tout  $x > 0$ ,  $S_X(x) = P(\exp(Y) > x) = P(Y > \ln(x))$  en utilisant le fait que le ln est strictement croissant.

Ensuite,  $P(Y > \ln(x)) = 1 - \Phi(\ln(x) - \mu) = \Phi(\mu - \ln(x))$  d'après les propriétés connues de  $\Phi$ .

D'où,  $w_\alpha(S_X(x)) = w_\alpha(\Phi(\mu - \ln(x))) = \Phi(\Psi(\Phi(\mu - \ln(x))) - \Psi(\alpha)) = \Phi(\mu - \ln(x) - \Psi(\alpha))$ .

Or  $\Phi(\mu - \ln(x) - \Psi(\alpha)) = 1 - \Phi(\ln(x) + \Psi(\alpha) - \mu) = P([Y > \ln(x) + \Psi(\alpha)])$ . On « compose » alors par l'exponentielle qui est strictement croissante :  $w_\alpha(S_X(x)) = P([X > xe^{\Psi(\alpha)}])$  donc finalement  $w_\alpha(S_X(x)) = P([Xe^{-\Psi(\alpha)} > x])$ .

c) Pour prouver l'existence et calculer la valeur de  $E_{w_\alpha}(X)$ , on doit s'intéresser à  $\int_0^{+\infty} w_\alpha(S_X(x)) dx$  donc à  $\int_0^{+\infty} P([Xe^{-\Psi(\alpha)} > x]) dx$ . Mais, pour tout  $x$  réel,  $P([Xe^{-\Psi(\alpha)} > x]) = S_{Xe^{-\Psi(\alpha)}}(x)$ . La variable aléatoire  $Xe^{-\Psi(\alpha)}$  ad-

met une espérance qui vaut  $E(X)e^{-\Psi(\alpha)}$ , d'où d'après la question 5,  $\int_0^{+\infty} S_{Xe^{-\Psi(\alpha)}}(x)dx$  converge et vaut  $E(X)e^{-\Psi(\alpha)}$ .

On peut donc en déduire que

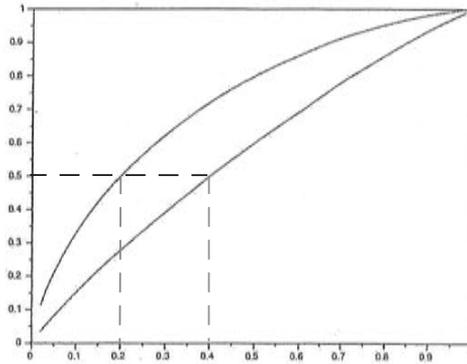
$$E_{w_\alpha}(X) \text{ existe et vaut } e^{\mu + \frac{1}{2} - \Psi(\alpha)}.$$

**9.a)** L'instruction (2) affecte à la variable  $p$  une matrice ligne dont la première valeur est 0,02, la dernière 0,98 et les autres sont 0,03; 0,04; ...; 0,97. Elle comporte 97 valeurs!

La valeur  $q$  est aussi de cette forme. Précisons quels sont ses coefficients. Si l'on note  $p_k$  le  $k$ -ième coefficient de  $p$ , alors  $q_k$  le  $k$ -ième coefficient de  $q$  vaut  $\Psi(p_k) - \Psi(\alpha)$ ,  $\alpha$  désignant la valeur que contient la variable  $\alpha$ .

b) Pour obtenir la courbe de  $w_\alpha$ , on complète (4) ainsi : `wa=cdfnor("PQ",q,0,1)`.

c) On sait que  $w_\alpha(\alpha) = \frac{1}{2}$ . Il suffit alors de regarder sur la courbe pour quelle abscisse on a une ordonnée égale à 0,5 :



La courbe de la fonction la plus grande correspond à  $\alpha = 0,2$ .

**d)** Question très imprécise! S'agit-il de le faire avec les informations fournies par l'énoncé ou en utilisant plus de Scilab ?

On peut obtenir une approximation de ces tangentes en calculant  $\frac{w_\alpha(0,02)}{0,02}$  et  $\frac{w_\alpha(0,98) - 1}{-0,2}$ . Pour confirmer les résultats obtenus, on peut calculer  $\frac{w_\alpha(x)}{x}$  et  $\frac{w_\alpha(x) - 1}{x - 1}$  avec Scilab pour des valeurs de  $x$  très proches de 0 pour le premier quotient puis de 1 pour le second.

En 0 on obtient des valeurs très grandes donc les tangentes sont verticales et en un, les valeurs obtenues sont très proches de 0, donc elles sont horizontales.

e) Lorsque  $\alpha \rightarrow 0$ ,  $\Psi(\alpha) \rightarrow -\infty$ , d'où pour tout  $x \in ]0, 1]$ ,  $w_\alpha(x) \rightarrow 1$ . On peut en déduire que

la courbe représentative de  $w_\alpha$  sur  $]0, 1]$  tend vers le segment défini par  $y = 1, x \in ]0, 1]$ .

### Sous-additivité des espérances corrigées.

**10.a)** On sait que  $g$  est concave sur  $]0, 1[$  [d'où par définition, pour tout  $(x_1, x_2) \in ]0, 1]^2$  et  $t \in [0, 1]$ ,

$$g(tx_1 + (1-t)x_2) \geq tg(x_1) + (1-t)g(x_2)$$

On applique cette inégalité à  $t = x$ ,  $x_1 = 1 - \frac{1}{n}$  et  $x_2 = \frac{1}{n}$  pour obtenir l'inégalité demandée.

- b) Nous remarquons que  $x(1 - \frac{1}{n}) + (1 - x)\frac{1}{n} \rightarrow x$  quand  $n \rightarrow +\infty$  et ainsi par continuité de  $g$  sur  $[0, 1]$ ,  
 $g(x(1 - \frac{1}{n}) + (1 - x)\frac{1}{n}) \rightarrow g(x)$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

On démontre de même que  $xg(1 - \frac{1}{n}) + (1 - x)g(\frac{1}{n}) \rightarrow x$ , d'où on en déduit l'inégalité  $g(x) \geq x$  par passage à la limite sur  $n$  dans l'inégalité du 10.a).

- c) Intéressons nous à la première équation. L'égalité est équivalente à  $\lambda \underbrace{(b + \varepsilon) - a}_{>0} = \varepsilon$ , puis à  $\lambda = \frac{\varepsilon}{(b + \varepsilon) - a}$ . On a donc une seule valeur possible pour  $\lambda$  qui appartient bien au segment  $[0, 1]$  d'après les inégalités  $a < b < b + \varepsilon$ . On vérifie que cette valeur satisfait la deuxième égalité.

La concavité de  $g$  nous permet d'écrire :

$$g(b) \geq \lambda g(a) + (1 - \lambda)g(b + \varepsilon) \quad ; \quad g(a + \varepsilon) \geq (1 - \lambda)g(a) + \lambda g(b + \varepsilon)$$

D'où, en écrivant  $g(a)$  sous la forme  $\lambda g(a) + (1 - \lambda)g(a)$ , on obtient :

$$g(b) - g(a) \geq \lambda g(a) + (1 - \lambda)g(b + \varepsilon) - (\lambda g(a) + (1 - \lambda)g(a)) \text{ i.e. } g(b) - g(a) \geq (1 - \lambda)g(b + \varepsilon) - (1 - \lambda)g(a)$$

Mais, on a  $(1 - \lambda)g(a) \leq g(a + \varepsilon) - \lambda g(b + \varepsilon)$ , d'où

$$g(b) - g(a) \geq (1 - \lambda)g(b + \varepsilon) - g(a + \varepsilon) + \lambda g(b + \varepsilon)$$

soit encore  $g(b) - g(a) \geq g(b + \varepsilon) - g(a + \varepsilon)$ .

- 11.a) Pour montrer que  $E(X)$  existe, montrons d'après les résultats de la partie I, que  $\int_0^{+\infty} S_X(x)dx$  converge.

Or, d'après la question 10.b), pour tout  $x \geq 0$ ,  $0 \leq S_X(x) \leq g(S_X(x))$  et  $E_g(X)$  existe par hypothèse donc  $\int_0^{+\infty} g(S_X(x))dx$  converge.

On peut alors conclure, grâce au théorème de convergence par comparaison pour les intégrales impropres de fonctions positives, que  $\int_0^{+\infty} S_X(x)dx$  converge et vérifie  $\int_0^{+\infty} S_X(x)dx \leq \int_0^{+\infty} g(S_X(x))dx$ .

On a ainsi établi que  $E(X)$  existe et  $E(X) \leq E_g(X)$ .

- b) Si  $X$  est certaine de valeur  $c$  alors  $E(X) = c$  et  $S_X(x) = 1$  pour  $x < c$  et 0 sinon. D'où  $g(S_X(x)) = 1$  pour  $x \in [0, c]$ , ce qui montre que  $\int_0^{+\infty} g(S_X(x))dx$  converge et vaut  $c$ .

- c) Pour tout  $x \geq 0$ ,  $S_{rX+s}(x) = P([rX + s > x]) = P([X > \frac{x-s}{r}]) = S_X(\frac{x-s}{r})$  puisque  $r > 0$ . Or si  $x < s$ ,  $S_X(\frac{x-s}{r}) = 1$  puisque  $X$  est à valeurs positives. D'où on a :

$$g(S_{rX+s}(x)) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, s[ \\ g(S_X(\frac{x-s}{r})) & \text{si } x \geq s \end{cases}$$

On en déduit que,  $\int_0^s g(S_{rX+s}(x))dx$  converge et vaut  $s$ , d'une part et d'autre part que, étudier  $\int_s^{+\infty} g(S_{rX+s}(x))dx$  revient à étudier  $\int_s^{+\infty} g(S_X(\frac{x-s}{r}))dx$ .

Le changement de variable affine  $t = \frac{x-s}{r}$  qui est admissible de  $]s, +\infty[$  sur  $]0, +\infty[$  ramène l'étude de cette dernière intégrale à l'étude de  $\int_0^{+\infty} g(S_X(t))rdt$ . Celle-ci est convergente et vaut  $rE_g(X)$ , d'où on en déduit que  $\int_s^{+\infty} g(S_{rX+s}(x))dx$  converge et vaut  $rE_g(X)$ .

Finalement, on a bien montré que

$$E_g(rX + s) \text{ existe et vaut } rE_g(X) + s.$$

d) Notons  $A$  l'événement  $[0 \leq T \leq W]$ . Soit  $x \geq 0$ . On a  $S_T(x) = P([T > x]) = P([x < T \leq W])$  d'après l'application de formule des probabilités totales avec le système complet  $A, \bar{A}$ .

Or  $[x < T \leq W] \subset [x < W]$ , d'où par croissance de  $P$  pour l'inclusion  $S_T(x) \leq S_W(x)$ .

$g$  étant croissante, on a donc pour tout  $x$  positif,  $g(S_T(x)) \leq g(S_W(x))$  et par croissance de l'intégrale, dans la mesure où on admet les convergences,

$$E_g(T) \leq E_g(W).$$

12. Par hypothèse  $P([Y \in [0, B]]) = 1$ , d'où pour tout  $x \geq B$ ,  $S_Y(x) = 0$ . Ainsi pour tout  $x \geq B$ ,  $g(S_Y(x)) = 0$ . On en déduit que  $\int_s^{+\infty} g(S_Y(x))dx$  converge et vaut 0.

Pour  $x \in [0, B]$ ,  $0 \leq g(S_Y(x)) \leq 1$ , d'où par le théorème déjà cité,  $\int_0^s g(S_Y(x))dx$  converge et est majorée par  $B$ . Ainsi

$$E_g(Y) \text{ existe et } E_g(Y) \leq B$$

Pour l'étude  $E_g(X + Y)$ , montrons que pour tout  $x \geq 0$ ,  $S_{X+Y}(x) \leq S_X(x - B)$ . Posons  $A = [0 \leq Y \leq B]$ .

L'application de la formule des probabilités totales avec le système complet  $A, \bar{A}$ , donne :

$$P([X + Y > x]) = P([X + Y > x] \cap [0 \leq Y \leq B]) \text{ étant donné que } P([X + Y > x] \cap \bar{A}) = 0.$$

Or, si  $X + Y > x$  et  $Y \leq B$  alors  $X > x - Y \geq x - B$ , d'où  $[X + Y > x] \cap [0 \leq Y \leq B] \subset [X > x - B]$ .

En passant aux probabilités,  $P([X + Y > x]) \leq P([X > x - B])$  i.e.  $S_{X+Y}(x) \leq S_X(x - B)$  et par croissance de  $g$  sur  $[0, 1]$ ,  $g(S_{X+Y}(x)) \leq g(S_X(x - B))$ .

Or  $\int_B^{+\infty} g(S_X(x - B))dx$  converge et vaut  $\int_0^{+\infty} g(S_X(x))dx$  par translation. Ainsi, par comparaison,  $\int_B^{+\infty} g(S_{X+Y}(x))dx$  converge et est majorée par  $E_g(X)$ .

Pour  $x \in [0, B]$ ,  $0 \leq g(S_{X+Y}(x)) \leq 1$ , d'où la convergence de  $\int_0^B g(S_{X+Y}(x))dx$  et la majoration par  $B$ .

En conclusion :

$$E_g(X + Y) \text{ existe et } E_g(X + Y) \leq E_g(X) + B.$$

13.a) Si  $n = 0$ , déterminons  $E_g(U)$ . Pour tout  $x > 0$ ,  $S_U(x) = 0$ , d'où  $g(S_U(x)) = 0$  donc  $E_g(U) = 0$  et d'après la question 12,  $E_g(X + U) \leq E_g(X)$  d'où l'inégalité [2] est vérifiée.

b) On supposera dans la suite de cette question que  $p < 1$

i. Utilisons le système complet  $[Z = 0], [Z > 0]$  et la formule des probabilités totales :

$$P([X + Z > x]) = P([X + Z > x] \cap [Z = 0]) + P([X + Z > x] \cap [Z > 0])$$

Or, par double inclusion, on voit que,  $[X + Z > x] \cap [Z = 0] = [X > x] \cap [Z = 0]$ , d'où

$$S_{X+Z}(x) = P([Z = 0])P_{|Z=0}([X > x]) + P([Z > 0])P_{|Z>0}([X + Z > x])$$

En utilisant les notations de l'énoncé :

$$S_{X+Z}(x) = (1 - p)P_{|Z=0}([X > x]) + pS_{X+Z}^*(x).$$

ii. Encore la formule des probabilités totales. Pour tout  $x > 0$  :

$$P([X > x]) = P([Z = 0])P_{|Z=0}([X > x]) + P([Z > 0])P_{|Z>0}([X > x]) = (1 - p)P_{|Z=0}([X > x]) + pS_X^*(x)$$

et

$$P([Z > x]) = P([Z = 0]) \underbrace{P_{|Z=0}([Z > x])}_{=0} + P([Z > 0])P_{|Z>0}([Z > x]) = pS_Z^*(x)$$

d'où  $S_X(x) = (1 - p)P_{|Z=0}([X > x]) + pS_X^*(x)$  et  $S_Z(x) = pS_Z^*(x)$  .

iii. Pour tout  $x > 0$ ,

$$g(S_{X+Z}(x)) = g((1 - p)P_{|Z=0}([X > x]) + pS_{X+Z}^*(x)) \text{ et } gS_X(x) = g((1 - p)P_{|Z=0}([X > x]) + pS_X^*(x))$$

Posons,  $a = pS_X^*(x)$ ,  $b = pS_{X+Z}^*(x)$  et  $\varepsilon = (1 - p)P_{|Z=0}([X > x])$ . En donné que  $Z$  est à valeurs positives  $S_{X+Z}^*(x) \geq S_X^*(x)$  d'où, on peut appliquer 10.c) (on remarquera que l'inégalité ci-dessous est trivialement vérifiée si  $a = b$ ) :

$$g(S_{X+Z}(x)) - g(S_X(x)) \leq g(pS_{X+Z}^*(x)) - g(pS_X^*(x))$$

On retranche  $S_Z(x) = pS_Z^*(x)$  au deux membres de cette inégalité :

$$g(S_{X+Z}(x)) - g(S_X(x)) - g(S_Z(x)) \leq g(pS_{X+Z}^*(x)) - g(pS_X^*(x)) - g(pS_Z^*(x)) .$$

c) Les vérifications pour établir que  $h$  est une fonction de distorsion ne présentent pas de difficultés.

Considérons  $Z^* = Z - 1$ .

On a  $P^*(\{Z^* \in \llbracket 0, n \rrbracket\}) = 1$ , d'où par hypothèse de récurrence

$$E_h^*(X + Z^*) \leq E_h^*(X) + E_h^*(Z^*) \quad [3]$$

où  $E^*$  désigne l'espérance pour la probabilité  $P^*$  sous réserve d'existence de ces deux dernières espérances corrigées.

$Z^*$  prend un nombre fini de valeurs, l'existence de l'espérance corrigée ne pose pas de problème. Pour  $E_h^*(X)$ , montrons que  $\int_0^{+\infty} h(S_X^*(x)) dx$  converge.

Pour tout  $x \geq 0$ ,  $h(S_X^*(x)) = \frac{g(P([X > x] \cap [Z = 0]))}{g(p)}$ , d'où par croissance de  $g$ ,  $h(S_X^*(x)) \leq \frac{g(S_X(x))}{g(p)}$ . On conclut alors aisément que  $E_h^*(X)$  existe.

Mais  $X + Z = X + Z^* + 1$  d'où  $E^*(X + Z) = E^*(X + Z^*) + 1$  d'après la question 11.c) et de même  $E^*(Z) = E^*(Z^*) + 1$ . D'où on obtient à partir de l'inégalité [3] :

$$E_h^*(X + Z) \leq E_h^*(X) + E_h^*(Z)$$

On traduit alors cette inégalité en utilisant des intégrales :

$$\int_0^{+\infty} h(S_{X+Z}^*(x)) dx \leq \int_0^{+\infty} h(S_X^*(x)) dx + \int_0^{+\infty} h(S_Z^*(x)) dx$$

d) En utilisant la définition de  $h$  et en multipliant ses deux membres par  $g(p)$ , l'inégalité précédente dévient :

$$\int_0^{+\infty} g(pS_{X+Z}^*(x))dx \leq \int_0^{+\infty} g(pS_X^*(x))dx + \int_0^{+\infty} g(pS_Z^*(x))dx$$

d'où

$$\int_0^{+\infty} (g(pS_{X+Z}^*(x)) - g(pS_X^*(x)) - g(pS_Z^*(x)))dx \leq 0$$

La majoration de la question 13.b).iii permet alors d'en déduire que :

$$\int_0^{+\infty} (g(S_{X+Z}(x)) - g(S_X(x)) - g(S_Z(x)))dx$$

ce qui peut aussi se traduire par

$$E_g(X + Z) - E_g(X) - E_g(Z) \leq 0 \text{ i.e. } E_g(X + Z) \leq E_g(X) + E_g(Z)$$

L'inégalité [2] est ainsi démontrée, ce qui achève la démonstration par récurrence. L'inégalité [2] est donc vérifiée pour toute variable aléatoire  $U$  telle que  $P([U \in [0, n]]) = 1$  et ce quelque soit  $n \in \mathbb{N}$ .

14.a)  $Y_n$  est à valeurs dans  $[0, B]$  d'où l'existence  $E_g(Y_n)$  et de  $E_g(X + Y_n)$  est donnée par la question 12.

De plus  $n(X + Y_n) = nX + nY_n$  et  $nY_n$  est à valeurs dans  $[0, [nB]]$ . On peut alors appliquer le résultat de la question précédente à  $nX$  et  $nY_n$  :

$$E_g(nX + nY_n) \leq E_g(nX) + E_g(nY_n)$$

d'où, d'après la question 11.c)

$$nE(X + Y_n) \leq nE_g(X) + nE_g(Y_n) \text{ et pour finir } E_g(X + Y_n) \leq E_g(X) + E_g(Y_n)$$

b) Pour tout  $\omega$ ,  $[nY(\omega)] \leq nY(\omega)$ , d'où  $Y_n(\omega) \leq Y(\omega)$ . De ce fait, si  $Y_n(\omega) > x$  alors  $Y(\omega) > x$ . On en déduit que

$[Y_n > x] \subset [Y > x]$ . Alors pour tout  $x \geq 0$ ,  $S_{Y_n}(x) \leq S_Y(x)$ , puis  $g$  étant croissante,  $g(S_{Y_n}(x)) \leq g(S_Y(x))$  et

enfin par intégration,  $\int_0^{+\infty} g(S_{Y_n}(x))dx \leq \int_0^{+\infty} g(S_Y(x))dx$  c'est à dire  $E_g(Y_n) \leq E_g(Y)$ .

c) La première égalité s'établit simplement par le changement de variable  $x = \frac{1}{n} + t$  (à ce stade du sujet, on ne se pose pas trop de questions sur la continuité de  $x \mapsto g(S_Y(x))$  !)

On sait que pour tout réel  $y$ ,  $y - 1 \leq [y]$ , d'où on en déduit que  $Y - \frac{1}{n} \leq Y_n$ , puis que  $X + Y - \frac{1}{n} \leq X + Y_n$ .

On a alors :  $P([X + Y > x + \frac{1}{n}]) = P([X + Y - \frac{1}{n} > x]) \leq P([X + Y_n > x])$ . En composant par  $g$  qui est croissante et

en intégrant de 0 à  $+\infty$ , on obtient

$$\int_0^{+\infty} g(S_{X+Y}(x + \frac{1}{n})) dx \leq E_g(X + Y_n)$$

d) Avec les questions a), b) et c) on obtient la majoration :

$$\int_0^{+\infty} g\left(S_{X+Y}\left(x + \frac{1}{n}\right)\right) dx \leq E_g(X) + E_g(Y)$$

De plus  $E_g(X + Y) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} g(S_{X+Y}(x)) dx$ .

Il suffit alors de passer à la limite dans l'inégalité précédente :

$$E_g(X + Y) \leq E_g(X) + E_g(Y)$$

# ÉCONOMIE, SOCIOLOGIE ET HISTOIRE DU MONDE CONTEMPORAIN

**DURÉE : 4 HEURES.**

*Tout verbiage doit être évité et il est expressément recommandé de ne pas dépasser huit pages, sauf justification par la qualité du résultat.*

*Il sera tenu compte des qualités de plan et d'exposition, ainsi que de la correction de la langue.*

*Il n'est fait usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*

## SUJET

### PEUT-ON CONSIDÉRER QUE LA CONCURRENCE CONSTITUE LE VÉRITABLE MOTEUR DE LA CROISSANCE ÉCONOMIQUE ?

*Vous illustrerez votre propos à partir des mécanismes économiques et de l'histoire des faits économiques du monde contemporain.*

## CORRIGÉ

*Par Jean-Luc Dagut, professeur à Ipecom.*

### Introduction

Le Ministre français du « redressement productif », Arnaud Montebourg, annonçait en 2014 une « feuille de route » destinée à restituer 6 Mds d'euros de pouvoir d'achat aux Français, en mettant un terme aux rentes et monopoles des professions juridiques : huissiers, notaires, commissaires-priseurs, greffiers, administrateurs judiciaires... Son successeur, Emmanuel Macron, a fait adopter dans ce prolongement, en mai 2015, une loi plus large, portant son nom, visant officiellement à « déverrouiller l'économie française », en modifiant notamment le fonctionnement des professions réglementées, et aussi les transports, le travail le dimanche, les prud'hommes.

« *Libérer l'activité pour libérer la croissance* » : tel était déjà l'objectif prioritaire du « Rapport Attali » publié en 2008 (Rapport de la Commission pour la libération de la croissance française : 300 décisions pour changer la France). « L'ambition 5 » de ce rapport, sur les 8 proposées, était de « *supprimer les rentes, réduire les privilèges et favoriser les mobilités* ». Les institutions internationales de leur côté, Commission européenne, OCDE, FMI, n'ont de cesse depuis de nombreuses années d'enjoindre la France à procéder à des « réformes structurelles », afin d'élever son taux de croissance, effective et potentielle, et réduire le chômage.

En Europe, le principe de la concurrence constitue la clé de voûte de l'intégration communautaire. Il inspire l'essentiel des traités, depuis le Traité de Rome de 1957

instituant le marché commun, à l'Acte unique de 1986, visant à la mise en place d'un « grand marché unique et sans entrave » en 1993, et au Traité de Lisbonne de 2007. Depuis le milieu des années 1980, les « politiques de la concurrence » se sont substituées aux politiques industrielles. Au niveau mondial, les progrès du libre-échange permis par les traités de commerce ont favorisé sans doute la croissance de nombreuses nations.

Et pourtant, les dégâts de la concurrence, sur le petit commerce, les petites entreprises, les économies insuffisamment compétitives, l'emploi et les conditions sociales, sont souvent dénoncés. La concurrence consacre la loi du plus fort, qui condamne forcément les plus faibles, qui ne s'adaptent pas toujours, et elle peut être aussi déloyale et faussée.

Il convient donc d'en examiner plus précisément les effets. Est-elle « le principal facteur » de la croissance, ou au moins l'un d'entre eux, ou bien une source de difficultés, voire un obstacle dans certains cas à celle-ci ?

Si la concurrence apparaît comme un moteur irremplaçable du progrès économique (I), nous verrons cependant qu'elle peut engendrer des coûts supérieurs à ses avantages, et qu'elle n'est pas optimale ni suffisante dans un certain nombre de cas (II). Nous nous efforcerons d'apprécier ensuite si la concurrence internationale est toujours bonne pour la croissance des nations (III).

## I. La concurrence est le moteur de l'économie et du progrès

### A. Un principe général d'efficacité

1. « Il est évident que la concurrence, c'est la liberté. Détruire la liberté d'agir, c'est détruire la possibilité, et par suite la faculté, de choisir, de juger, de comparer. C'est tuer l'intelligence, tuer la pensée, tuer l'homme. » Frédéric Bastiat (*Harmonies économiques*, 1850), qui n'avait pas connu les systèmes communistes, pose bien là l'enjeu fondamental de la concurrence. Une liberté d'agir, d'innover, d'entreprendre, et pour le consommateur, de choisir et d'acheter. La libre concurrence va de pair avec la libre entreprise, et le libre choix des consommateurs. La concurrence met aux prises des acteurs qui poursuivent le même but, produisent ou consomment la même chose. A l'instar d'une compétition sportive, l'émulation concurrentielle incite les acteurs à utiliser au mieux leurs capacités.

Sur un marché concurrentiel s'impose la loi du prix unique. Pour un même type de bien, le prix du marché sera le prix le plus bas. La mise en concurrence des offreurs par les demandeurs aboutit à ce résultat. Les producteurs moins performants sont évincés. Est pris en compte plus largement le meilleur rapport qualité-prix, faisant appel pour les producteurs aux deux formes de compétitivité, prix et produit. La compétitivité est l'aptitude à affronter la concurrence, à ces deux niveaux. Prix et qualité dépendent de la productivité et de l'efficacité générale des firmes. La concurrence exerce une pression permanente sur les coûts, les prix, l'organisation, les hommes, la qualité, l'innovation, et opère une sélection darwinienne des meilleurs producteurs, pour le plus grand profit du consommateur, souverain.

La concurrence pure et parfaite walrassienne est théoriquement garante d'une allocation optimale des ressources rares à usage alternatif. Elle requiert pour cela

cinq conditions : (1) des entreprises nombreuses et de même taille ; (2) en compétition pour fabriquer des biens de qualité homogène ; (3) pouvant entrer et sortir librement des activités diverses, sans coûts ; (4) une information parfaite guidant les décisions des agents ; (5) une mobilité également parfaite des facteurs travail et capital.

L'équilibre du marché passe par des ajustements. Les mouvements de prix résultant de l'offre et la demande sur les marchés des biens déclenchent des entrées et des sorties d'entreprises sur ces marchés, et des mouvements de facteurs sur les marchés des facteurs. Les variations des prix des facteurs entre les secteurs entraînent leur réallocation vers les secteurs les plus dynamiques, où la demande est plus forte et les prix plus hauts. Des ajustements dans les quantités produites et les prix s'opèrent alors. Le processus concurrentiel doit conduire à un équilibre optimal.

Dans un cadre de concurrence pure et parfaite, « à l'équilibre », les firmes produisant le même bien ont la même taille et la même efficacité, et vendent au prix du marché le plus bas, égal au minimum de leur coût moyen. Ce « *first best* » est un optimum, la meilleure des situations possibles. La demande est satisfaite au prix le plus bas, par des producteurs qui, en vendant à ce prix ; couvrent leur coût moyen le plus bas, en réalisant néanmoins un « profit normal ». « *Là où il y a des profits anormaux, la liberté d'entrée permet d'accroître la production et d'abaisser les prix.* », explique R. Barre (*Economie politique*, 1966).

2. Alors que le modèle walrassien de la concurrence pure et parfaite suggère un mécanisme d'équilibrage de l'ensemble des marchés s'opérant de façon rapide et simultanée, l'école autrichienne voit au contraire dans la concurrence un processus essentiellement dynamique, dans un cadre où justement l'information est toujours imparfaite, et sans que les biens soient nécessairement homogènes et les firmes égales. « *La concurrence est précieuse parce qu'elle constitue une méthode de découverte* », écrit F.-Y. Hayek (*Droit, législation et liberté*, 1979). L'économie change en permanence, les acteurs, les produits, les technologies, les métiers, les préférences, et la concurrence apparaît comme un processus empirique d'adaptation aux changements. A l'opposé de la vision néo-classique, c'est le déséquilibre dynamique qui caractérise ici l'économie de marché. Ce processus de destruction créatrice ne s'arrête pas. Une nouvelle allocation des ressources en résulte en permanence. L'évolution est la loi du capitalisme concurrentiel selon J. Schumpeter (1911). Elle est au principe du progrès économique : « *On n'imagine pas un capitalisme figé* ».

Historiquement, la concurrence s'est développée avec la révolution des transports à partir du XIX<sup>e</sup>, qui a permis l'éclosion de véritables marchés, de taille nationale, puis internationale. Elle a entraîné le progrès technique, et la croissance. La concurrence est le fruit et la condition de l'innovation, sous toutes ses formes. Lorsqu'elle se traduit par l'arrivée de nouveaux producteurs, de nouveaux procédés ou de nouveaux produits, ses effets peuvent imprimer des changements rapides. Une innovation de procédé par exemple, faisant baisser les coûts et les prix d'un producteur, peut créer un « choc d'offre ». Pouvant déclencher un « choc de demande », issu de la baisse des prix relatifs des biens concernés, et de la hausse concomitante du revenu réel des consommateurs. « Effets-prix » et « effets-revenu » se combinent dans une augmentation de la demande des produits dont les prix ont baissé, et de celle de nouveaux produits dans d'autres secteurs.

La concurrence a des effets induits sur l'emploi. Comme le progrès technique, elle détruit directement des emplois là où elle s'applique, mais en crée dans les firmes qui l'introduisent et indirectement ailleurs. Si la concurrence profite toujours au consommateur, ses effets peuvent être aussi favorables à l'emploi grâce à l'accroissement de la demande qui en résulte.

## B. Concentration, concurrence, et politiques de la concurrence

1. D'une façon générale, la théorie économique démontre les méfaits des distorsions de concurrence et des monopoles. Les entraves légales à la concurrence et les réglementations protectrices, comme J. Stigler l'a montré notamment, sont toujours issues du lobbying des groupes les plus influents auprès des pouvoirs publics. En résultent des situations sous-optimales et une inefficience allocative des ressources. L'on observe souvent par ailleurs que les firmes sur des marchés oligopolistiques ne se livrent pas toujours une concurrence féroce. « *L'objectif visé par les firmes n'est pas d'éliminer les concurrents en vendant moins cher qu'eux, mais de vendre le plus cher possible pour dégager un bénéfice maximum* », résumait fort bien Alain Chénicourt (*L'inflation ou l'anti-croissance*, 1971). De leur côté, les monopoles imposent quatre coûts dommageables à la collectivité. Ils sont malthusiens en restreignant l'offre, inflationnistes en tarifant leurs biens et services bien au-dessus du coût marginal et du coût moyen minimum, peu innovants car désincités à l'être par l'absence de concurrents, et freinent enfin le développement général en captant une rente et une part excessive du revenu national au détriment des autres secteurs. Dans la représentation graphique de « l'équilibre du monopole », le « trapèze de Tullock » représente l'ensemble des coûts engendrés par celui-ci sur la collectivité.

Il est important toutefois de rappeler que tout phénomène de concentration n'est pas synonyme de disparition de la concurrence. La concentration technique, verticale, économique, horizontale, agrandit la taille des opérateurs et réduit leur nombre. Dans des cas différents de ceux cités plus haut, la concurrence n'en est souvent que plus vive. C'est sans doute d'ailleurs dans la combinaison des deux, concentration d'un côté, qui apporte des rendements d'échelle croissants, et concurrence de l'autre, source continue de tension vers l'efficacité, que les plus grands progrès de l'économie ont été réalisés. Dans beaucoup de cas de concurrence dite « imparfaite », celle-ci est toujours présente, et continue de produire ses effets positifs sur la croissance. A la suite des travaux d'Edward Chamberlin (*The theory of monopolistic competition*, 1933), on distingue ainsi différents cas de concurrence monopolistique, selon que les firmes offrent des biens non identiques mais substituables, des biens partiellement différenciés, ou des biens non similaires, non identiques et non substituables. Les cas de monopoles purs sont rares, et la concurrence peut continuer à jouer, à travers l'élasticité-prix croisée de la demande, en dépit de la non homogénéité stricte des produits. La concurrence oligopolistique met aux prises par ailleurs un petit nombre de firmes qui offrent des biens similaires et identiques. Bien qu'elle puisse être biaisée parfois par des désirs de rente, une concurrence intense joue souvent sur ces marchés, et les niveaux de prix pratiqués peuvent les rapprocher de ceux pouvant être obtenus dans des situations de concurrence pure et parfaite. Le marché automobile mondial en constitue une bonne illustration. Il en est de même dans le cas du duopole de Bertrand (1883), où les duopoleurs se livrent à une guerre des prix, amenant le marché à un équilibre proche de la concurrence parfaite, où le prix est égal au minimum du coût moyen et le surprofit nul.

D'une manière générale, la concentration industrielle ne nuit pas à la concurrence si elle s'accompagne d'une ouverture des frontières élargissant le périmètre du marché. Une manière commode de transformer une firme monopolistique nationale ou régionale en firme oligopolistique mondiale. Contrairement à la vieille théorie de l'impérialisme, la mondialisation ne consacre pas le triomphe des monopoles, mais celui plutôt de la concurrence au sein d'oligopoles mondiaux.

2. La concentration des firmes se traduit souvent néanmoins par des entorses à la concurrence, et c'est l'un des rôles de l'Etat dans une économie libérale que de les prévenir et de les corriger. Les Etats-Unis se sont dotés depuis le <sup>xix</sup><sup>e</sup> siècle d'une législation anti-trusts qui va servir de modèle dans le monde. Le Sherman Act de 1890 signe la naissance du droit de la concurrence moderne. « *Si nous refusons qu'un roi gouverne notre pays, nous ne pouvons accepter qu'un roi gouverne notre production, nos transports ou la vente de nos produits* », déclare à l'époque le sénateur J. Sherman. Complétées par le Clayton Act en 1914, les lois anti-trusts sont annexées à la constitution américaine, et permettront le démantèlement de la Standard Oil et d'American Tobacco en 1911, d'ATT en 1982, et la mise en cause d'IBM en 1982, de Microsoft en 1997, et Apple en 2013.

Fondée sur l'intégration commerciale au sein d'un vaste marché commun, puis « unique » depuis 1993, l'Europe accorde une place importante aux politiques de la concurrence. C'est le cas depuis le Traité de Rome, qui prohibe les ententes entre entreprises (article 85), les positions jugées trop dominantes (articles 82 et 86), et les aides publiques aux entreprises nationales (articles 87, 88 et 92). La Direction Générale de la Concurrence (DGC) au sein de la Commission européenne, s'est opposée à plusieurs reprises à des projets de fusions-acquisitions tels que Aérospatiale et De Havilland en 1991, Péchiney-Alcan-Algroup en 2000, ou Schneider-Legrand en 2001. Elle a bloqué alors la formation de géants industriels mondiaux d'origine européenne au motif de risque d'abus de position dominante. Les ententes et autres distorsions de concurrence ont donné lieu à de sévères sanctions notamment depuis les années 2000 sous la houlette de Mario Monti. Depuis le milieu des années 1980, un vent de « déréglementation » a touché les services et les monopoles publics, qui ont dû ouvrir leur activité à de nouveaux entrants. Les réseaux d'infrastructure ont été séparés de leur exploitation commerciale, dans les transports ferroviaires et aériens, l'électricité et le gaz, les télécommunications, la poste, et de nouveaux opérateurs sont apparus. Dans beaucoup de cas, l'activation de la concurrence dans des secteurs jusque là contrôlés par des monopoles publics s'est traduite par des baisses significatives de prix, et une amélioration de la qualité. L'offre de biens et de services s'est étoffée, et aussi la demande via les baisses de prix. L'emploi a augmenté. Dans le transport aérien par exemple, des services et des emplois nouveaux ont été créés également dans les secteurs connexes du tourisme et de l'hôtellerie. Des progrès spectaculaires ont été enregistrés de même dans les télécommunications.

En France de même, « *la culture de la concurrence a progressé* », affirme en 2015 le président de l'Autorité de la concurrence Bruno Lasserre, laquelle a infligé 4,5 Mds d'€ d'amendes depuis 10 ans. Jusque là, selon lui, les grandes entreprises tendaient à considérer que les profits liés à des ententes étaient supérieurs aux risques de sanctions. L'alourdissement substantiel de celles-ci a pu modifier les comportements. 534 millions d'€ pour le « cartel de la téléphonie mobile » épinglé en 2005. 367 millions pour le « cartel des lessives » en 2011. 605 millions pour le « cartel des cosmétiques » en 2014. 192 millions pour le « cartel du yaourt » en 2015...

Au-delà, comme il l'a été rappelé dans l'introduction, la politique de promotion de la concurrence pour « libérer » la croissance et l'emploi, sans déboursier d'argent public, a trouvé une expression dans la loi Macron de 2015. Le chômage structurel, élevé en France, ne s'expliquerait pas seulement par le mauvais fonctionnement du marché du travail, mais aussi par certaines rigidités propres à certains secteurs. En favorisant une plus grande concurrence, dans le commerce et le secteur des services notamment, il serait possible d'élever les niveaux d'activité et d'emploi. Si les applications de cette loi ont été limitées, en raison d'une forte résistance des syndicats et des professions concernées (taxis, pharmaciens, professions juridiques), certains effets positifs peuvent en être attendus. Le transport en autocar, faisant concurrence au rail, devrait comme en Allemagne ou au RU créer plusieurs dizaines de milliers d'emplois. L'ouverture plus large des commerces (12 dimanches au lieu de 5, dans certaines zones touristiques, avec autorisation municipale) devrait accroître le volume des affaires.

Selon l'OCDE, les réformes récemment conduites en France (Loi Macron de 2015, Accord National Interprofessionnel sur l'assouplissement et la sécurisation de l'emploi, ou ANI en 2013) pourraient générer un supplément d'activité de l'ordre de 3 % du PIB à l'horizon 2020. Plusieurs centaines de milliers d'emplois pourraient être créés (800 000 selon une estimation du gouvernement en avril 2015). La Commission européenne a salué les efforts de réforme de la France, tout en plaidant pour un approfondissement, et une plus grande flexibilité du marché du travail. La concurrence fonctionne en effet si le marché du travail est souple. L'Allemagne serait le modèle à suivre à cet égard. Les lois Hartz engagées dans ce pays au début des années 2000 ont pu faire reculer significativement le chômage (à 5 % en 2015), sans dépenses publiques supplémentaires ni politiques de relance. Mais en encourageant simplement l'offre et la demande de travail. Les quatre lois Hartz ont consisté à réduire les charges patronales, simplifier les contrats de travail, raccourcir la durée d'indemnisation du chômage, et inciter les chômeurs à reprendre un emploi.

## **II. La concurrence n'est pas optimale toutefois dans un certain nombre de situations, et ne constitue sans doute pas un principe suffisant pour assurer la régulation de l'économie**

### **A. Concurrence destructrice, et intérêt dans certains cas de la concurrence imparfaite**

1. La concurrence qui consacre la loi du plus fort, et la disparition des plus faibles, peut conduire au monopole. Sur un marché asymétrique, la firme dominante peut baisser ses prix au niveau de ses coûts moyens, qui sont inférieurs à ceux de ses concurrents de plus petite taille. Après avoir imposé pendant un certain temps ce niveau de prix, qualifié de « prédateur », les concurrents font faillite. La firme leader devenue monopole en profitera alors pour remonter ses prix, d'autant plus que la disparition des firmes concurrentes aura eu pour conséquence de réduire l'offre globale sur le marché. On parle ici de « concurrence destructrice ». Ses avantages à court terme sous forme de baisse des prix deviennent négatifs à plus long terme pour la collectivité. Si la concurrence est équilibrée, une firme agressive peut opter pour une stratégie (illicite) de *dumping*, en fixant des prix inférieurs à ses coûts de revient. Si ses réserves financières lui permettent de tenir un peu plus longtemps que ses partenaires, alors que ses parts de marché augmentent grâce au différentiel de prix, les concurrents disparaissent. La concurrence prend ainsi souvent des

formes agressives. La « concurrence tue la concurrence » dit-on, et ne tend pas nécessairement vers l'équilibre de marché apaisé, égalitaire et optimal, que décrit la théorie néo-classique. Marx évoquait au <sup>XIX</sup><sup>e</sup> siècle déjà la tendance naturelle du capitalisme à la « concentration et à la centralisation du capital ». Le paradoxe de ce système, comme F. Braudel l'a montré également, est que les entreprises, nées de la concurrence, cherchent à y échapper en devenant de vastes entités dominantes ou monopolistiques.

Plus largement, la concurrence est un processus de destruction créatrice, qui peut concourir à la croissance et au progrès si ses conséquences créatrices l'emportent sur ses aspects destructeurs. Est-ce toujours le cas ? Il n'est pas garanti à cet égard que, dans les processus d'élimination concurrentielle, les mécanismes vertueux de réallocation des ressources et des emplois dans d'autres secteurs s'opèrent si facilement. Des entreprises « non compétitives » ferment, mettant au chômage des milliers de personnes. Ce n'est pas grave, diront les tenants du principe concurrentiel, voire normal. « *C'est le mouvement naturel de l'économie* », disait autrefois Raymond Barre. Pourtant, les destructions sont certaines, et les créations aléatoires. Et un temps sépare dans tous les cas le moment où s'opèrent les destructions de valeur et d'emplois et celui des créations de nouvelles activités. Les premières sont immédiates, les secondes futures, si elles se manifestent. La réallocation implique un coût d'adaptation dans tous les cas : coût du désinvestissement, coût du chômage induit, coût de la formation et de la reconversion des travailleurs, coût du réinvestissement dans les nouveaux secteurs. Il n'est pas certain que les bénéfices de la concurrence, sous forme de baisses de prix pour les consommateurs, soient toujours supérieurs à l'ensemble de ces coûts induits par ses effets destructeurs. Cela d'autant moins si l'on intègre les coûts sociaux et humains du changement, et la perte des savoir-faire et des modes anciens de production et de consommation. En France, le « poujadisme » a incarné à la fin des années 1950 la cause du petit commerce traditionnel dont l'existence était menacée par la concurrence nouvelle de la grande distribution. La concurrence a été la plus forte et le petit commerce a disparu. C'est le versant négatif de la destruction créatrice. Le versant positif en est l'approvisionnement obligatoire des consommateurs désormais dans les grandes surfaces.

De même, la concurrence par les prix peut s'opérer au détriment de la qualité, ou de la sécurité. Le problème s'est posé lors de la privatisation des chemins de fer dans la Grande-Bretagne de M. Thatcher dans les années 1980, ou lors de déréglementation du transport aérien. Beaucoup d'accidents et de défauts de sécurité se sont révélés. Aujourd'hui, les professions touchées par la loi Macron mettent en avant l'argument de la baisse probable de qualité des prestations fournies, en cas d'ouverture de leurs métiers à de nouveaux entrants. Le système des licences professionnelles et du *numerus clausus*, limitant les droits d'accès, serait alors justifié. La mise en concurrence soudaine de certaines professions dont les membres ont acquitté des droits d'entrée élevés (licences), par des nouveaux venus qui bénéficieraient d'une liberté et d'une gratuité d'installation ne paraît pas très loyale. Des débats analogues avaient lieu déjà en 1791 lors de l'adoption de la loi Le Chapelier et du décret d'Allarde, qui avaient interdit les associations et les corporations de métier.

2. Des exceptions à la concurrence peuvent paraître par ailleurs bénéfiques. Comme on vient de le voir, si la concurrence est toujours bonne pour les consommateurs, ce n'est pas forcément le cas en revanche pour les producteurs. Avec

des conséquences négatives possibles pour l'économie. Sous la pression concurrentielle, les entreprises doivent en effet comprimer leurs marges, parfois à la limite de la rentabilité. voire de procéder à des licenciements, ou à des délocalisations pour réduire les coûts. Leur capacité d'investissement et d'innovation s'en trouve en tout cas amoindrie. Le PDG d'Orange, Stéphane Richard, déplore régulièrement la concurrence très tendue qui règne sur le marché des télécommunications depuis l'arrivée de Free. Le laminage des profits résultant de la guerre des prix ne met pas les opérateurs en position de financer les investissements considérables nécessaires au développement des nouveaux réseaux, dans la fibre optique ou la 4G et 5G. Le problème n'est pas nouveau. En 1928, les grandes compagnies pétrolières (les « sept sœurs »), en signant les Accords d'Achnacarry, s'engageaient à stabiliser leurs parts de marché respectives, et renonçaient à se livrer une concurrence fratricide par les prix, en sorte de maintenir ceux-ci à un niveau suffisamment rémunérateur pour réaliser les énormes investissements nécessaires au développement du secteur. De même, la cartellisation de l'industrie allemande dans le dernier tiers du XIX<sup>e</sup> siècle, combinée à des mesures protectionnistes, avait permis de contenir la guerre des prix face à la « grande dépression », et de préserver une rentabilité garante d'un haut niveau d'investissement et de modernisation. La cartellisation des firmes industrielles sera de même encouragée aux États-Unis par le gouvernement du *New Deal* dans le cadre du NIRA en 1933, en vue de stopper la concurrence meurtrière génératrice de déflation, de faillites et de chômage.

Ces exemples montrent que si la concurrence procure des avantages, notamment à court terme pour le consommateur, son application peut aussi desservir parfois la croissance à long terme en affaiblissant la capacité des producteurs à investir. Sa mise en veilleuse temporaire peut aussi constituer une solution pouvant aider à sortir d'une crise déflationniste. Selon Schumpeter : « *Les restrictions commerciales du type cartel ainsi que celles consistant dans de simples ententes tacites relatives à la concurrence par les prix peuvent, en cas de dépression, constituer des remèdes efficaces.* » (*Capitalisme, socialisme et démocratie*, 1942)

La concurrence imparfaite paraît supérieure de même dans d'autres situations. Les grandes firmes en concurrence sur des marchés oligopolistiques sont certainement plus efficaces qu'une multitude de petites atomisées sur un marché concurrentiel. Une position monopolistique résulte souvent par ailleurs d'une innovation réussie, comme Schumpeter l'a montré. « *Nous sommes obligés de reconnaître que l'entreprise géante est finalement devenue le moteur le plus puissant du progrès* », écrit-il dans « *Capitalisme, socialisme et démocratie* » (1942). Il serait absurde dans ce cas de combattre les monopoles, qui portent le progrès. Sachant que le jeu de l'innovation reste ouvert, et que de nouveaux acteurs peuvent à tout moment venir menacer les positions temporaires d'un monopole. Selon W. Baumol (1982) de même, le monopole n'est pas un problème si le marché reste contestable, sans coûts d'entrée et de sortie rédhitoires. La simple possibilité d'entrer sur un marché pour un nouvel acteur suffirait à inciter la ou les firmes dominantes à adopter un comportement de type concurrentiel. La condition de « fluidité » du marché serait finalement plus importante que la condition « d'atomicité ».

A. Marshall a démontré par ailleurs l'intérêt des « monopoles naturels ». Une seule firme dans une branche doit être plus efficace que plusieurs en concurrence, car elle bénéficie d'économies d'échelle beaucoup plus importantes. Ce doit être le cas notamment dans les secteurs très capitalistiques : industries de réseaux, industries lourdes. Le monopole naturel doit être contrôlé toutefois par les pouvoirs

publics afin de bien répercuter la baisse de ses coûts marginaux ou de ses coûts moyens dans les prix. R. Coase allait plus loin en estimant que les grandes firmes se constituent pour échapper au marché. Elles internalisent facteurs et activités pour se soustraire aux coûts de transaction et à l'incertitude liée aux relations avec le marché. Le grand capitalisme dominé par de très grandes firmes, qui se substituent au marché dans l'ensemble de leurs transactions, serait beaucoup plus efficace que la concurrence. D'un point de vue historique, l'école de la régulation explique que la croissance exceptionnelle des Trente Glorieuses a été associée à un mode régulation monopoliste, dans lequel les très grandes entreprises ont planifié leurs productions en grandes séries de modèles standardisés, en imposant leur offre aux consommateurs. La croissance a été plus forte sous ce modèle que dans l'ancien mode de régulation « concurrentiel ».

Enfin, il n'est pas certain non plus que le marché du travail doive être soumis lui-même uniquement aux lois de la concurrence. Certes, des rigidités se sont installées depuis 1945, et un marché du travail dualiste s'est formé. Piore et Doeringer avaient expliqué déjà dans les années 1970 toutefois que ce dualisme est fonctionnel. Les entreprises auraient besoin à la fois d'une main-d'œuvre stable et bien formée, et d'un volant flexible de main-d'œuvre variant selon la conjoncture. La nouvelle économie keynésienne (NEK) a mis en lumière de même la rationalité des décisions des employeurs, qui signent des contrats stables avec leurs « insiders » détenteurs d'un fort capital humain, et versent des « salaires d'efficience » supérieurs au salaire d'équilibre. Flexibiliser l'emploi au point de transformer l'ensemble des actifs en « intermittents du travail » n'est pas forcément garant de productivité. Le modèle walrassien de la concurrence pure et parfaite n'est sans doute pas idéalement adapté aux spécificités du marché du travail.

## **B. « Défaillances du marché », de la régulation concurrentielle, et rôles de l'Etat**

1. La concurrence ne peut jouer véritablement et n'a de sens que si tous les agents disposent de toutes les informations pour comparer et faire les meilleurs choix. Or, l'information est toujours parcellaire, et il existe une asymétrie d'information structurelle entre les acheteurs et les vendeurs. Ces derniers sont les seuls à connaître la qualité réelle des produits qu'ils proposent. Si la rationalité des acheteurs les conduit à choisir les biens dont les prix sont les plus bas, les vendeurs d'articles de meilleure qualité sont incités à quitter le marché. Ne restent proposés alors que les biens de mauvaise qualité (exemple du *Lemons market* décrit par G. Akerlof). La concurrence par les prix est tronquée ici, lorsque l'information des acheteurs est imparfaite ou déformée. La Nouvelle Economie Keynésienne (NEK) met en évidence de nombreuses situations de défaillance du marché, résultant de l'asymétrie d'information des participants à un échange. Des processus de sélection adverse s'opèrent. Les institutions bancaires en durcissant les conditions de crédit afin de sélectionner la clientèle la plus solvable, tendent à décourager celle-ci, et à ne retenir en définitive que les emprunteurs les plus risqués. Les compagnies d'assurance inversement ne couvrent que les clients sans risque, et l'assurance incite à la prise de risque. Les employeurs face à la concurrence des candidats à l'embauche recrutent ceux qui demandent les salaires les plus élevés, ce qui crée du chômage sur le marché du travail. Les acheteurs peuvent être conduits de même à choisir les produits les plus chers en estimant que les prix expriment la qualité. Les comportements de consommation peuvent également être conditionnés ou manipulés, au-delà, par la propagande publicitaire des offreurs, qui altère la qualité des situations

concurrentielles, censée reposer du côté des consommateurs sur une information juste, inspirant des choix libres, rationnels et optimaux.

La théorie keynésienne considère de façon générale que les prix sont rigides à court terme, provoquant des déséquilibres permanents sur les marchés. Les mécanismes concurrentiels n'opèrent pas à court terme. Beaucoup de marchés sont des marchés dits « de clientèle », par opposition aux « marchés d'enchères » de type walrassien. Dans beaucoup de secteurs, les consommateurs se montrent fidèles en effet à leurs fournisseurs. Ils sont prêts à payer plus cher leurs produits auprès de ceux-ci, et sont insensibles aux offres des concurrents. La concurrence par les prix ne joue pas par conséquent dans ce type de situation.

Ensuite, le marché ne produit pas tout. Il ne produit pas selon A. Marshall les « biens collectifs », non rivaux et non exclusifs, pour lesquels les agents ne révèlent pas leurs préférences. Il privilégie par ailleurs la rentabilité à court terme et néglige les investissements de base, coûteux et dont la rentabilité est lointaine et aléatoire. L'investissement privé discrimine par ailleurs certaines régions. Quel opérateur téléphonique, quelle entreprise de transport ou de distribution du courrier irait investir dans des zones reculées où la densité de clientèle ne permettra jamais de rentabiliser les activités ? De même, la concurrence par les prix est-elle spontanément garante de la qualité, si des « autorités de régulation » n'interviennent pas pour imposer certaines normes, de sécurité, sanitaires et environnementales, voire sociales et éthiques ? Intègre-t-elle correctement le phénomène des externalités décrit par A-C. Pigou ? Peut-on ouvrir à la concurrence des secteurs sensibles comme le nucléaire ou les industries de défense ? N'est-il pas du rôle de l'Etat d'instituer un « droit de la concurrence » qui protège mieux les consommateurs face aux asymétries d'information, et leur donne des droits de recours (clause de rétractation, *class action*, condamnation de la publicité mensongère, etc.) ? Ces exemples « d'échec du marché » montrent que la concurrence entre agents privés ne résout pas tous les problèmes. La concurrence doit être régulée, encadrée, en partie organisée.

2. Au niveau macroéconomique, l'agrégation des comportements des agents en concurrence ne produit pas nécessairement l'équilibre général stable et optimal de la théorie. Le marché est un système de coordination des décisions microéconomiques assez sommaire. L'information qui doit guider les décisions circule mal, est souvent méconnue, connue à l'avance par les uns et avec retard pour les autres, de façon partielle, souvent tronquée en fonction des intérêts, et peut être interprétée diversement. Les agents ne savent pas au moment où ils décident ce que décident les autres. Les anticipations relatives aux décisions des autres ne sont que des supputations, souvent vagues et erronées, bien éloignées des raisonnements sophistiqués de la théorie des jeux. Même s'ils étaient parfaitement informés, ce qui n'est jamais le cas, les comportements des agents resteraient autant empreints de rationalité limitée, de rationalité procédurale, que d'irrationalité psycho-affective. Et l'agrégation finale de ces décisions décentralisées, de qualités diverses, est remplie « d'effets de composition ». Le résultat en est toujours aléatoire. Toute l'histoire de l'économie ne montre que des tendances excessives au surinvestissement ou au sous-investissement, à la surproduction ou à la sous-production, à des euphories ou des krachs boursiers. Ces événements et dysfonctionnements ont été le fruit de décisions jugées « rationnelles » pour certaines par les agents au moment où ils les ont prises, ou bien obéissant à d'autres logiques pour d'autres. Un mode de régulation uniquement fondé sur le principe de la concurrence entre

agents privés supposés égaux et rationnels comporte en lui-même par conséquent une tendance inhérente au déséquilibre.

L'observation de l'histoire montre également, d'un autre côté, que la concurrence contient en elle-même des tendances à la déflation, en abaissant les prix et les revenus, sur le modèle du XIX<sup>e</sup> siècle. Avec là aussi des effets négatifs sans doute sur la croissance.

Pour corriger ces « défaillances du marché », l'Etat moderne a pris en charge trois nouvelles fonctions depuis 1945 selon R. Musgrave : allocation des ressources, régulation de la conjoncture, et redistribution. Durant la période des Trente Glorieuses, l'Etat est intervenu activement aux côtés du marché dans l'allocation des ressources, pour développer plus rapidement et plus puissamment les secteurs jugés prioritaires. Nationalisations, planification, grands projets, incitations financières et fiscales, marchés réservés... La mise en œuvre d'une politique « colbertiste » a joué un rôle clé dans la modernisation de l'économie française. De grands programmes ont de même été mis en œuvre avec succès au niveau européen (Airbus, Ariane), s'appuyant sur une coopération synergique qui a permis de bénéficier du fameux « multiplicateur d'efficacité communautaire » dont a parlé M. Albert.

Cet interventionnisme public a été abandonné pourtant depuis le milieu des années 1980, et remplacé par les « politiques de la concurrence ». La construction européenne a pris la voie de « l'intégration négative », selon l'expression de l'économiste Jan Tinbergen, se focalisant seulement sur la suppression des entraves aux échanges, au détriment de « l'intégration positive », fondée sur des politiques communes. « *Politique industrielle. Quand on prononce ces mots à Bruxelles, tous se retournent en riant, et en disant : « Tiens ? Un Français. » Pourtant, le MITI en fait, et cela ne fait rire personne* », déclarait l'ancien ministre de l'industrie D. Strauss-Khan en 1992. La « *quasiconstitutionnalisation de la politique de la concurrence* » en Europe, selon l'expression d'Elie Cohen, contraste en effet avec les évolutions constatées ailleurs. Aux Etats-Unis, en Asie, dans les pays émergents, l'allocation des ressources est loin d'être exclusivement confiée aux seules forces du marché. La politique européenne doit-elle se borner à promouvoir la concurrence au sein de l'union, quand elle est faussée dans les autres zones avec lesquelles elle est en concurrence ? Est-il pertinent que l'Europe représente aujourd'hui la seule zone dans le monde à s'interdire, au nom de la concurrence interne, des politiques industrielles qui font le succès des économies rivales ? Cela d'autant plus que, comme l'expliquent les partisans de la « politique commerciale stratégique » (Brander et Spencer, etc.), intervenir sur la concurrence à court terme par des aides publiques, peut permettre de mieux la promouvoir à moyen terme, comme dans l'exemple de la compétition Boeing-Airbus. La politique de la concurrence a conduit à bloquer à diverses reprises la formation de géants industriels mondiaux d'origine européenne, alors que parmi les 2 000 plus grosses entreprises mondiales, 486 sont européennes, 645 sont nord-américaines, et 691 asiatiques.

### **III. La concurrence internationale comme vecteur de la richesse des nations. Des jeux à somme positive et parfois négative**

#### **A. Les gains généraux de l'ouverture, et la compétitivité pour la croissance**

1. Comme les théories classique et néo-classique l'ont montré, les nations gagnent en s'ouvrant à l'échange si elles se spécialisent autour de leurs avantages com-

paratifs ou exploitent au mieux leur dotation factorielle. En cas d'évolution des dotations factorielles, le théorème de Rybczynski (1955) explique que la spécialisation d'un pays se déforme en direction du bien utilisant de manière intensive le facteur qui augmente. La « nouvelle théorie du commerce international » (Krugman et Obstfeld, 2009) démontre plutôt que l'avantage comparatif se construit à travers la spécialisation et l'ouverture, qui procurent des rendements d'échelle croissants. Dans tous les cas, il doit en résulter, potentiellement, des gains d'efficacité essentiels pour la croissance. Un marché global comporte plus de firmes que des marchés en autarcie, chacune produisant davantage et vendant à un prix plus bas. Après spécialisation complète, toutefois, il n'y a plus concurrence, mais complémentarité entre les nations. Selon les théories du commerce international, ce serait donc la complémentarité au sein d'une DIT, et non la concurrence, qui serait source de richesse pour les nations. Si la spécialisation est incomplète, la logique de la concurrence continue toutefois d'exercer ses effets stimulants sur la productivité et l'innovation. A l'opposé, les coûts du protectionnisme sont nombreux. Prix plus élevés et coûts pour les consommateurs et les producteurs, moindre diversité de l'offre, coûts pour les contribuables, coût des emplois protégés, coût de l'inefficacité allocative, moindres rendements d'échelle, perte de dynamisme, coût de l'isolement économique, technologique, financier, culturel, politique, coût des représailles.

Confrontées à la concurrence extérieure, les firmes sont contraintes d'adopter des organisations et des stratégies toujours plus efficaces. Améliorer la compétitivité-coût et prix, aux différents niveaux qui composent « la chaîne de valeur ». Opter pour des spécialisations fines, des variétés de produits, et des positionnements sur des niveaux de gamme, des niches ou des créneaux. Pour beaucoup de spécialistes d'économie industrielle (notamment K. Lancaster, *Commerce intra-industrie et concurrence monopolistique parfaite*, 1980), les enjeux de la concurrence internationale dans le monde d'aujourd'hui prennent une forme davantage monopolistique qu'oligopolistique. Les stratégies de différenciation des produits, verticale, horizontale, objective et subjective sont au cœur des échanges intra-branches, qui dominent le commerce mondial. La diversification des portefeuilles de biens vise à réaliser des « économies de gamme », consistant à occuper tous les segments d'un marché, et bénéficier des effets de report d'un produit sur un autre relevant d'une gamme différente. « Economies de gamme », « de champ », ou « d'envergure », peuvent se combiner avec les économies d'échelle à travers la réalisation de « produits modulaires », élaborés à partir d'éléments utilisés communément à divers niveaux de la gamme. L'innovation constitue par ailleurs un axe permanent de compétitivité. Ces « stratégies-produit » doivent être relayées par des stratégies commerciales de pénétration des marchés, et la « compétitivité-réseau » est devenue à cet égard également une clé de la croissance.

2. En économie ouverte et concurrencée, le rôle des Etats change. Ils doivent adopter des « politiques d'offre », qui accompagnent les efforts de compétitivité des entreprises, et créer un cadre propice à l'investissement international. Comme l'expliquait Anton Brender dans « *Le choc des nations* » (1988) : « *Il n'y a pas que les firmes qui sont en concurrence, il y a aussi les nations, qui jouent de tous les leviers auxquels elles ont accès pour accroître la compétitivité de leur territoire* ». La stratégie compétitive doit s'appuyer sur une « *double handed approach* », déployée au niveau microéconomique par les firmes, et au niveau macroéconomique par les Etats. Les avantages compétitifs des firmes s'enracinent et s'articulent autour des avantages comparatifs des nations. Le premier axe d'action de l'Etat

doit viser à créer un cadre macroéconomique stabilisé, et renforcer l'attractivité du territoire : faible inflation, monnaie stable, pression socio-fiscale attractive, finances publiques saines, stabilité sociale et politique, et pourquoi pas incitations à l'investissement (ZFI, ZFE). Le second axe d'action doit consister à mettre en place les infrastructures et biens publics nécessaires au développement du système productif. A un troisième niveau, plus colbertiste, le rôle d'un « Etat-stratège » peut l'amener à conduire certaines « politiques commerciales stratégiques », face à un environnement de concurrence imparfaite, et participer à la construction de nouveaux avantages comparatifs.

Les mauvais résultats de la France en matière de commerce extérieur témoignent de sa difficulté à affronter la concurrence internationale. Notre pays souffre d'un déficit de compétitivité qui affecte son taux de croissance. Le Rapport Gallois en 2012 a préconisé 22 propositions afin de déclencher « un choc de compétitivité ». La tâche prioritaire est d'améliorer les marges des entreprises et leur capacité à investir. L'industrie souffre d'un sous-investissement chronique. Les investissements en RD ne représentent que 2 % du PIB, contre 2,7 % en Allemagne, près de 3 % aux Etats-Unis et au Japon, et plus dans certains autres pays. 8 000 brevets ont été déposés en France en 2010, contre 25 000 en Allemagne. L'économie française est enfermée selon le Rapport Gallois dans le cercle vicieux : spécialisation bas de gamme, concurrence par les prix, faibles marges, faibles investissements, spécialisation bas de gamme, etc. Elle est prise en étau entre le haut de gamme allemand et le low coast des NPI. « Il faut (donc) engager un processus, où l'investissement réduit progressivement notre exposition à la concurrence par les prix ». L'enjeu est la montée en gamme de l'industrie, à l'instar de l'Allemagne. Des coûts salariaux élevés et une monnaie forte n'ont jamais porté atteinte à la compétitivité de ce pays, price-maker et pratiquant des prix élevés en rapport avec la valeur ajoutée des produits vendus. En dépit des hauts niveaux des salaires, des prix et de la monnaie, l'Allemagne, les pays nordiques, ou le Japon, figurent depuis longtemps parmi les premiers exportateurs mondiaux, dégagant de confortables excédents courants. Une bonne spécialisation, garante de la croissance face à la concurrence, doit s'adapter en permanence aux évolutions de l'offre et de la demande mondiales. Elle doit impliquer un repositionnement permanent sur les produits faisant l'objet de la demande mondiale actuelle et future la plus progressive.

## **B. Les dangers toutefois de la concurrence « à tout prix », et les impasses de la logique mercantiliste**

1. Force est de constater que plus les PDEM se sont ouverts à la concurrence internationale depuis quarante ans, et plus leur taux de croissance a fléchi. Les images du commerce international sont souvent négatives. Concurrence déloyale, sauvage, faussée, entre inégaux, dumpings divers, délocalisations et hémorragie des emplois, entraînant des réactions nationales défensives : multiplication des réflexes protectionnistes et des obstacles non tarifaires, impasse des négociations multilatérales. Les adaptations et restructurations nécessaires face aux processus de « destruction créatrice » de la concurrence internationale paraissent difficiles, et certains préconisent des mesures de « démondialisation ».

La crise contemporaine a exacerbé les difficultés, et certains pays ont cherché dans l'amélioration de leur compétitivité-prix et change un remède à celle-ci. Cette solution, si elle peut apporter des avantages à un pays isolé, ne peut constituer

une solution efficace au niveau collectif. L'amélioration de la compétitivité d'un pays s'opère forcément au détriment de celle des autres, et ne peut constituer le socle d'une croissance durable. L'essor des exportations du pays compétitif finira par buter nécessairement sur le manque de solvabilité des autres. On retombe ici sur « l'aporie mercantiliste » que critiquait Adam Smith. Aucun pays ouvert, le plus compétitif soit-il, ne peut espérer s'en sortir seul et durablement dans une économie internationale globalement déprimée. Pire, l'option de la « compétitivité à tout prix » ouvre la voie à la surenchère. Telle nation qui aura acquis un avantage compétitif en baissant ses salaires ou sa monnaie, sera vite rattrapée par une autre qui l'imitera dans cette voie, et dépassée par une troisième qui ira plus loin dans la logique régressive. Le résultat final sera que « l'austérité compétitive » aura dégradé la situation de tous. La course au moins-disant social, fiscal, environnemental, au nom de la compétitivité, entraîne une régression commune. Le dumping monétaire contraint à la déflation salariale, et à la généralisation des « *beggar my neighbour policies* » typiques des années 1930. La grande crise a montré qu'une guerre commerciale et monétaire peut se muer assez vite en un jeu à somme négative, « perdant-perdant » pour l'ensemble des acteurs.

2. Une autre grande leçon de l'histoire, issue de l'expérience plus positive des Trente Glorieuses, montre que c'est la hausse générale de la productivité, des salaires, et de la demande, plutôt qu'une concurrence débridée, qui a permis à l'ensemble des nations de devenir prospères, s'assurant les unes aux autres des débouchés mutuels. Une sortie de la crise impliquerait sans doute une relance générale de la demande intérieure dans les grandes économies interdépendantes, pour accroître les débouchés de tous. Si l'on voulait formuler une version hétérodoxe de la « loi des débouchés », on pourrait soutenir que « toute demande crée son offre », la logique de la compétitivité étant quant à elle une pure logique de l'offre s'exerçant au détriment de la demande. Il appartient aux économies les plus compétitives, qui dégagent les plus forts excédents extérieurs, d'en prendre l'initiative, en augmentant les salaires ou les dépenses publiques. Autrement dit, ce n'est pas à la France de baisser ses salaires, pour soit-disant sortir de la crise par une amélioration de sa compétitivité-coût, mais c'est à l'Allemagne, qui s'est engagée dans cette mauvaise voie depuis sa réunification, de monter les siens. Une initiative de relance doit être coordonnée cependant avec les différents partenaires, afin que ses effets se répartissent de façon relativement équitable entre les nations.

Fondamentalement, un commerce équitable exige une certaine harmonisation des conditions sociales, fiscales, et monétaires. Une harmonisation par le haut, et non par la course au moins-disant social au nom de la compétitivité. Comme l'exprimait fort bien F. List au XIX<sup>e</sup> siècle, « *la liberté présuppose l'égalité* ». Autrement dit, la liberté des échanges présuppose l'égalité des conditions de la concurrence. Une certaine régulation des taux de change paraît d'un autre côté nécessaire pour juguler les stratégies d'exportation de la crise *via* la sous-évaluation de la monnaie. Ces axes de convergence, s'ils paraissent difficiles à atteindre à un niveau mondial, pourraient constituer en revanche le sens et l'objectif d'un programme d'intégration régionale. Il n'est sans doute pas normal à cet égard que l'Europe s'autodétruisse dans des pratiques de dumping social et fiscal face auxquelles la seule réponse soit une amélioration de la compétitivité qui aggrave ces pratiques. De même, face à une concurrence mondiale inégale, un néo-protectionnisme régional modéré devrait sans doute être organisé en sorte de garantir sur le plan social, fiscal et environnemental, un « accès qualifié au marché ».

## Conclusion

« La concurrence n'est ni une valeur, ni une finalité », déclarait Emmanuel Macron lors de la présentation de sa loi. Elle est donc un moyen, source d'efficacité. Elle implique une pluralité d'acteurs, en compétition pour un même but, mettant en œuvre des ressources pour obtenir le meilleur résultat. Les sociétés qui l'ont abolie au <sup>xx</sup>e siècle se sont sclérosées. Elle constitue certainement un facteur essentiel de croissance, associé aux droits de propriété, à la liberté et à l'esprit d'entreprendre.

Existe-t-elle vraiment, compte tenu des phénomènes de concentration et d'imperfection de l'information qui ont été décrits ? Le marché comme système d'information idéal auquel avait rêvé Hayek relève sans doute d'une vision plus normative que réelle. L'économiste B. Marris concluait là-dessus : la concurrence est un mythe, elle n'existe pas. C'est tout l'enjeu alors des mouvements consuméristes et des politiques de la concurrence que de la réactiver. Les NTIC concourent aujourd'hui à instaurer des économies beaucoup plus concurrentielles.

Si elle existe, est-elle toujours optimale ? Différents cas examinés nous ont montrés son intérêt et ses limites. Citons pour conclure J. Stuart Mill : « *Il est évident par exemple que l'on pourrait économiser beaucoup de travail si Londres était approvisionnée par une seule compagnie d'eau ou de gaz, plutôt que par la pluralité existante* » (*Principes d'économie politique*, 1848). Cette réflexion peut-elle avoir un intérêt pour l'Europe ?

# ÉCONOMIE, SOCIOLOGIE ET HISTOIRE DU MONDE CONTEMPORAIN

**DURÉE : 4 HEURES.**

*Tout verbiage doit être évité et il est expressément recommandé de ne pas dépasser huit pages, sauf justification par la qualité du résultat.*

*Il sera tenu compte des qualités de plan et d'exposition, ainsi que de la correction de la langue.*

*Il n'est fait usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*

## SUJET

### INSTITUTIONS ET DÉVELOPPEMENT DEPUIS LE DÉBUT DU XIX<sup>E</sup> SIÈCLE.

## CORRIGÉ

*Par Frédéric Besset, professeur à Intégrale à Paris.*

#### ACCROCHE

Dans une illustration aussi flagrante que fameuse du lien entre institutions et développement, Acemoglu, Johnson et Robinson comparent le revenu par tête en Corée du Sud (16 000 dollars en l'an 2000) et en Corée du Nord (1 000 dollars) : l'énorme écart que l'on retrouve aussi dans les espérances de vie respectives (de 10 ans supérieures en Corée du Sud) ne s'expliquerait entre deux populations de culture identique habitant la même péninsule que par l'adoption d'institutions opposées.

#### DÉFINITIONS TERMES 1 ET 2

Selon la définition classique de Douglass North les institutions sont les « *contraintes établies par les hommes qui structurent les interactions humaines* ». Elles peuvent être informelles – les usages et conventions sociales – ou formelles – les règles juridiques et les normes éthiques ou techniques émanant d'administrations publiques (Etats, organisations internationales) et privées (entreprises, associations, groupes de pression, voire églises...). A noter qu'au sens strict les institutions sont les règles et non les instances qui les produisent, à rebours de l'usage courant qui évoque les autorités elles-mêmes (nationales, onusiennes, etc.) sous le terme générique « d'institutions ». Une définition académique des institutions ne les assimilent pas à des organisations mais à des « *comportements réguliers et codifiés des gens dans une société, ainsi que les idées et les valeurs associées à ces régularités* » (Walter Neale). Le développement est l'ensemble des transformations de long terme, démographiques et sociales qui permettent l'élévation du niveau de vie. Il est le déploiement dans le champ social des effets de la croissance économique. Plus ambitieusement, encore d'après Amarty Sen il est « *le processus même par lequel progressent les libertés réelles des personnes* »...

## REFORMULATION ET DÉPLOIEMENT DU SUJET

Depuis l'essor de la révolution industrielle et singulièrement de sa deuxième phase à partir de 1870, le monde a connu un processus de développement inédit. Parti d'Occident il s'est étendu à de larges territoires situés au sud de la ligne Brandt dès la fin du  $xx^e$  siècle, rendant celle-ci largement caduque en 2015. Parallèlement, les institutions nationales se sont renforcées et diversifiées continûment à travers la constitution du droit social par exemple tandis que naissait après la Première Guerre mondiale et surtout après la Seconde une nouvelle strate de traités et de normes, internationaux ceux-ci et diversement contraignant (Déclaration universelle des droits de l'homme, traités de Rome, protocole de Kyoto...).

## PROBLÉMATIQUE

Dans quelle mesure peut-on corréliser processus institutionnel et développement voire faire du développement une résultante des règles collectives et de leur degré d'acceptation sociale en lieu et place des hypothèses traditionnelles, qui insistent sur la nature économique et non anthropologique du développement ?

On commencera par analyser les différentes explications classiques du mal-développement en montrant comment s'est imposée l'école institutionnaliste (I). Puis on analysera les institutions comme des réducteurs d'incertitudes dans la détermination de la propriété, dans les relations contractuelles, dans le financement de l'activité économique (II). On conclura enfin sur le rôle ultime des institutions pour contrebalancer la hausse des coûts de transaction qui est la contrepartie de la baisse des coûts de production que le développement précisément permet.

**I. Parties d'une analyse de la croissance économique – quitte à le confondre avec elle –, les théories du développement, se sont tournées successivement vers des étiologies historiques et géographiques avant de se recentrer sur les explications institutionnalistes.**

*AI S'il peut y avoir croissance sans développement (cas du modèle rentier), il n'y a pas de développement sans croissance. Pour en rendre compte, les théories de la croissance endogène (Romer, Barrow...) proposent une lecture plus sophistiquée que le traditionnel modèle exogène de Solow (1956) ; celui-ci externalise le progrès technique en insistant principalement sur la combinaison du capital et du travail selon une productivité plus ou moins avantageuse.*

Pour Paul Romer notamment la croissance est le résultat d'un processus d'accumulation de connaissances : l'innovation résulte à la fois des comportements (par exemple plus ou moins enclins à la prise de risques) et des compétences des agents économiques, comme les entreprises. Elle n'est pas comme dans le modèle exogène une manne tombée du ciel, extérieure à l'activité elle-même des agents économiques. De même, se diffuse-t-elle par l'intermédiaire des marchés à l'ensemble de la sphère sociale. Un autre théoricien, Robert Barro, insiste sur le rôle des infrastructures publiques et des organismes de recherche fondamentale dans l'engendrement de la croissance. Une illustration de cette interaction vertueuse est l'action de l'Etat fédéral américain qui en 1956 finance directement la création d'un programme d'autoroutes nationales (*Interstates Highways*) et qui crée en 1958 la DARPA, « l'agence pour les projets de recherche avancée de défense », notamment à l'origine d'Internet. Les théories exogènes convoquent indirectement le rôle des institutions en insistant sur le rôle catalyseur ou régulateur de l'entreprise ou de l'Etat dans l'accumulation de capital humain ou de connaissances.

**B/** *A l'opposé de la lecture strictement économique centrée sur la croissance, le développement a lui plutôt fait l'objet d'interprétation par les déterminants historiques ou géographiques.*

La contrainte historique est largement évoquée après 1945, soit par la théorie néo-classique de Rostow (1956), soit par les modèles dépendantistes (Samir Amin, Raoul Prebisch). Pour Rostow, le développement est un processus qui s'identifie à l'industrialisation et qui se diffuse progressivement depuis la matrice anglaise du XVIII<sup>e</sup> siècle, d'où des « décollages » largement étalés dans le temps historique. Pour les théoriciens tiers-mondistes au contraire, cette diffusion même serait improbable sinon irréaliste en raison de la logique d'exploitation du capitalisme : l'Europe a mis en coupe réglée le reste du monde et l'a empêché de prospérer non seulement depuis la Révolution industrielle mais même dès les Grandes découvertes. Plus récentes sont les explications de l'historien Kenneth Pomeranz (*Force de l'Empire : Révolution industrielle et écologie, ou pourquoi l'Angleterre a fait mieux que la Chine*, 2009) ou du biologiste Jared Diamond (*De l'inégalité parmi les sociétés*, 1997) insistant sur la donne géographique et bioclimatique des sociétés qui déterminerait leur trajectoire de développement. L'accès au littoral ou les ressources naturelles sont par exemple plus ou moins propices à l'activité économique. Mais aucun déterminisme n'existe, comme le prouve le développement remarquable (Suisse) ou relatif (Botswana) de pays enclavés, la prospérité des Danois ou des Israéliens sans ressources naturelles, les affres des Congolais ou des Vénézuéliens assis sur des trésors géologiques. Diamond se montre plus convaincant lorsqu'il se place dans une perspective de temps long remontant à la préhistoire : l'Eurasie devrait son essor précoce à sa disposition continentale Est/Ouest qui garantit des climats et des milieux homogènes sur des milliers de kilomètres ; ainsi circulent les biens et les innovations plus aisément qu'en Afrique ou que dans l'Amérique pré-colombienne à la disposition méridienne Nord-Sud source de compartimentages des milieux. Si l'inverse n'a guère de sens, la géographie influence la qualité des institutions comme le montre le cas des anciennes colonies d'Afrique où la tropicalité et ses cultures sont souvent associées à des institutions de type extractrices qui pendant la colonisation comme aux lendemains de celle-ci « extraient » les rentes économiques de la population sans profit pour elle.

**C/** *En matière d'économie du développement l'attention s'est récemment reportée sur le rôle des institutions avec notamment des auteurs comme Douglass North, Dani Rodrik ou William Easterly. Les règles que se donnent les sociétés et la façon dont elles les suivent détermineraient leur potentiel de développement.*

Le courant institutionnaliste est apparu à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle aux Etats-Unis avec Thorstein Veblen qui souligne le rôle à côté de l'entrepreneur capitaliste celui de « l'entrepreneur institutionnel » qui bâtit un nouveau système de croyance et de conduite plus ou moins favorable à l'épargne, au travail, au risque, etc. Mais c'est à la fin du XX<sup>e</sup> siècle que ces explications trouvent un soubassement théorique solide avec le néo-institutionnalisme de la *New Economic History* derrière Douglass North (prix Nobel d'économie 1993). S'en inspire l'ouvrage récent (2012) *Why nations fail?* – sous-titré *Les origines de la puissance, de la prospérité et de la pauvreté* – de Daron Acemoglu et James A. Robinson. Les auteurs posent comme insuffisantes les hypothèses géographiques, y compris au sens large de la géographie humaine. Ainsi la ville de Nogalès (Arizona) incomparativement plus développée que sa jumelle mexicaine – également nommée Nogalès – de l'autre côté de la frontière (Etat du Sonora) partage avec sa jumelle le même milieu naturel. A une autre échelle, la différence de prospérité et de satisfaction sociale était également flagrante entre les deux Allemagne avant 1989... Si l'on comprend intuitivement que le collecti-

visme et la dictature du parti unique en DDR aient été moins porteurs de développement que l'économie sociale de marché et la démocratie parlementaire de la BDR, le cas du Mexique et du sud des États-Unis au XIX<sup>e</sup> siècle paraît moins clair. Là aussi pourtant, quoique d'une autre manière puisque les deux territoires participent d'une économie de marché, la qualité des « infrastructures institutionnelles » est en cause : entre 1824 et 1867, il y eut 52 présidents au Mexique, soit plus d'un par an. L'instabilité politique rend les droits de propriété très incertains à la merci des incessants golpes : un entrepreneur qui craint que sa production soit expropriée ou presque entièrement taxée aura très peu d'incitations à prendre des risques, à investir et à innover. Qui plus est, les institutions au sens économique – notamment la législation foncière – étaient très « extractrices », privilégiant la minorité maîtresse de la rente du sol ou du sous-sol : la société était fondée sur l'exploitation des indigènes par les descendants des colons espagnols et des monopoles de commerce comme sous l'ancien régime européen. En raison de ces institutions médiocres et inéquitables, la révolution industrielle qui fut le moteur du progrès aux États-Unis n'allait pas traverser la frontière mexicaine. C'est ce qui explique en grande partie la différence entre Nogalès, Arizona et Nogalès, Sonora.

**II. Concrètement, de bonnes institutions sont des réducteurs d'incertitude. Elles créent de la confiance entre les agents économiques (ménages, entreprises) d'une part, entre la société civile et la puissance publique d'autre part : « la confiance, cette institution invisible qui régit le développement économique » (Kenneth Arrow) est aux fondements du capitalisme dans des champs très variés.**

*A/ Un système juridique fiable permet la sécurisation de la propriété.*

Hernando de Soto en 2000 dans *Le mystère du capital. Capitalisme et informalité* note que les pays en voie de développement (Haïti, Égypte, Philippines, Pérou...) ont de l'épargne et des entrepreneurs. Mais le capital reste « mort » car les droits de propriétés ne sont pas documentés : dès lors terres et immeubles n'ont pas de propriétaire défini, les entreprises sont condamnées au secteur informel... Le « capital mort » ne peut pas être cédé, légué ou hypothéqué pour nourrir l'investissement. Loin d'être marginale la précarité juridique est la règle dans certains pays : à Haïti, 97 % de la population des campagnes vivent sans titre de propriété ni bail de location. Seuls les riches ont l'argent nécessaire pour payer les avocats et les pots-de-vin qui permettent de se procurer des titres de propriété légaux, fût-ce au terme de délais dissuasifs (289 jours pour créer une petite entreprise au Pérou à la fin des années 1990). *A contrario*, les pays riches ont sécurisé la propriété dès le XIX<sup>e</sup> siècle : Napoléon en France a créé le cadastre moderne qui vers 1840 avait répertorié la totalité des propriétaires des millions de parcelles foncières convenablement bornées. Aux États-Unis les occupants sans titre (ou *squatters*) des terres de l'Ouest sont peu à peu absorbés par le système de la propriété formelle ; en 1872 la loi minière régularise la propriété des détenteurs de concessions.

*B/ Une régulation de la finance par une tutelle « hors marché » permet de limiter la spéculation et de contenir le risque de crise systémique.*

Des institutions bancaires publiques de type banques centrales permettent d'entretenir la confiance des marchés par l'existence d'un prêteur en dernier recours. Entre 1836 et 1913 aux États-Unis, la création monétaire par le crédit n'obéit à aucun autre contrôle que la concurrence entre les banques. Comme dans tout processus concurrentiel, la régulation se fait par la faillite des imprudents. Les crises financières se multiplient. Celle de 1907 est particulièrement violente et conduit

le gouvernement américain à créer en 1913 le *Federal Reserve System* (FRS), une banque centrale qui finance les établissements privés et détermine le coût d'accès au capital *via* les taux d'intérêt comme le font déjà en Europe d'autres banques centrales plus anciennes (Banque d'Angleterre 1694, Banque de France 1803). Mais au *xx*<sup>e</sup> siècle les institutions financières revêtiront aussi d'autres formes : agences publiques de surveillance des marchés financiers – SEC (Securities exchange commission) américaine créée sous l'administration Roosevelt, COB (Commission des opérations de bourse) puis AMF (Autorité des marchés financiers) française... – garantes de la probité des transactions et de leur conformité à la volonté du législateur ; standards internationaux imposant aux établissements bancaires des ratios prudentiels (accords de Bâle en 1988 jusqu'au récent Bâle III (2010) renforçant les réserves obligatoires des établissements de prêt après la crise de 2007) ; accords monétaires internationaux instaurant un étalon de change commun (Gênes 1922 ; Bretton Woods, 1944 mais aussi, dans un cadre européen, accords de Brême en 1978 à l'origine de l'ECU) ou le supprimant (Kingston, 1976). Les institutions de la finance rendent plus accessibles la ressource précieuse entre toutes, le capital, véritable combustible du développement, souvent rare et hors de prix dans les économies retardataires.

**C/ Le respect des contrats par l'instauration de tiers de confiance.**

Le respect des contrats garanti par un Etat de droit est le ciment de l'activité économique (contrat de travail ou de prêt, contrat de fourniture d'un bien ou d'un service...). Les contractants en cas de litige doivent pouvoir recourir à un juge pour dire le droit en vigueur, établir des responsabilités, réprimer la fraude et la déloyauté. En 1971, l'avocat Ralph Nader gagne un procès contre General Motors coupable d'avoir commercialisé en toute connaissance de cause un modèle dangereux, la Corvaire. Le mouvement des consommateurs qu'il a fondé convainc le Congrès de voter le National Highway Safety and Transportation Act de 1966. Un demi-siècle plus tard, en 2015, c'est un autre constructeur automobile, Volkswagen (VAG), qui est mis à l'amende par les autorités américaines pour avoir truqué ses tests antipollution... Se développent puissamment dans les codes juridiques des pays développés à partir du *xix*<sup>e</sup> siècle outre le droit des obligations (un contrat crée des obligations réciproques entre les signataires) le droit du travail. Un des objectifs du tiers de confiance publique peut être de réduire les inégalités entre contractants au-delà du seul formalisme du droit. Ainsi en France naissent sous le Front populaire les conventions collectives (loi du 24 juin 1936) qui font prévaloir les accords de branche sur les contrats de travail individuels. Il peut aussi s'agir de protéger les actifs d'une entreprise voire d'un ménage contre ses créanciers en hiérarchisant les créances de ceux-ci et en les limitant aux seuls actifs du débiteur : c'est ce que permet la procédure de faillite. A un autre niveau, l'Etat de droit suppose que la puissance publique et ses agents eux-mêmes – garants du contrat social – soient soumis à la règle de droit. C'est l'opposé de la pratique des régimes autoritaires où la règle est énoncée par l'exécutif en fonction de ses intérêts ou de sa ligne politique du moment : sitôt arrivé au pouvoir Lénine déclare ne pas être tenu par les obligations du régime tsariste et suspend le remboursement de la dette russe notamment détenue par nombre de petits porteurs français et belges. Dans la Chine d'aujourd'hui, un pays sans culture libérale – au sens du libéralisme politique, les contrats ne sont pas considérés comme des engagements absolus et la norme sociale admet que leur exécution varie en fonction de la qualité de la relation (ou *guanxi*) entre les signataires... De manière empiriquement très convaincante, plus les sociétés sont développées plus elles soumettent fonctionnaires et élus au juge, ce qui limite le despotisme et la corruption des agents publics.

A l'inverse l'arbitraire prévaut y compris *via* une institution judiciaire aux ordres dans les pays sous-développés où, au mieux, la démocratie est réduite au rituel du suffrage mais ne s'est pas approfondie *via* d'authentiques contre-pouvoirs. Un des facteurs mais aussi un des aspects du sous-développement est ainsi la patrimonialisation des biens et intérêts publics au profit des détenteurs, de droit ou de fait, de l'autorité publique.

Dans une société complexe, la plupart des actifs – de l'avocat au comptable, de l'élu politique au banquier, ne sont pas engagés dans des activités de production mais dans des activités visant à réduire les coûts de transaction. Les institutions ont pour rôle majeur de réduire ces coûts initialement identifiés par l'économiste Ronald Coase. Ils accompagnent les échanges – les transactions – sur les différents marchés. En détail ce sont les coûts de recherche de l'information nécessaire à l'échange, de négociation des conditions et termes de l'échange, d'application des contrats, etc. Ces coûts croissent avec la division accrue de la production et la multiplication des échanges sur les différents marchés de biens, du capital ou du travail. A l'inverse dans une société traditionnelle les liens personnels limitent les coûts de transaction car les agents économiques se connaissent et s'obligent spontanément à l'équité. En revanche, les coûts de production sont élevés car le travail est peu spécialisé et dispose de peu de capital technique. Le développement s'accompagne ainsi d'une baisse des coûts de production et d'une hausse des coûts de transaction : la productivité s'envole mais les relations économiques deviennent impersonnelles et s'émancipent du cadre contraignant de l'honneur et des solidarités de proximité. Le développement peut se paralyser si la baisse des coûts de production est annulée par la hausse des coûts de transaction. Les institutions – les règles du jeu économique et social – ont pour visée de contenir ou de mutualiser les coûts de transaction. Mais contrairement au changement technique qui se diffuse de plus en plus rapidement le changement institutionnel est frappé d'inertie. Le passé, les traditions, les habitudes, « l'esclavage des circonstances antérieures » (John Stuart Mill) limitent la propension des acteurs à se plier à de nouvelles régulations, y compris lorsque celles-ci accroissent leur gain potentiel. L'écrivain et essayiste péruvien Mario Vargas Llosa résume la place centrale des institutions dans le développement en définissant le libéralisme comme la capacité d'une société à faire accepter à ses membres des règles d'équité. « Sans un ordre légal strict qui garantisse la propriété privée, le respect des contrats et un pouvoir judiciaire honnête, capable et totalement indépendant du pouvoir politique, l'économie de marché est une pure farce, c'est-à-dire une rhétorique sous laquelle se poursuivent les exactions et la corruption d'une minorité privilégiée aux dépens de la majorité de la société. (...) Le libéralisme n'est pas la libération des prix et l'ouverture des frontières à la concurrence internationale, mais la réforme intégrale d'un pays, sa privatisation et décentralisation à tous les niveaux et le transfert à la société civile – à l'initiative des individus souverains – de toutes les décisions économiques. Et l'existence d'un consensus quant aux règles de jeu qui privilégient toujours le consommateur sur le producteur, le producteur sur le bureaucrate, l'individu face à l'État et l'homme vivant et concret d'ici et de maintenant plutôt que cette abstraction : l'humanité future.

# MATHÉMATIQUES

**DURÉE : 4 HEURES.**

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

*Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

*Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.*

EM  
LYON

## SUJET

### EXERCICE 1

Dans tout l'exercice,  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  désigne un espace probabilisé et toutes les variables aléatoires considérées seront supposées définies sur cet espace.

#### Partie I : Loi exponentielle

Dans toute cette partie,  $\lambda$  désigne un réel strictement positif.

- Donner une densité, la fonction de répartition, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ .
- Justifier que les intégrales suivantes convergent et donner leurs valeurs :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx, \quad \int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x} dx.$$

- Soit  $U$  une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur  $[0; 1]$ . Quelle est la loi de la variable aléatoire  $V = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - U)$  ?
  - Écrire une fonction en Scilab qui, étant donné un réel  $\lambda$  strictement positif, simule la loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ .

On considère une suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi exponentielle de paramètre 1.

Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , on définit la variable aléatoire  $T_n = \max(X_1, \dots, X_n)$  qui, à tout  $\omega$  de  $\Omega$ , associe le plus grand des réels  $X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)$  et on note  $f_n$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \begin{cases} n e^{-x}(1 - e^{-x})^{n-1} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

**Partie II : Loi de la variable aléatoire  $T_n$**

4. a. Calculer, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$  et pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}^+$ , la probabilité  $\mathbf{P}(T_n \leq x)$ .  
 b. En déduire que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ ,  $T_n$  est une variable aléatoire à densité, admettant pour densité la fonction  $f_n$ .
5. a. Montrer que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , la variable aléatoire  $T_n$  admet une espérance.  
 b. Déterminer l'espérance  $\mathbf{E}(T_1)$  de  $T_1$  et l'espérance  $\mathbf{E}(T_2)$  de  $T_2$ .

6. a. Vérifier :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}^+, f_{n+1}(x) - f_n(x) = -\frac{1}{n+1} f'_{n+1}(x)$ .  
 b. Montrer ensuite, à l'aide d'une intégration par parties :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^{+\infty} x(f_{n+1}(x) - f_n(x)) dx = \frac{1}{n+1} \int_0^{+\infty} f_{n+1}(x) dx.$$

- c. En déduire, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , une relation entre  $\mathbf{E}(T_{n+1})$  et  $\mathbf{E}(T_n)$ , puis une expression de  $\mathbf{E}(T_n)$  sous forme d'une somme.

**Partie III : Loi du premier dépassement**

Dans toute cette partie,  $a$  désigne un réel strictement positif.

On définit la variable aléatoire  $N$  égale au plus petit entier  $n$  de  $\mathbb{N}^*$  tel que  $X_n > a$  si un tel entier existe, et égale à 0 sinon.

7. Justifier l'égalité d'événements :  $(N = 0) = \bigcap_{k=1}^{+\infty} (X_k \leq a)$ . En déduire la probabilité  $\mathbf{P}(N = 0)$ .
8. Montrer :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbf{P}(N = n) = (1 - e^{-a})^{n-1} e^{-a}$ .
9. Déterminer l'espérance  $\mathbf{E}(N)$  et la variance  $\mathbf{V}(N)$  de  $N$ .

On s'intéresse maintenant à la variable aléatoire  $Z$ , définie pour tout  $\omega$  de  $\Omega$  par :

$$Z(\omega) = \begin{cases} X_{N(\omega)}(\omega) & \text{si } N(\omega) \neq 0 \\ 0 & \text{si } N(\omega) = 0 \end{cases}$$

10. Justifier :  $\mathbf{P}(Z \leq a) = 0$ .
11. Soit  $x \in ]a; +\infty[$ .  
 a. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Justifier l'égalité d'événements :

$$((N = n) \cap (Z \leq x)) = \begin{cases} (a < X_1 \leq x) & \text{si } n = 1 \\ (T_{n-1} \leq a) \cap (a < X_n \leq x) & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

En déduire la probabilité  $\mathbf{P}((N = n) \cap (Z \leq x))$ .

- b. Montrer alors :  $\mathbf{P}(Z \leq x) = 1 - e^{a-x}$ .
12. a. Montrer que la variable aléatoire  $Z - a$  suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.  
 b. En déduire l'existence et la valeur de  $\mathbf{E}(Z)$ , ainsi que l'existence et la valeur de  $\mathbf{V}(Z)$ .

## EXERCICE 2

Dans cet exercice, on pourra utiliser l'encadrement suivant :  $2 < e < 3$ .

**Partie I : Étude d'une fonction**

On considère l'application  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \varphi(x) = x^2 e^x - 1$ .

1. Dresser le tableau de variations de  $\varphi$ , en précisant la limite de  $\varphi$  en  $-\infty$ , sa valeur en 0 et sa limite en  $+\infty$ .
2. Établir que l'équation  $e^x = \frac{1}{x^2}$ , d'inconnue  $x \in ]0; +\infty[$ , admet une solution et une seule, notée  $\alpha$ , et que  $\alpha$  appartient à l'intervalle  $\left] \frac{1}{2}; 1 \right[$ .

On considère l'application  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = x^3 e^x$ ,

et la suite réelle  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :  $u_0 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ .

**Partie II : Étude d'une suite**

3. Montrer :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1$ .
4. Établir que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante.
5. Quelle est la limite de  $u_n$  lorsque l'entier  $n$  tend vers l'infini ?

**Partie III : Étude d'une série**

6. Montrer que la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{f(n)}$  converge. On note  $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{f(n)}$ .
7. Montrer :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| S - \sum_{k=1}^n \frac{1}{f(k)} \right| \leq \frac{1}{(e-1)e^n}$ .
8. En déduire une fonction en Scilab qui calcule une valeur approchée de  $S$  à  $10^{-4}$  près.

**Partie IV : Étude d'une fonction de deux variables**

On considère l'ouvert  $U = ]0; +\infty[ \times \mathbb{R}$  de  $\mathbb{R}^2$  et l'application de classe  $C^2$  suivante :

$$g : U \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto g(x, y) = \frac{1}{x} + e^x - y^2 e^y.$$

9. Représenter graphiquement l'ensemble  $U$ .
10. Calculer, pour tout  $(x, y)$  de  $U$ , les dérivées partielles premières de  $g$  en  $(x, y)$ .
11. Montrer que  $g$  admet deux points critiques et deux seulement, et que ceux-ci sont  $(\alpha, 0)$  et  $(\alpha, -2)$ , où  $\alpha$  est le réel défini à la question 2.
12. Est-ce que  $g$  admet un extremum local en  $(\alpha, 0)$  ?
13. Est-ce que  $g$  admet un extremum local en  $(\alpha, -2)$  ?
14. Est-ce que  $g$  admet un extremum global sur  $U$  ?

## EXERCICE 3

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension 3. On note  $0_E$  le vecteur nul de  $E$ .

On note  $i$  l'application identité de  $E$ , et  $\theta$  l'application constante nulle de  $E$  dans  $E$  :

$$i : E \longrightarrow E, x \longmapsto x \quad \text{et} \quad \theta : E \longrightarrow E, x \longmapsto 0_E.$$

On considère un endomorphisme  $f$  de  $E$  tel que :

$$f \neq \theta, \quad f^2 + i \neq \theta, \quad f \circ (f^2 + i) = \theta,$$

où  $f^2$  désigne  $f \circ f$ .

1. a. Montrer que  $f$  n'est pas bijectif.
- b. En déduire que 0 est valeur propre de  $f$ , puis montrer qu'il existe  $u$  appartenant à  $E$  tel que :  

$$u \neq 0_E \quad \text{et} \quad f(u) = 0_E.$$

Soit  $v_1$  appartenant à  $E$  tel que :  $v_1 \neq 0_E$  et  $f(v_1) = 0_E$ .

2. Montrer :  $\text{Sp}(f) = \{0\}$ .
3. Est-ce que  $f$  est diagonalisable ?
4. Montrer que  $f^2 + i$  n'est pas bijectif, puis en déduire qu'il existe  $v$  appartenant à  $E$  tel que :  

$$v \neq 0_E \quad \text{et} \quad f^2(v) = -v.$$

Soit  $v_2$  appartenant à  $E$  tel que :  $v_2 \neq 0_E$  et  $f^2(v_2) = -v_2$ . On note :  $v_3 = f(v_2)$ .

5. Montrer :  $f(v_3) = -v_2$ .
6. a. Montrer que la famille  $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$  est une base de  $E$ .
- b. Déterminer la matrice  $C$  de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

On considère les matrices suivantes :  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,

et le sous-espace vectoriel  $\mathcal{F}$  de  $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$  engendré par  $(A, B, C)$ , c'est-à-dire :

$$\mathcal{F} = \{aA + bB + cC; (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}.$$

7. Déterminer la dimension de  $\mathcal{F}$ .
8. Montrer :  $\{M \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R}); CM = MC\} = \mathcal{F}$ .
9. a. Pour tout  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ , calculer la matrice  $(aA + bB + cC)^2$ .
- b. En déduire une matrice  $M$  de  $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$  telle que : 
$$M^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -12 \\ 0 & 12 & 5 \end{pmatrix}.$$
10. On note  $g = f^2 - i$ .  
Montrer que  $g$  est bijectif et exprimer  $g^{-1}$  à l'aide de  $f$  et  $i$ .

## EXERCICE 1

### Partie I : Loi exponentielle.

1. Soit  $X$  une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ .  
Une densité de  $X$  est la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$\begin{cases} f(x) = \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ f(x) = 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

La fonction de répartition de  $X$  est la fonction  $F$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$\begin{cases} F(x) = 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ F(x) = 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}; \quad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

2. On utilise la première question, sans refaire de calculs :

D'après la question 1 et la définition d'une densité de probabilité,  $\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx$  est une intégrale convergente qui vaut 1.

On en déduit que  $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx$  est aussi une intégrale convergente et elle est égale à  $\frac{1}{\lambda}$ .

Par définition de l'espérance mathématique d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ ,  $\int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx$  est une intégrale convergente qui vaut  $\frac{1}{\lambda}$ .

Il en résulte que  $\int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x} dx$  est aussi une intégrale convergente qui vaut  $\frac{1}{\lambda^2}$ .

3. (a) Puisque la variable aléatoire  $U$  prend ses valeurs dans  $[0; 1[$ , alors  $V$  prend ses valeurs dans  $\mathbb{R}^+$ .

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, P(V \leq x) = P(1 - U \geq e^{-\lambda x})$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, P(V \leq x) = P(U \leq 1 - e^{-\lambda x})$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, P(V \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

La variable aléatoire  $V$  suit la loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ .

- (b) fonction  $v =$  exponentielle (lambda)

```
u = rand ( )
```

```
v = - log ( 1 - u ) / lambda
```

```
endfunction
```

Partie II : Loi de la variable aléatoire  $T_n$ .

4. (a)

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, P(T_n \leq x) = P\left(\bigcap_{i=1}^n (X_i \leq x)\right)$$

Or, par hypothèse, les variables aléatoires  $X_i$  sont indépendantes et suivent toutes la loi exponentielle de paramètre 1.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, P(T_n \leq x) = \prod_{i=1}^n (1 - e^{-x})$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, P(T_n \leq x) = (1 - e^{-x})^n.}$$

(b) Puisque  $T_n$  prend ses valeurs dans  $\mathbb{R}^+$ , la fonction de répartition de  $T_n$  vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_{T_n}(x) = P(T_n \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (1 - e^{-x})^n & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

La fonction  $F_{T_n}$  est continue sur  $] -\infty; 0[$  et sur  $]0; +\infty[$ .

Comme  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - e^{-x})^n = 0$ , elle est aussi continue en 0, donc elle est continue sur  $\mathbb{R}$ .

Elle est de classe  $\mathcal{C}^1$  sauf peut-être en 0.

La fonction  $F_{T_n}$  est donc bien la fonction de répartition d'une variable à densité; une densité de  $T_n$  s'obtient en dérivant  $F_{T_n}$  sur les intervalles où elle est de classe  $\mathcal{C}^1$ .

$$\forall x \in \mathbb{R}, F'_{T_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ ne^{-x}(1 - e^{-x})^n & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$T_n$  est une variable aléatoire à densité, admettant pour densité la fonction  $f_n$ .

5. (a) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . La variable aléatoire  $T_n$  admet une espérance si et seulement si l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} x f_n(x) dx$  converge absolument, c'est à dire, étant donné que  $f_n$  est nulle sur  $] -\infty; 0[$  et positive sur  $\mathbb{R}^+$ , si et seulement si  $\int_0^{+\infty} x f_n(x) dx$  converge.

L'intégrale  $\int_0^{+\infty} x f_n(x) dx$  est impropre en  $+\infty$ . Or  $x f_n(x) \underset{+\infty}{\sim} n x e^{-x}$ .

D'après la question 2,  $\int_0^{+\infty} n x e^{-x} dx$  converge.

Donc d'après la règle de comparaison pour les intégrales de fonctions positives,  $\int_0^{+\infty} x f_n(x) dx$  est aussi une intégrale convergente.

La variable aléatoire  $T_n$  admet une espérance.

(b)

$$E(T_1) = E(X_1) = 1$$

$$E(T_2) = \int_0^{+\infty} 2x e^{-x} (1 - e^{-x}) dx$$

Notons que d'après la question précédente, cette intégrale converge.

$$E(T_2) = 2 \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx - 2 \int_0^{+\infty} x e^{-2x} dx$$

Or  $\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx = 1$  et, d'après la question 2,  $\int_0^{+\infty} x e^{-2x} dx = \frac{1}{4}$ .

$$E(T_1) = 1; E(T_2) = \frac{3}{2}.$$

(a) On a d'une part :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}^+, f_{n+1}(x) - f_n(x) = (n+1)e^{-x}(1 - e^{-x})^n - ne^{-x}(1 - e^{-x})^{n-1}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}^+, f_{n+1}(x) - f_n(x) = e^{-x}(1 - e^{-x})^{n-1} [1 - (n+1)e^{-x}]$$

Et, d'autre part, comme la fonction  $f_{n+1}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^+$  :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, f'_{n+1}(x) = (n+1)e^{-x}(1 - e^{-x})^{n-1}(ne^{-x} - 1 + e^{-x})$$

On peut donc conclure :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}^+, f_{n+1}(x) - f_n(x) = f'_{n+1}(x).$$

(b) D'après la question précédente,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^{+\infty} x(f_{n+1}(x) - f_n(x))dx = \int_0^{+\infty} -\frac{x}{n+1}f'_{n+1}(x)dx$$

Soit  $A > 0$ , on pose :

$$I_A = \int_0^A -\frac{x}{n+1}f'_{n+1}(x)dx$$

Soit  $u(x) = x$ ,  $u'(x) = 1$ ;  $v'(x) = f'_{n+1}(x)$  et  $v(x) = f_{n+1}(x)$ .

Les fonctions  $u$  et  $v$  sont de classe  $C^1$  sur tout segment de  $\mathbb{R}^+$ . On obtient par la formule d'intégration par parties :

$$I_A = \left[ -\frac{x}{n+1}f_{n+1}(x) \right]_0^A + \frac{1}{n+1} \int_0^A f_{n+1}(x)dx$$

Par croissance comparée,  $\lim_{A \rightarrow +\infty} Af_{n+1}(A) = 0$  et  $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A f_{n+1}(x)dx$  existe et vaut  $\int_0^{+\infty} f_{n+1}(x)dx$ .

On peut donc conclure :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^{+\infty} x(f_{n+1}(x) - f_n(x))dx = \frac{1}{n+1} \int_0^{+\infty} f_{n+1}(x)dx.$$

(c) On remarque qu'étant donné que  $f_{n+1}$  est une densité de probabilité, on a  $\int_0^{+\infty} f_{n+1}(x)dx = 1$ .

De plus, on sait que  $T_n$  admet une espérance donc les intégrales  $\int_0^{+\infty} xf_{n+1}(x)dx$  et  $\int_0^{+\infty} xf_n(x)dx$  sont convergentes, donc la relation obtenue à la question précédente peut aussi s'écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^{+\infty} xf_{n+1}(x)dx - \int_0^{+\infty} xf_n(x)dx = \frac{1}{n+1}$$

On peut en déduire la relation :

$$E(T_{n+1}) - E(T_n) = \frac{1}{n+1}.$$

On conjecture la relation  $E(T_n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$  et on se propose de la démontrer par récurrence.

On a vu que  $E(T_1) = 1$  ce qui montre que la propriété est vérifiée pour  $n = 1$ .

Soit  $n$  un entier naturel non nul tel que  $E(T_n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ .

D'après le résultat précédent,  $E(T_{n+1}) - E(T_n) = \frac{1}{n+1}$  donc  $E(T_{n+1}) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1}$

Soit  $E(T_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}$  ce qui établit la relation au rang  $n+1$  et achève le raisonnement par récurrence.

$$E(T_n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

### Partie III : Loi du premier dépassement.

7. L'événement  $(N = 0)$  est réalisé si et seulement si toutes les variables aléatoires  $X_k$  sont inférieures ou égales à  $a$ , ce qu'on peut écrire :

$$(N = 0) = \bigcap_{k=1}^{+\infty} (X_k \leq a)$$

D'après le théorème de limite monotone :

$$P(N = 0) = P\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} (X_k \leq a)\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcap_{k=1}^n (X_k \leq a)\right)$$

Or, par indépendance des variables aléatoires,

$$P\left(\bigcap_{k=1}^n (X_k \leq a)\right) = \prod_{k=1}^n P(X_k \leq a) = \prod_{k=1}^n (1 - e^{-a})$$

$$P\left(\bigcap_{k=1}^n (X_k \leq a)\right) = (1 - e^{-a})^n$$

Or,  $|1 - e^{-a}| < 1$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - e^{-a})^n = 0$ .

$$P(N=0)=0.$$

8.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (N = n) = \bigcap_{k=1}^{n-1} (X_k \leq a) \cap (X_n > a)$$

Par indépendance des variables aléatoires,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(N = n) = \prod_{k=1}^{n-1} P(X_k \leq a) P(X_n > a)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(N = n) = (1 - e^{-a})^{n-1} e^{-a}.$$

9. Le résultat de la question précédente permet d'affirmer que la variable aléatoire  $N$  suit la loi géométrique de paramètre  $e^{-a}$  ; il suffit donc d'appliquer les résultats du cours.

$$E(N) = e^a ; V(N) = e^a(e^a - 1).$$

10. D'après l'énoncé, la variable aléatoire  $Z$  est égale à la première variable  $X_n$  qui est strictement supérieure à  $a$ , si elle existe et à 0 sinon. On peut donc écrire :

$$P(Z \leq a) = P(Z = 0) = P(N = 0) = 0$$

11. (a) Soit  $x > a$ . Pour  $n = 1$  :

$$((N = 1) \cap (Z \leq x)) = (X_1 > a) \cap (X_1 \leq x)$$

$$((N = 1) \cap (Z \leq x)) = (a < X_1 \leq x)$$

On peut donc calculer  $P((N = 1) \cap (Z \leq x))$  :

$$P((N = 1) \cap (Z \leq x)) = P(a < X_1 \leq x) = P(X_1 \leq x) - P(X_1 \leq a)$$

$$P((N = 1) \cap (Z \leq x)) = (1 - e^{-x}) - (1 - e^{-a})$$

$$P((N = 1) \cap (Z \leq x)) = e^{-a} - e^{-x}$$

Si  $n \geq 2$ , on a :

$$((N = n) \cap (Z \leq x)) = \bigcap_{k=1}^{n-1} (X_k \leq a) \cap (a < X_n \leq x)$$

$$((N = n) \cap (Z \leq x)) = (T_{n-1} \leq a) \cap (a < X_n \leq x)$$

Calcul de  $P((N = n) \cap (Z \leq x))$  :

Comme  $T_{n-1}$  et  $X_n$  sont indépendantes :

$$P((N = n) \cap (Z \leq x)) = P(T_{n-1} \leq a)P(a < X_n \leq x)$$

$$P((N = n) \cap (Z \leq x)) = (1 - e^{-a})^{n-1}(e^{-a} - e^{-x})$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, P((N = n) \cap (Z \leq x)) = (1 - e^{-a})^{n-1}(e^{-a} - e^{-x}) .}$$

- (b) La famille d'événements  $((N = n); n \in \mathbb{N}^*)$  forme un système (quasi) complet d'événements ; on a donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(Z \leq x) = \sum_{n=1}^{+\infty} P((N = n) \cap (Z \leq x))$$

$$P(Z \leq x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (1 - e^{-a})^{n-1}(e^{-a} - e^{-x})$$

$$P(Z \leq x) = (e^{-a} - e^{-x}) \sum_{n=1}^{+\infty} (1 - e^{-a})^{n-1}$$

$$P(Z \leq x) = (e^{-a} - e^{-x}) \frac{1}{1 - (1 - e^{-a})}$$

$$\boxed{P(Z \leq x) = 1 - e^{a-x} .}$$

12. (a) La variable aléatoire  $Z - a$  prend ses valeurs dans  $\mathbb{R}^+$ . En utilisant le résultat de la question précédente :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, P(Z - a \leq x) = P(Z \leq x + a) = 1 - e^{-x}$$

$$\boxed{\text{La variable aléatoire } Z - a \text{ suit la loi exponentielle de paramètre } 1 .}$$

(b) D'après la question précédente, la variable aléatoire  $Z - a$  admet une espérance et une variance :

$$E(Z - a) = 1; \quad V(Z - a) = 1$$

Donc la variable aléatoire  $Z$  admet une espérance et une variance telles que :

$$E(Z) = E(Z - a) + 1; \quad V(Z - a) = V(Z)$$

$$\boxed{E(Z) = a + 1; \quad V(Z) = 1.}$$

## EXERCICE 2

### Partie I : Étude d'une fonction.

1. La fonction  $\varphi$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  d'après les opérations usuelles sur les fonctions dérivables.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) = xe^x(2+x)$$

Si  $x < -2$ ,  $\varphi'(x) > 0$ , si  $-2 < x < 0$ ,  $\varphi'(x) < 0$  et si  $x > 0$ ,  $\varphi'(x) > 0$ . De plus,  $\varphi'(-2) = \varphi'(0) = 0$ .

On en déduit que la fonction  $\varphi$  est strictement croissante sur  $] -\infty; -2[$  et sur  $]0; +\infty[$  et strictement décroissante sur  $[-2; 0]$ .

Par croissance comparée, on a  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = -1$ .

On a aussi, de manière immédiate  $\varphi(0) = -1$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty$ . De plus  $\varphi(-2) = 4e^{-2} - 1$ . Nous laissons au lecteur le soin de dresser le tableau de variations de la fonction  $\varphi$  en y reportant tous les éléments de l'étude précédente.

2. On remarque que :

$$\forall x > 0, e^x = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow x^2 e^x = 1 \Leftrightarrow \varphi(x) = 0$$

La fonction  $\varphi$  est continue et strictement monotone sur  $]0; +\infty[$ ; elle réalise donc une bijection de  $]0; +\infty[$  sur  $] -1; +\infty[$ . Or  $0 \in ] -1; +\infty[$  donc l'équation  $\varphi(x) = 0$  admet une unique solution dans  $]0; +\infty[$ .

On a alors :

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{e}}{4} - 1; \quad \varphi(1) = e - 1$$

On remarque que  $\varphi\left(\frac{1}{2}\right) < 0$  et  $\varphi(1) > 0$  donc la solution  $\alpha$  de l'équation  $\varphi(x) = 0$  appartient à l'intervalle  $\left] \frac{1}{2}; 1 \right[$ .

### Partie II : Étude d'une suite.

3. On démontre le résultat demandé par récurrence.

Soit  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $P_n$  : «  $u_n$  existe et  $u_n \geq 1$  ».

Pour  $n = 0$ , on a par hypothèse  $u_0 = 1$  soit  $u_0 \geq 1$  ce qui établit  $P_0$ .

Soit  $n$  un entier naturel tel que  $P_n$ ; sachant  $P_n$ ,  $u_n$  existe et  $u_n \geq 1$ .

On en déduit que  $u_{n+1}$  existe et  $u_n^3 e^{u_n} \geq 1^3 e^1$  d'où  $u_{n+1} \geq 1$  ce qui établit  $P_{n+1}$  et achève le raisonnement par récurrence.

4. Comme tous les termes de la suite  $(u_n)$  sont strictement positifs, on peut considérer le quotient  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  et le comparer à 1 :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} = u_n^2 e^{u_n}$$

Comme on a prouvé précédemment que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1$ , on a donc  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ .

La suite  $(u_n)$  est croissante.

5. Supposons que la suite  $(u_n)$  est majorée ; alors, étant donné qu'elle est croissante, elle serait convergente de limite  $L$  telle que  $L \geq 1$ .

La suite  $(u_n)$  est définie par  $u_0 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ .

La fonction  $f$  étant continue sur  $\mathbb{R}$ , elle est aussi continue en  $L$  et on peut appliquer le théorème du point fixe ; la limite  $L$  est solution de l'équation  $f(x) = x$ . Or cette équation admet pour unique solution 0, ce qui est incompatible avec l'inégalité  $L \geq 1$ .

Ainsi, la suite  $(u_n)$  n'est pas majorée.

La suite  $(u_n)$  étant croissante et non majorée, on peut conclure :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

### Partie III : Etude d'une série.

6.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{f(n)} = \frac{1}{n^3 e^n}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, n^3 e^n \geq n^3 e \geq n^3$$

On peut donc en déduire que,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{f(n)} \leq \frac{1}{n^3}$$

La série de terme général  $\frac{1}{f(n)}$  est une série à termes positifs ; la série de terme général  $\frac{1}{n^3}$  est une série de Riemann convergente ; on peut donc déduire du critère de comparaison des séries à termes positifs que la série de terme général  $\frac{1}{f(n)}$  est convergente.

7.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| S - \sum_{k=1}^n \frac{1}{f(k)} \right| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3 e^k}$$

$$\forall N \geq n+1, \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^3 e^k} \leq \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{e^k}$$

On reconnaît dans le membre de droite de l'inégalité la somme des  $N - n$  termes de la suite géométrique de raison  $e^{-1}$  et de premier terme  $\frac{1}{e^{n+1}}$ . En appliquant la formule du cours, il vient :

$$\forall N \geq n+1, \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^3 e^k} \leq \frac{1}{e^{n+1}} \frac{1 - e^{n-N}}{1 - e^{-1}}$$

Comme la série de terme général  $\frac{1}{n^3}$  est convergente et  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{n-N}}{1 - e^{-1}}$  existe, le théorème de compatibilité de l'ordre et de la limite permet d'écrire :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3 e^k} \leq \frac{1}{e^{n+1}} \left( \frac{1}{1 - e^{-1}} \right)$$

Soit après transformation de l'écriture :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| S - \sum_{k=1}^n \frac{1}{f(k)} \right| \leq \frac{1}{(e-1)e^n}$$

```

8. fonction S = somme ( )
   n=0
   S=0
   while 1/(exp(1)-1)*exp(n) > 10 ^(-4)
     n=n+1
     S=S+1/(n ^ 3*exp(n))
   end
endfunction

```

**Partie IV : Etude d'une fonction de deux variables.**

9. L'ensemble  $U$  est le demi-plan de frontière l'axe des  $y$ , situé à droite de cet axe ; nous laissons au lecteur le soin de le représenter graphiquement.
10. La fonction  $g$  est de classe  $C^2$  sur  $U$  donc elle admet des dérivées partielles d'ordre 1 par rapport à  $x$  et à  $y$ .

$$\forall (x, y) \in U, \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = -\frac{1}{x^2} + e^x, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = ye^y(-y-2).$$

11. La fonction  $g$  admet des points critiques en tout  $(x, y)$  de  $U$  tel que les deux dérivées partielles d'ordre 1 s'annulent simultanément.

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{x^2} + e^x = 0 \\ ye^y(-y-2) = 0 \end{cases}$$

On remarque alors que la première équation n'est autre que  $\varphi(x) = 0$  étudiée dans la partie I du problème. On sait qu'elle admet une unique solution  $\alpha$  (on rappelle que dans  $U$ ,  $x > 0$ ).

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = 0 \text{ ou } y = -2 \end{cases}$$

La fonction  $g$  admet exactement deux points critiques :  $(\alpha, 0); (\alpha, -2)$ .

12. La fonction  $g$  est de classe  $C^2$  sur  $U$  donc elle admet des dérivées partielles d'ordre 2 .

$$\forall (x, y) \in U, \frac{\partial g^2}{\partial x^2}(x, y) = \frac{2}{x^3} + e^x, \quad \frac{\partial g^2}{\partial y^2}(x, y) = -e^y(y^2 + 4y + 2)$$

La fonction  $g$  étant de classe  $C^2$  sur  $U$ , on peut appliquer le théorème de Schwarz

$$\forall (x, y) \in U, \frac{\partial g^2}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial g^2}{\partial y \partial x}(x, y) = 0$$

En  $(\alpha, 0)$ , la matrice hessienne de  $g$  est :

$$\nabla^2 g(\alpha, 0) = \begin{pmatrix} \frac{2}{\alpha^3} + e^\alpha & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Cette matrice étant diagonale, on lit ses valeurs propres sur sa diagonale ; l'une est positive stricte et l'autre négative stricte.

La fonction  $g$  n'admet pas d'extremum local en  $(\alpha, 0)$ .

13. En  $(\alpha, -2)$ , la matrice hessienne de  $g$  est :

$$\nabla^2 g(\alpha, -2) = \begin{pmatrix} \frac{2}{\alpha^3} + e^\alpha & 0 \\ 0 & \frac{2}{e^2} \end{pmatrix}$$

Cette matrice étant diagonale, on lit ses valeurs propres sur sa diagonale ; les deux valeurs propres sont strictement positives.

La fonction  $g$  admet un minimum local en  $(\alpha, -2)$ .

14. On a :

$$\forall x > 0, g(x, 0) = \frac{1}{x} + e^x; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x, 0) = +\infty$$

On en déduit que la fonction  $g$  n'est pas majorée sur  $U$

De même,

$$\forall y > 0, g(1, y) = 1 + e - y^2 e^y; \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} g(1, y) = -\infty$$

On en déduit que la fonction  $g$  n'est pas minorée sur  $U$ .

La fonction  $g$  n'admet pas d'extremum global sur  $U$ .

## EXERCICE 3

1. a. Supposons  $f$  bijectif ;  $f$  admet alors un automorphisme réciproque noté  $f^{-1}$ .  
Par hypothèse,  $f \circ (f^2 + i) = \theta$ . En composant à gauche avec  $f^{-1}$ , on en déduit que :

$$f^{-1} \circ [f \circ (f^2 + i)] = f^{-1} \circ \theta$$

Soit, après simplification :

$$f^2 + i = \theta$$

ce qui est en contradiction avec les hypothèses. On a donc montré par l'absurde que :

L'endomorphisme  $f$  n'est pas bijectif

- b. D'après le cours,  $f$  n'étant pas bijectif, il admet 0 comme valeur propre.  
D'après la définition d'une valeur propre et d'un vecteur propre, il existe un vecteur  $u$  non nul dans  $E$  tel que  $f(u) = 0.u = 0_E$

2. On a vu à la question précédente que 0 était valeur propre de  $f$  donc  $0 \in \text{Sp}(f)$ .

Montrons que 0 est la seule valeur propre possible de  $f$ .

Par hypothèse  $f \circ (f^2 + i) = \theta$ . On peut donc en déduire que  $P(X) = X(X^2 + 1)$  est un polynôme annulateur de  $f$ . Or  $P$  admet une seule racine réelle qui est 0. Donc 0 est la seule valeur propre possible de  $f$ .

$$\text{Sp}(f) = \{0\}$$

3. Supposons  $f$  diagonalisable, alors sa matrice représentative  $M$  dans une base  $B$  de  $E$  le serait aussi ; il existerait donc une matrice  $P$  inversible et une matrice  $D$  diagonale telle que  $M = PDP^{-1}$ .

Mais  $D$  est la matrice diagonale ayant comme coefficients diagonaux les valeurs propres de  $f$  ; comme 0 est la seule valeur propre de  $f$ ,  $D$  est la matrice nulle ; par produit,  $M$  est alors la matrice nulle donc  $f$  est l'endomorphisme nul, ce qui est contraire aux hypothèses.

$f$  n'est pas diagonalisable.

4. Supposons  $f^2 + i$  bijectif ; alors  $f^2 + i$  admet alors un automorphisme réciproque noté  $(f^2 + i)^{-1}$ .  
Par hypothèse,  $f \circ (f^2 + i) = \theta$ . En composant à droite avec  $(f^2 + i)^{-1}$ , on en déduit que :

$$[f \circ (f^2 + i)] \circ (f^2 + i)^{-1} = \theta \circ (f^2 + i)^{-1}$$

Soit, après simplification :

$$f = \theta$$

ce qui est en contradiction avec les hypothèses.

$f^2 + i$  n'est pas bijectif.

Comme  $f^2 + i$  n'est pas bijectif, il admet 0 comme valeur propre ; donc il existe un vecteur  $v$  dans  $E$ , non nul, tel que

$$(f^2 + i)(v) = 0.v = 0_E$$

Cette égalité peut aussi s'écrire  $f^2(v) = -v$ .

5. On sait que  $v_3 = f(v_2)$  donc  $f(v_3) = f^2(v_2)$ .

$$f(v_3) = -v_2.$$

6. a. Montrons que  $B$  est une famille libre de  $E$ .

On considère trois réels  $a, b, c$  tels que  $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0_E$ .

On compose par  $f$ ; il vient  $af(v_1) + bf(v_2) + cf(v_3) = f(0_E)$  soit après simplification :

$$bv_3 - cv_2 = 0_E$$

On compose de nouveau par  $f$  et on simplifie :

$$-bv_2 - cv_3 = 0_E$$

En reportant dans la première équation, il vient  $av_1 = 0_E$  et comme  $v_1 \neq 0_E$ ,  $a = 0$ .

En combinant linéairement les deux autres équations, on obtient :

$$(b^2 + c^2)v_2 = 0_E$$

Comme  $v_2 \neq 0_E$ , on peut alors déduire successivement  $b^2 + c^2 = 0$  puis  $b = c = 0$ .

On peut alors conclure que  $B$  est une famille libre de  $E$ .

Or cette famille est composée de 3 vecteurs et  $E$  est un espace de dimension 3.

$$\boxed{B \text{ est une base de } E.}$$

b. On sait par hypothèse que  $f(v_1) = 0_E$ ,  $f(v_2) = v_3$  et  $f(v_3) = -v_2$ . On peut donc en déduire que la matrice  $C$  de l'endomorphisme  $f$  dans la base  $B$  est :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. Par hypothèse,  $F$  est le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  engendré par la famille  $(A, B, C)$ . Montrons que  $(A, B, C)$  est une famille libre.

On considère trois réels  $a, b, c$  tels que  $aA + bB + cC = (O)$ .

On a alors :

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & -c \\ 0 & c & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d'où on déduit de manière immédiate que  $a = b = c = 0$ .

La famille  $(A, B, C)$  est donc une famille libre qui engendre  $F$ ; c'est donc une base de  $F$ .

$$\boxed{F \text{ est un espace vectoriel de dimension 3.}}$$

8. Soit  $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ .

$$CM = MC \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$CM = MC \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -g & -h & -i \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ 0 & f & -e \\ 0 & i & -h \end{pmatrix}$$

$$CM = MC \Leftrightarrow \begin{cases} c = b = d = g = 0 \\ h = -f \\ e = i \end{cases}$$

$$CM = MC \Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & -h \\ 0 & h & e \end{pmatrix}$$

$$CM = MC \Leftrightarrow M = aA + eB + hC$$

Le commutant de  $M$  est bien  $F$ .

9. a.

$$(aA + bB + cC)^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 - c^2 & -2bc \\ 0 & 2bc & b^2 - c^2 \end{pmatrix}$$

b.

$$M^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -12 \\ 0 & 12 & 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 - c^2 & -2bc \\ 0 & 2bc & b^2 - c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -12 \\ 0 & 12 & 5 \end{pmatrix}$$

$$M^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -12 \\ 0 & 12 & 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 - c^2 = 5 \\ 2bc = 12 \end{cases}$$

Une solution possible est  $a = 2, b = 3, c = 2$ .

On peut choisir  $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ .

10. Soit  $G$  la matrice de l'endomorphisme  $g$  dans la base  $B$ .

$$G = C^2 - I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

La matrice  $G$  est une matrice diagonale sans 0 sur la diagonale donc elle est inversible ; on peut alors en déduire que  $g$  est bijectif.

La matrice de l'endomorphisme  $g^{-1}$  est  $G^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} = -I - \frac{1}{2}C^2$ .

$g$  est bijectif et  $g^{-1} = -i - \frac{1}{2}f^2$ .

# ÉCONOMIE

**DURÉE : 2 HEURES 30.**

*Il n'est fait usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.*

ESC

## S U J E T

*Vous rédigez une note de synthèse de l'ensemble documentaire fourni en 500 mots environ.*

### L'INTERVENTION PUBLIQUE DANS LA CORRECTION DES INÉGALITÉS

#### DOCUMENT 1

##### Le développement d'un Etat social au xx<sup>e</sup> siècle

« A partir des années 1920-1930 et jusqu'aux années 1970-1980, on assiste dans l'ensemble du monde riche à un accroissement considérable de la part du revenu national que différents pays (Etats-Unis, France, Royaume-Uni, Suède) choisissent de consacrer aux impôts et aux dépenses publiques (et en particulier aux dépenses sociales). Dans tous les pays développés, en tout juste un demi-siècle, la part des impôts dans le revenu national est multipliée par un facteur d'au moins trois ou quatre (parfois par plus de cinq, comme dans les pays nordiques). On constate ensuite, là encore dans tous les pays, une stabilisation presque complète de la part des impôts dans le revenu national depuis les années 1980 jusqu'aux années 2010. Cette stabilisation se fait à des niveaux assez différents les uns des autres : à peine plus de 30 % du revenu national aux Etats-Unis n autour de 40 % au Royaume-Uni, et entre 45 % et 55 % en Europe continentale (45 % en Allemagne, 50 % en France et près de 55 % en Suède). Les écarts entre pays sont loin d'être négligeables. Mais il est frappant de constater à quel point les évolutions séculaires sont proches les unes des autres, en particulier concernant la stabilité quasi parfaite observée dans tous les pays au cours des trois dernières décennies. (...) Ainsi donc, tous les pays riches, sans exception, sont passés au cours du xx<sup>e</sup> siècle d'un équilibre où ils consacrent moins d'un dixième de leur revenu national aux impôts et aux dépenses communes, à un nouvel équilibre où ils en consacrent durablement entre un tiers et la moitié. (...)

Pour mieux comprendre les enjeux derrière ces chiffres, il nous faut maintenant décrire un peu plus précisément à quoi a servi cette hausse historique des prélèvements obligatoires. Cette transformation correspond à la mise en place d'un « Etat social » au cours du xx<sup>e</sup> siècle. Au xix<sup>e</sup> siècle et jusqu'en 1914, la puissance publique se contentait d'assurer les grandes missions régaliennes. Ces missions mobilisent

aujourd'hui encore un peu moins d'un dixième du revenu national. La hausse de la part des prélèvements dans les richesses produites a permis à la puissance publique de prendre en charge des missions sociales de plus en plus importantes, représentant entre un quart et un tiers du revenu national suivant les pays, que l'on peut décomposer en première approximation en deux moitiés de taille comparable. Il s'agit d'une part des dépenses publiques d'éducation et de santé, et d'autre part des dépenses de remplacement et de transfert. (...) [Ces dernières] représentent généralement entre 10 % et 15 % (parfois près de 20 %) du revenu national dans la plupart des pays riches en ce début de <sup>xxi</sup> siècle. Contrairement aux dépenses publiques d'éducation et de santé, qui peuvent être considérées comme un transfert en nature, les revenus de remplacement et de transfert font partie du revenu disponible des ménages : la puissance publique prélève des masses importantes d'impôts et de cotisations, puis les reverse à d'autres ménages sous forme de revenus de remplacement (pensions de retraite, allocations chômage) et de divers transferts monétaires (allocations familiales, minima sociaux, etc.) (...).

Au total, si on additionne les dépenses publiques d'éducation et de santé (10-15 % du revenu national) et les revenus de remplacement et de transfert (...), on aboutit à une masse totale de dépenses sociales (au sens large) comprise entre 25 % et 35 % du revenu national, qui représente dans tous les pays riches la quasi-totalité de la hausse de la part des prélèvements obligatoires constatée au <sup>xx</sup> siècle. Autrement dit, le développement de l'Etat fiscal au cours du siècle dernier correspond pour l'essentiel à la constitution d'un Etat social ».

Source : Piketty Thomas, *Le Capital au <sup>xxi</sup> siècle*, Seuil, 2013, pp. 756-76.

## DOCUMENT 2

### La redistribution en France

« Dans son sens le plus large, la redistribution s'opère à travers l'ensemble des prélèvements sur les ressources des ménages et l'ensemble des prestations qui leur sont versées, que celles-ci soient octroyées sous forme monétaire ou en nature (services publics). [La redistribution des revenus est] réalisée par la fiscalité directe et les prestations sociales dont l'objectif principal est de réduire les écarts de niveau de vie entre ménages (prestations familiales, allocations logement, minima sociaux). Les ménages bénéficient en outre d'un certain nombre de services rendus par les administrations publiques (les transferts en nature) qui contribuent à l'amélioration « indirecte » de leur niveau de vie. Ce sont des services fournis gratuitement ou à un prix très inférieur à leur valeur. Ils contribuent à modifier les inégalités de richesse en évitant aux personnes d'acheter le service au prix du marché. Les administrations publiques fournissent de nombreux services, qu'ils soient collectifs (justice, sécurité) ou individualisables : les deux principaux services en nature individualisables sont l'éducation et la santé. (...)

Les personnes résidant en France métropolitaine perçoivent des prestations sociales, au titre de leur situation familiale (allocations familiales par exemple) ou sociale (minima sociaux, allocations logement) dont l'objectif principal est de réduire les écarts de niveau de vie dans la population. Elles acquittent d'autre part des cotisations et des contributions sociales visant à financer ces prestations et des impôts (impôt sur le revenu, taxe d'habitation). L'ensemble de ces transferts font partie du système socio-fiscal (...) [qui] modifie les inégalités de revenus. (...)

Avant redistribution, le niveau de vie moyen des 20 % de personnes les plus aisées (dernier quintile) est de près de 53 600 euros par an, soit 7,2 fois supérieur au niveau de vie moyen des 20 % de personnes les plus modestes (1<sup>er</sup> quintile, 7 400 euros par an). On nomme ce ratio « rapport interquintile ». Les écarts sont encore plus grands aux extrémités de la distribution des revenus : les 10 % de personnes les plus pauvres disposent d'un revenu moyen de l'ordre de 4 300 euros par an tandis que les 10 % les plus riches reçoivent 69 700 euros par an. Les transferts socio-fiscaux réduisent les inégalités de revenu, ce qui a pour effet de resserrer la distribution globale des niveaux de vie autour de la moyenne.

Dans une optique de réduction globale des inégalités de revenus, plus la masse financière totale distribuée par un transfert est élevée, plus son influence sur la distribution des niveaux de vie est grande, car le nombre de ménages concernés est alors important et/ou leur revenu disponible substantiellement modifié par le transfert. À titre d'exemple, le complément familial, prestation familiale sous conditions de ressources destinée aux familles de trois enfants ou plus, représente une part non négligeable du revenu disponible des ménages qui le perçoivent. Toutefois, ceux-ci sont peu nombreux, si bien qu'au total, le complément familial n'est pas un instrument majeur de réduction des inégalités de revenus. (...)

Les prestations familiales dans leur ensemble représentent la moitié des dépenses totales de prestations sociales et participent pour 26 % à la réduction des inégalités de niveau de vie. Elles peuvent être divisées en deux catégories suivant leur ciblage. D'un côté, les prestations familiales sans conditions de ressources ont un pouvoir redistributif *a priori* limité par l'absence de ciblage. Distribuées à une majorité des familles, ce sont d'ailleurs les seules prestations sociales que les personnes du dernier quintile de niveau de vie peuvent percevoir. Elles participent pourtant pour près de 16 % à la réduction des inégalités de niveau de vie, dont 11 % pour les seules allocations familiales. De l'autre côté, les prestations familiales sous conditions de ressources ont *a priori* un pouvoir redistributif important du fait de leur ciblage. Les montants perçus élèvent de manière non négligeable le niveau de vie des familles concernées. Au total, les prestations familiales jouent un rôle redistributif important. Elles ont une importance toute particulière pour les plus modestes puisqu'elles constituent globalement 15 % du niveau de vie après redistribution des personnes du 1<sup>er</sup> quintile, contre 4 % en moyenne sur l'ensemble de la population.

Les aides au logement contribuent à réduire les inégalités de 19 %. Particulièrement ciblées, ce dont témoigne leur indice de progressivité élevé, elles apportent un soutien financier, important aux ménages qui les perçoivent (3 200 euros en moyenne par ménage allocataire). Elles concernent de fait quasi-exclusivement les personnes du 1<sup>er</sup> quintile et représentent en moyenne 11 % de leur niveau de vie.

[Enfin], destinés à garantir un minimum de ressources, les minima sociaux sont par nature les prestations sociales les plus ciblées : ils sont réservés aux personnes les plus pauvres et contribuent par leur ciblage à une réduction des inégalités de plus de 17 % de l'ensemble. Ils représentent ainsi 11 % du niveau de vie moyen des personnes du 1<sup>er</sup> quintile, et même 20 % de celui des personnes du premier décile. »

Source : Cazenave Marie-Cécile, Duval Jonathan, Eidelman Alexis, Langumier Fabrice et Vicard Augustin, *La Redistribution : état des lieux en 2010 et évolution depuis 20 ans*, in France – Portrait Social, INSEE, 2011.

## DOCUMENT 3

## L'intervention publique dans la santé et l'éducation

« Peu de sujets font autant consensus que la santé et l'éducation, à la fois comme valeurs et comme facteurs de croissance. Parmi les économistes, Amartya Sen est celui qui a le plus souligné leur importance primordiale. Pour lui, éducation et santé sont des capacités ou, selon son expression, des « capacités » essentielles au développement de la vie humaine, sans lesquelles les notions de liberté et de bien-être n'ont pas de sens. Sous son influence, le Programme des Nations Unies pour le Développement (PNUD) a créé en 1990 un « indice de développement humain », censé remplacer à terme le produit intérieur brut comme mesure du développement d'une nation. Cet indice correspond à la moyenne de quatre indicateurs : l'espérance de vie, le taux d'alphabétisation, le taux brut de scolarisation et le revenu par habitant. Santé et éducation en représentent donc les trois quarts. (...) Pour des raisons de justice, conclut Amartya Sen, l'éducation et la santé doivent être placées sous la responsabilité de la société.

(...) Robert Lucas [quant à lui,] insiste sur les effets de contagion (ou « externalités » dans le jargon des économistes) du capital humain : non seulement une personne instruite sera elle-même plus productive, mais elle rendra également les autres plus efficaces, en favorisant l'adoption d'idées nouvelles, en plaidant pour une meilleure utilisation des ressources existantes, etc. Les externalités sont encore plus évidentes en ce qui concerne la santé : une personne malade a de fortes chances d'en contaminer d'autres. Comme les individus ne prennent pas en compte cette externalité, ils ont tendance à ne pas investir suffisamment dans leur propre capital humain ou dans celui de leurs enfants. La société a donc le droit de les encourager (voire de les contraindre) à investir plus que ce qu'ils feraient spontanément : cela peut justifier la gratuité de l'école ou des soins de base, l'obligation scolaire ou toute autre politique volontariste en matière de santé et d'éducation (...) Même les plus conservateurs des économistes reconnaissent l'importance [de la santé et de l'éducation], tels trois des prix Nobel de l'Ecole de Chicago : Theodore Schultz, qui a inventé la notion de « capital humain » (par analogie avec le capital physique) pour désigner l'ensemble des talents et aptitudes d'un individu, dont l'éducation et la santé sont des éléments essentiels : Gary Becker, qui a popularisé la notion, ou encore Robert Lucas qui a fait du capital humain le moteur d'une croissance ininterrompue (...)

Cette conviction ne se limite pas au monde académique. Pour James Wolfensohn, président de la Banque Mondiale de 1995 à 2005, l'éducation des filles s'apparente à une solution miracle, tant elle favorise le développement sous tous ses aspects : « elle permet de faire baisser les taux de mortalité infantile et maternelle ; d'améliorer l'éducation de leurs futurs enfants, filles comme garçons ; d'obtenir une productivité plus importante et une meilleure gestion de l'environnement. Tout ceci mis bout à bout signifie une croissance économique plus rapide, et surtout, une meilleure redistribution des fruits de la croissance »<sup>1</sup>.

Au-delà des affirmations de principe, il semble y avoir une réelle volonté (...) d'assurer à tous l'accès à l'instruction et aux services de santé essentiels. Sur les huit « objectifs du millénaire pour le développement » que 189 pays se sont fixés pour 2015, trois concernant la santé (réduire la mortalité infantile, améliorer la santé maternelle, combattre le sida, le paludisme et d'autres maladies) et deux l'éducation (assurer l'instruction primaire pour tous et promouvoir l'égalité des sexes, en

1. Quatrième conférence sur les droits des femmes, Pékin, 1995.

particulier en matière d'éducation). Le rapport de 2009 sur les « objectifs du millénaire » fait état d'avancées réelles : les inscriptions à l'école primaire ont progressé, même si l'objectif d'une scolarisation primaire universelle d'ici à 2015 ne sera pas atteint. Le rapport souligne aussi les progrès réalisés (...) en matière d'accès aux soins. (...)

[Mais] on ne peut pas être « en faveur du droit à la santé ou à l'éducation sans s'interroger sur l'organisation concrète de ces services (...). Comment déterminer la meilleure politique, celle qui sera la plus efficace pour parvenir au but qu'on s'est fixé ? Cette question a des répercussions très concrètes. L'école doit-elle être gratuite ou payante ? Quelle est la taille optimale des classes ? Faut-il construire des centres de santé tout près des villages ou acheminer les malades des zones rurales vers des hôpitaux urbains ? Pour choisir entre ces différentes options (...), la seule solution consiste à tester rigoureusement chacune de ces propositions et à en comparer le prix ainsi que les effets ».

Source : Duflo E., *Le développement Humain*, Seuil, 2010.

## DOCUMENT 4

### Les inégalités de revenus dans les pays de l'OCDE entre 2007 et 2010

« Avant la crise, en moyenne, le revenu moyen des 10 % les plus riches représentait environ neuf fois celui des 10 % les plus pauvres. Cet écart était de 8 dans les années 90, et de 7 dans les années 80. Lors des trois premières années de la crise, entre 2007 et 2010, cet écart est passé de 9 à 9,5. (...) [Mais] l'Etat providence a contribué à amortir le choc pour les plus pauvres, évitant ainsi que les inégalités ne se dégradent trop pendant les trois premières années de la crise. On estime que la redistribution par les prestations sociales et les impôts réduit les inégalités d'un tiers en moyenne pour la population totale des pays de l'OCDE, et d'un quart en excluant les retraites pour la population en âge de travailler. Pour la France, cet effet est supérieur, à 40 % pour la population totale et à un tiers pour la population en âge de travailler, notamment grâce à un niveau élevé de dépenses sociales publiques.

Il faut bien noter que les données disponibles actuellement ne permettent de décrire l'évolution des inégalités de revenus que jusqu'en 2010, c'est-à-dire les premières années de la crise. Depuis 2010, la reprise économique a été très faible dans un certain nombre de pays de l'OCDE, et quelques-uns sont retombés dans la récession, dont la France. En même temps, beaucoup d'individus ont épuisé leurs droits à des allocations de chômage, et beaucoup de gouvernements ont réorienté leur politique budgétaire au profit de l'assainissement et de la consolidation fiscale. Ceci a mis davantage de pression sur les revenus des ménages et leur distribution. Si la lenteur de la croissance persiste et si les mesures d'assainissement budgétaire sont mises en œuvre, la capacité des systèmes d'impôts et de transferts à alléger les niveaux élevés (et potentiellement croissants) de l'inégalité et de la pauvreté des revenus du travail et du capital, pourrait être remise en question. L'OCDE préconise différents grands axes de la politique de lutte contre les fortes inégalités. Le premier défi consiste à stimuler l'emploi, améliorer celui-ci quantitativement et, surtout, qualitativement, permettant à tous d'échapper à la pauvreté et offrant de réelles perspectives de carrière. Investir davantage dans l'éducation et la formation est aussi un chantier crucial.

Ces investissements dans les individus doivent débiter dès la prime enfance et se poursuivre au cours de la scolarité. Après l'entrée dans la vie active, les employeurs comme les salariés doivent être suffisamment incités à investir dans les compétences tout au long de la vie professionnelle.

Enfin, la fiscalité joue un rôle redistributif important aussi. Les pouvoirs publics peuvent envisager de relever les taux marginaux d'imposition du revenu pour atteindre directement cet objectif. D'autres mesures pourraient consister à rechercher une meilleure discipline fiscale, à supprimer des allègements fiscaux et à réévaluer le rôle de l'impôt vis-à-vis de l'ensemble des formes de patrimoine.

Un autre instrument important est la fourniture de services publics gratuits de qualité en matière d'éducation, de santé ou d'accueil familial. En moyenne, les gouvernements des pays de l'OCDE dépensent autant (quelque 13 % du PIB) en services publics sociaux qu'en prestations monétaires, et réduisent ainsi les inégalités d'un cinquième environ. »

Source : « Les inégalités de revenus augmentent dans les pays de l'OCDE » entretien avec Maxime Ladaique, Responsable de l'information statistique à la division des politiques sociales à l'OCDE, publié par l'Observatoire des inégalités, [www.inegalites.fr](http://www.inegalites.fr)

## CORRIGÉ

Par Frédéric Larchevêque, professeur de chaire supérieure au Lycée Jules Michelet, à Vanves.

### A la découverte de l'ensemble documentaire

L'ensemble documentaire fourni cette année comportait 4 textes pour un total de 2 800 mots environ. Comme les sessions précédentes, il était précédé d'un titre : « **L'intervention publique dans la correction des inégalités** ».

#### De l'analyse du titre...

Le titre de l'ensemble documentaire constitue la première information sur le thème de la note de synthèse à réaliser. Il convient donc de ne pas le négliger, car il peut aider à identifier le problème central, à sélectionner plus efficacement les idées principales et enfin à construire un plan efficace. Toutefois, le titre ne doit pas être confondu avec la problématique soulevée par l'ensemble documentaire. Seule une lecture globale des textes permet de la découvrir.

La première lecture cursive de l'ensemble documentaire permet d'affiner la première piste fournie par le titre.

Le **premier document** explique la progression du poids des prélèvements obligatoires et de la dépense publique depuis la fin de la première guerre mondiale par la constitution d'un Etat social. Tous les pays riches ont connu la même trajectoire, même s'il peut exister des différences de degré dans l'utilisation des deux instruments principaux mobilisés : la dépense publique d'éducation et de santé et la redistribution des revenus par le versement de prestations sociales en espèces.

Le **second document** revient, à travers le cas français, sur les deux instruments principaux mobilisés par l'Etat social pour corriger les inégalités de niveau de vie : les opérations de redistribution sur le revenu primaire des ménages (impôts, cotisations et prestations) et le financement de la dépense de consommation individualisable des administrations (éducation et santé pour l'essentiel). Il décrit aussi l'impact global de la redistribution des revenus sur les inégalités de niveau de vie ainsi que les critères d'efficacité des diverses prestations.

Le **troisième document** est centré sur les justifications de l'intervention de l'Etat dans l'offre de ces services un peu particuliers que sont l'éducation et la santé. Il en existe deux principaux : un argument de justice sociale développé notamment par Amartya Sen et un argument d'efficacité économique défendu notamment par le théoricien de la croissance endogène, Robert Lucas.

Enfin, le **dernier document** met en évidence la tendance au creusement des inégalités depuis le début des années 1980 dans l'ensemble des pays de l'OCDE. Toutefois, il montre aussi que les mécanismes de l'Etat social ont permis de limiter les effets de la crise de 2007-2010 sur les inégalités. Enfin, il rapporte les propositions que fait l'OCDE pour lutter contre l'accroissement des inégalités dans un contexte de crise et d'efforts d'assainissement des budgets publics.

#### .... à la problématique

Le résumé des documents permet d'aller plus loin dans l'analyse du titre afin d'éviter de le reprendre tel quel dans l'introduction. Finalement, l'ensemble documentaire aborde quatre points : le contexte historique de la formation d'un Etat social, les principaux leviers d'intervention de cet Etat social, les raisons de l'intervention dans certains domaines comme l'éducation et la santé qui pourraient *a priori* être des biens de marché, et enfin, l'efficacité de l'action de l'Etat social dans la correction des inégalités.

Le titre de l'ensemble documentaire aurait donc pu être : « la pertinence des moyens mis en œuvre par l'Etat pour corriger les inégalités de niveau de vie » et le problème soulevé pouvait être exprimé de cette façon : Qu'est-ce qui justifie les moyens importants mobilisés par l'Etat au cours du xx<sup>e</sup> siècle pour corriger les inégalités de niveau de vie ?

### L'ensemble documentaire dans le programme

L'ensemble documentaire portait à titre principal sur le module III la justification des politiques économiques du programme et plus particulièrement le point 2, l'intervention des autorités publiques dans la redistribution des richesses. Toutefois, une bonne compréhension de l'ensemble documentaire nécessitait la maîtrise de notions étudiées dans d'autres parties du programme : la conception de Sen du développement économique ou les objectifs du Millénaire pour 2015 relevaient par exemple du module IV les conditions des finalités de la croissance, plus particulièrement le point 4, la croissance et le développement économique, tandis que les notions d'externalité et le rôle du capital humain dans la croissance sont étudiés respectivement avec le premier module, les fondements de l'économie de marché et le second, les conditions et les finalités de la croissance. Il est important de souligner que les synthèses croisent des notions étudiées à plusieurs moments de la préparation menée sur deux ans. Elle est donc une épreuve de mesure de la culture générale globale du candidat.

#### Les points du programme abordés :

##### **A titre principal**

##### **Module III La justification des politiques économiques**

3.2 L'intervention des autorités publiques dans la redistribution des richesses

3.2.1 La protection sociale : objectifs, résultats

3.2.2 La correction des inégalités

##### **A titre complémentaire**

##### **Module I Les fondements de l'économie de marché**

1.2 Le fonctionnement de l'économie de marché

1.2.4 Les déficiences de marché

##### **Module 2 Les conditions et les finalités de la croissance**

2.2 L'analyse des déterminants de la croissance

2.2.3 Les déterminants de la croissance

2.4 Les finalités de la croissance

2.4.1 La croissance et le développement économique

#### Les critères généraux d'évaluation d'une synthèse de documents économiques

- Le respect de trois exigences fondamentales énoncées dans le règlement de l'épreuve
- La note de synthèse ne doit pas dépasser le nombre de mots indiqués dans la consigne, 500 mots à 10 % près en plus ou en moins. Il est obligatoire d'indiquer le nombre de mots approximativement utilisés au début ou à la fin de sa note de synthèse. Si le jury n'exige pas un décompte aussi précis qu'en contraction de texte, il sanctionne lourdement les dépassements qui dénaturent l'exercice.
- L'objectivité et la neutralité du propos (la synthèse n'est pas une dissertation qui cherche à convaincre d'une position personnelle) : le candidat exprime ex-

clusivement les idées présentes dans l'ensemble documentaire. Il convient donc de résister absolument à la tentation d'ajouter des arguments ou des exemples qui auront pu être étudiés par ailleurs. Par ailleurs, l'emploi du « je » ou du « nous » notamment pour annoncer le plan de sa note est interdit, car l'exercice de la synthèse est impersonnel ;

- **La reformulation personnelle des idées et arguments relevés (la synthèse n'est pas un résumé)** : le candidat ne peut se contenter de reprendre des morceaux de phrase des textes sous la forme d'un « copier-coller » plus ou moins adroit. Par ailleurs, il ne saurait se contenter d'exprimer les idées dans l'ordre des documents. Il convient de sélectionner les idées principales, de les reformuler sans commettre de contre sens et de les redistribuer dans un plan logique.

• **Les compétences principales attendues d'une bonne copie :**

- Le respect de règles (peu nombreuses) de l'exercice (une introduction centrée sur l'identification du thème principal abordé, un plan bien annoncé, un développement clairement structuré en deux ou trois parties, une rapide conclusion sans répétition ni ouverture) ;
- Un recensement exact et une reformulation pertinente des idées de l'ensemble documentaire permettent d'évaluer la bonne compréhension des textes à travers l'absence d'oublis majeurs, l'absence de contresens ou de faux-sens et enfin l'emploi d'un vocabulaire adapté ;
- La production d'un agencement personnel et hiérarchisé des idées dans un plan cohérent. La note de synthèse doit avoir du sens pour constituer un compte rendu efficace de l'ensemble documentaire ;
- Une expression écrite soignée, tant du point de vue du respect des règles de grammaire et d'orthographe que de la syntaxe.

• **Ces compétences sont évaluées à partir de certaines capacités :**

- La capacité à analyser le titre pour cerner efficacement l'objet de la note ;
- La capacité à identifier avec exactitude les idées principales du corpus documentaire ;
- La capacité à hiérarchiser les idées en ne mettant donc pas sur le même plan celles qui sont essentielles et celles plus accessoires ;
- La capacité à reformuler sans paraphrase les idées identifiées, notamment par un usage approprié du vocabulaire économique ;
- La capacité à organiser et à relier l'ensemble des idées de façon cohérente ;
- La capacité à proposer un plan cohérent, clairement annoncé de façon impersonnelle.

### Le recensement des idées de l'ensemble documentaire

Il doit être clair que vous ne disposez pas du temps nécessaire pour produire un recensement totalement rédigé des idées principales de l'ensemble documentaire tel qu'il est proposé dans ce corrigé. Mais, ce recensement vous sera utile pour vous entraîner et comparer votre propre travail avec celui-ci.

Vos différents entraînements (en devoir, en colle d'économie) vous ont permis de tester la méthode qui peut vous convenir le mieux : prise de note, confection d'un tableau par thématique, système de renvoi numéroté aux textes, surlignement efficace et usage d'un jeu de couleurs, etc. Chacun doit, dans tous les cas, trouver sa méthode et s'y tenir pour accroître les effets d'expérience.

Pour ce corrigé, nous avons relevé et reformulé les idées principales de chaque document en nous laissant guider par notre analyse préalable du titre.

**DOCUMENT 1 :****Le développement d'un Etat social au xx<sup>e</sup> siècle**

*Idée 1* : Une trajectoire commune à l'ensemble des pays développés : la progression de la part du revenu national consacrée aux impôts et à la dépense publique d'un facteur 4 à 5 selon les pays sur la période 1920-1980.

*Idée 2* : Cette progression du poids de l'Etat dans l'économie s'explique principalement par la prise en charge des dépenses sociales qui représentent entre 25 % et un 35 % du revenu national selon les pays, principalement sous la forme de transferts en nature (dépenses publiques d'éducation et de santé) et de transferts en espèces sous la forme de prestations sociales diverses.

**DOCUMENT 2 :****La redistribution en France**

*Idée 1* : Les deux instruments de lutte contre les inégalités sont analysés à travers le cas français. Le système socio-fiscal permet de réduire les inégalités de niveau de vie, tandis que la socialisation par l'Etat des dépenses d'éducation et de santé contribue au niveau de vie de tous et particulièrement des plus pauvres qui en seraient évincés s'ils devaient payer un prix de marché.

*Idée 2* : Le système socio fiscal contribue à réduire les inégalités de revenu qui autrement seraient de l'ordre de 1 à 12 entre les 10 % des plus riches et les 10 % les plus pauvres.

*Idée 3* : Le rôle des prestations sociales dans la réduction des inégalités dépend de deux facteurs, leur progressivité d'une part et leur poids dans le revenu disponible des ménages. Plus la prestation est conditionnée au niveau de revenu et plus elle est importante dans le revenu des ménages considérés et plus son impact redistributif est fort. Concrètement, trois prestations expliquent à elles seules près des 2/3 de la correction des inégalités. Il s'agit des prestations familiales à hauteur de 26 %, des aides au logement, pour 19 % et enfin des minima sociaux pour 17 %.

**DOCUMENT 3 :****L'intervention publique dans la santé et l'éducation**

Sont développés les deux principaux arguments en faveur de la correction des inégalités par l'accès de tous à l'éducation et à la santé.

*Idée 1* : Un argument de justice sociale : pour Amartya Sen, l'éducation et la santé sont deux « capacités » qui permettent un accès au développement humain pour tous. Sa conception du développement humain est à l'origine de la construction de l'indicateur de développement humain par le PNUD en 1990.

*Idée 2* : Un argument en terme d'efficacité économique : l'éducation et la santé ne sont pas des biens comme les autres que le marché pourrait produire de façon optimale. La consommation de services de santé et d'éducation produit des exter-

nalités positives que le marché ne prend pas en compte dans le système des prix. Or, un investissement insuffisant de la part des agents dans ces deux types de services a pour conséquence de pénaliser la productivité des travailleurs et la croissance à long terme.

**Idée 3 :** La Banque mondiale s'est inspirée de ces arguments pour insérer l'accès à l'instruction et à la santé dans ces objectifs du Millénaire pour 2015. Les progrès constatés sont réels, mais les objectifs n'ont pas tous été atteints.

**Idée 4 :** Les droits à l'éducation et à la santé ne doivent pas demeurer abstraits. Pour les mettre en application, il convient de tester les différentes options possibles pour les concrétiser afin de sélectionner les plus efficaces.

## DOCUMENT 4 :

### Les inégalités de revenus dans les pays de l'OCDE entre 2007 et 2010

**Idée 1 :** Dans un contexte d'accroissement des inégalités de revenu depuis les années 1980, l'Etat social a contribué à limiter le creusement des inégalités induit par la crise de 2007-2010 (d'un tiers en moyenne dans les pays de l'OCDE, et de 40 % pour la France, pays où l'Etat social est très développé).

**Idée 2 :** Il existe toutefois une inquiétude quant à la possibilité des Etats de poursuivre leurs efforts si la crise dure : d'une part, parce que des personnes arrivent en fin de droits et d'autre part parce que les gouvernements réduisent leurs dépenses pour assainir les comptes publics.

**Idée 3 :** L'OCDE recommande plusieurs axes pour lutter contre les inégalités : favoriser l'accès à l'emploi, accroître les investissements publics en éducation, formation professionnelle et santé, réformer la fiscalité pour la rendre plus juste.

## NOTE DE SYNTHÈSE PROPOSÉE EN 548 MOTS

### Introduction, rappel de méthode

Courte et précise, l'introduction a deux fonctions essentielles. Elle énonce d'abord avec précision le problème central soulevé dans l'ensemble documentaire, puis elle propose au lecteur un guide clair du plan de la note. L'introduction débute par une entrée en matière qui reprend une idée, un exemple, une donnée chiffrée en lien avec le problème abordé par l'ensemble documentaire.

### Proposition rédigée

La part des prélèvements obligatoires dans la richesse nationale des pays riches a progressé d'un facteur 4 à 5 entre les années 1920 et le début des années 1980. Une telle évolution s'explique par la priorité donnée à la correction des inégalités de revenu à cette époque.

Qu'est-ce qui justifie la constitution de l'Etat social au xx<sup>e</sup> siècle ?

L'Etat mobilise des moyens avec une certaine efficacité (Partie I) et son intervention est justifiée par la théorie économique et le contexte de crise (Partie II).

### **Le développement, rappel de méthode**

Le lecteur doit repérer aisément le plan choisi lorsqu'il découvrira votre note de synthèse. Il convient donc de l'organiser en deux ou trois parties clairement annoncées par une phrase courte. Le plan proposé correspond à un réagencement ordonné des idées qui permet de rendre compte avec exactitude de l'ensemble documentaire. Il est important que votre note de synthèse soit porteuse de sens.

### **Proposition rédigée**

#### **I. L'efficacité des moyens mobilisés par l'Etat social**

##### **A/ Les moyens mobilisés par les Etats**

Les Etats n'interviennent pas tous dans le social au même niveau : là où certains y consacrent jusqu'à 35 % de leur revenu national comme en France par exemple, d'autres se limitent à 25 %. Mais tous visent à corriger les inégalités de niveau de vie par la redistribution des revenus et la socialisation de certaines dépenses de consommation.

La redistribution permet de financer les revenus de transfert (allocations familiales, minima sociaux, allocation logement) et les services publics, principalement d'éducation et de santé.

Les pays en développement cherchent à atteindre les objectifs du Millénaire 2015.

##### **B/ L'efficacité des instruments**

En France, la redistribution des revenus réduit les inégalités de revenu qui, autrement seraient de l'ordre de 1 à 12 entre les 10 % des plus riches et les 10 % les plus pauvres.

L'impact des prestations sociales dans la réduction des inégalités dépend de leur progressivité et de leur poids dans le revenu disponible. Plus la prestation est ciblée sur les revenus des plus pauvres, plus elle représente une part élevée du revenu des ménages et plus son impact redistributif est fort. Concrètement, les prestations familiales, les aides au logement et les minima sociaux contribuent pour près des 2/3 au total de la correction des inégalités.

#### **II. La justification des interventions de l'Etat dans le social**

##### **A/ La responsabilité de l'Etat dans l'éducation et la santé**

Pour Amartya Sen l'accès à l'éducation et à la santé représente des « capacités » essentielles au développement de la vie humaine. Pour des raisons de justice sociale, l'Etat ne peut s'en désintéresser. En s'inspirant de ses travaux le PNUD a construit l'IDH dont les indicateurs de santé et d'éducation représentent les 3/4 de l'indice.

Des économistes, comme Robert Lucas ou Gary Becker, mettent en avant les externalités positives engendrées par l'investissement en capital humain et soin de santé. En corrigeant cette défaillance de marché, l'Etat permet d'atteindre une croissance plus forte.

##### **B/ Des interventions justifiées par le contexte de crise**

La crise de 2008 a eu pour conséquence d'augmenter l'écart de revenus moyens entre les 10 % les plus riches et les 10 % les plus pauvres, passé de l'ordre 9 à 9,5. Cependant, l'Etat providence a permis d'amortir le choc pour les plus pauvres. Le système socio fiscal a resserré les inégalités spontanées d'un tiers en moyenne dans les pays de l'OCDE et de plus de 40 % en France.

Toutefois, depuis le début des années 1980, les inégalités s'aggravent de nouveau. C'est pourquoi, l'OCDE recommande de renforcer la lutte contre les inégalités par une fiscalité plus efficace et progressive, une politique d'accès à des emplois de qualité et une formation renforcée.

### **Conclure, rappel de méthode**

La conclusion de la note de synthèse doit être courte. Il n'est pas question, comme dans une dissertation, de faire le résumé des idées énoncées dans le développement ou bien encore de chercher à ouvrir des perspectives. Une bonne conclusion ne dépasse pas deux ou trois lignes et consiste à répondre, dans l'esprit de l'ensemble documentaire, au problème posé. Il peut être adroit d'utiliser une idée importante qui n'aura pas eu sa place dans le développement.

### **Proposition rédigée**

Avec la poursuite de la crise, les politiques de rigueur mettent en péril l'objectif de correction des inégalités.

# ÉCONOMIE

**DURÉE : 2 HEURES 30.**

*Il est recommandé de ne pas dépasser 10 pages.*

*Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*

*Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.*

## SUJET

### PREMIÈRE PARTIE : NOTE DE SYNTHÈSE

A partir du dossier documentaire suivant, vous ferez une note de synthèse de 500 mots environ (à plus ou moins 10 %) sur **le phénomène des NEET en France**.

#### Composition du dossier documentaire :

- **Document 1** : Des personnes qui ne sont jamais entrées sur le marché du travail, en particulier des jeunes qui ne sont durablement ni en emploi ni en formation (« NEET »), L'éloignement durable du marché du travail, Conseil d'orientation pour l'emploi, Octobre 2014
- **Document 2** : Des axes de sortie du groupe des NEET, Les jeunes et les NEET en Europe : premiers résultats, Fondation européenne pour l'amélioration des conditions de travail, 2013
- **Document 3** : Créer un RSA jeune activé, L'emploi des jeunes peu qualifiés en France, Les notes du Conseil d'analyse économique, avril 2013
- **Document 4** : Un jeune sur six est un NEET, Statistiques de l'OCDE, 2013
- **Document 5** : Le faible taux d'emploi des jeunes, Statistiques du marché du travail de l'OCDE, OCDE, 2013

**Dossier documentaire :**

#### DOCUMENT 1 :

**Des personnes qui ne sont jamais entrées sur le marché du travail, en particulier des jeunes qui ne sont durablement ni en emploi ni en formation (« NEET »)**

Un sous-ensemble dans les personnes durablement éloignées du marché du travail comprend les personnes qui n'ont jamais travaillé, que ce soit par choix ou en raison d'un défaut d'accès au marché du travail. Cela concerne les jeunes qui n'accèdent pas à l'emploi dans les mois, voire les années, qui suivent leur sortie du système scolaire.

Un concept de plus en plus utilisé pour identifier ces jeunes qui restent à la fois en dehors de tout système de formation et du marché du travail, et qui peuvent

donc être à la fois chômeurs ou inactifs, est celui des « jeunes ni en emploi ni en formation » (« NEET » en anglais, « *Not in Employment, Education or Training* »). La part des « NEET », qui rapporte le nombre de jeunes qui ne sont ni en emploi ni en formation à l'ensemble des jeunes, est utilisée depuis 2010 par la Commission européenne comme un indicateur d'insertion des jeunes sur le marché du travail. D'après un travail du Conseil d'analyse économique (CAE) sur l'emploi des jeunes peu qualifiés en France, près de 1,9 million de jeunes de 15 à 29 ans n'étaient ni en emploi ni en formation début 2013, soit 17 % de cette classe d'âge. Cette proportion était de 15 % en moyenne entre 2002 et 2010. 85 % de ces jeunes ont obtenu au mieux un diplôme du second cycle du secondaire et 42 % sont au mieux titulaire du BEPC. Début 2013, toujours d'après le travail mené par le CAE, au sein de la population des « NEET », 53 % étaient au chômage et 47 % étaient inactifs au sens du BIT.

Parmi les 1,9 million de jeunes de 15 à 29 ans ni en emploi ni en formation début 2013, tous ne sont pas durablement éloignés du marché du travail. Si les jeunes peu diplômés et en situation de vulnérabilité sur le marché du travail sont surreprésentés au sein de cette catégorie, les « NEET » ne constituent toutefois pas un groupe homogène.

Derrière cette notion se trouvent des trajectoires scolaires et professionnelles qui peuvent être très différentes. Parmi ces jeunes, on peut distinguer trois grandes catégories :

- la première regroupe les jeunes, ayant achevé leur formation, se trouvant sans emploi pendant une courte période. C'est notamment le cas de jeunes qui sortent tout juste de leur formation initiale sans avoir encore commencé à chercher du travail ou de jeunes qui sont en transition entre deux emplois ;
- la deuxième correspond à des jeunes qui alternent fréquemment emploi temporaire, chômage ou inactivité sans parvenir à trouver un emploi stable ;
- la troisième, la plus préoccupante, concerne les jeunes qui restent sans emploi, ni formation initiale ou continue de façon durable.

Dans certaines publications, les « NEET » sont différenciés entre ceux au chômage de courte durée, au chômage de longue durée et ceux qui sont inactifs (ils ne suivent aucune formation mais ne cherchent pas pour autant un travail). En 2008, les « NEET » inactifs de 15 à 29 ans représentaient de l'ordre de 44 % du total des jeunes ni en emploi ni en formation en France. La proportion de « NEET » en situation de chômage de longue durée était de 15 %, soit environ 159 000 jeunes. Au total, selon la définition retenue de l'éloignement durable du marché du travail, ce nombre de 159 000 « NEET » au chômage de longue durée constitue un minortant des jeunes durablement ni en emploi ni en formation, auquel il conviendrait d'ajouter les jeunes inactifs de façon prolongée mais qui souhaiteraient travailler. En mobilisant les données de l'enquête Emploi, il y avait, en 2013, 663 000 jeunes de 15 à 29 ans qui n'avaient pas eu d'emploi régulier depuis un an ou plus et souhaitaient travailler et 394 200 dans cette situation depuis deux ans ou plus.

Source : L'éloignement durable du marché du travail, Conseil d'orientation pour l'emploi, Octobre 2014.

## DOCUMENT 2 :

### Des axes de sortie du groupe des NEET

Face à une évolution du marché de l'emploi de moins en moins favorable pour les jeunes, les États membres de l'Union européenne (UE) se sont activement efforcés,

ces dernières années, de concevoir et de mettre en œuvre des mesures politiques destinées à accroître l'employabilité des jeunes et à promouvoir leur participation au marché de l'emploi. Ces initiatives peuvent être subdivisées en trois grandes catégories: mesures liées à l'enseignement, mesures liées à l'emploi et mesures destinées à faciliter le passage de l'école à l'emploi.

### **Actions dans le domaine de l'enseignement**

L'éducation a toujours été un élément crucial des politiques en faveur de l'emploi des jeunes. En effet, il est avéré que l'élévation du niveau d'éducation de la population contribue à la croissance à plus long terme des pays concernés. Les politiques menées dans ce domaine intègrent des mesures destinées à prévenir le décrochage scolaire et d'autres visant à réintégrer les jeunes en rupture scolaire dans le système d'enseignement ou de formation. Étant donné que ramener en dessous de la barre des 10 % la part des jeunes en rupture scolaire constitue l'un des cinq grands objectifs poursuivis au sein de l'Union européenne, il est communément admis que le relèvement de l'âge de scolarité obligatoire peut concourir à prévenir le décrochage scolaire. Les pays de l'UE ont d'ailleurs presque tous mis en œuvre des mesures dans ce sens. De plus, de nombreux pays ont prévu des financements supplémentaires en faveur de classes de soutien, dont l'objectif est d'aider les étudiants à améliorer leurs performances scolaires. Au Luxembourg, le système des *classes mosaïques* permet aux établissements de sortir temporairement de leur classe habituelle les élèves en passe de décrocher de l'école pour les placer, l'espace de 6 à 12 semaines, dans une classe mosaïque, au sein de laquelle ils bénéficient d'un soutien individualisé. Dans certains pays où, comme en Bulgarie et en Roumanie, le décrochage scolaire est associé à la précarité matérielle, l'État a mis en place des programmes d'assistance scolaire (fourniture gratuite de collations, manuels, services de transport, etc.). En outre, nombre d'États membres soucieux d'encourager les jeunes à ne pas quitter le système éducatif ont augmenté le nombre des places disponibles dans la formation professionnelle et créé de nouveaux programmes de formation professionnelle.

Dans le cas des élèves en décrochage scolaire, de nombreux pays ont mis en place des initiatives visant à leur donner la possibilité de réintégrer le système éducatif, le plus souvent en combinaison avec une formation pratique. En France, par exemple, les écoles de la « seconde chance » proposent aux jeunes âgés de 18 à 25 ans une formation à des compétences de base pour une période de 9 à 12 mois.

Quant aux programmes de qualification professionnelle initiale suivis par l'Espagne, ils donnent aux jeunes en décrochage scolaire la possibilité de prendre part à des formations visant à acquérir un diplôme d'aptitude professionnelle ou d'enseignement secondaire obligatoire, tout en leur permettant de suivre par la suite une formation professionnelle traditionnelle.

### **Transition de l'école au travail**

Une fois les étudiants dotés des aptitudes et compétences nécessaires, des initiatives politiques existent pour faciliter leur intégration au marché de l'emploi. Dans la plupart des pays de l'UE, une approche combinée et coordonnée – associant communication d'informations et orientation professionnelle, tutorat, aide à la recherche d'emploi et services d'adéquation professionnelle – paraît constituer l'ensemble de mesures le plus utile pour assurer une transition sans heurts entre l'école et le travail. Au Royaume-Uni par exemple, le programme *Flexible New Deal* propose aux jeunes allocataires sociaux une approche sur mesure, conjuguant conseils et orientation personnalisés, élaboration d'un plan d'action et expérience professionnelle. Les mesures porteuses d'expérience professionnelle, que sont par

exemple les stages pratiques et autres apprentissages, exercent un effet très positif sur l'employabilité. Les stages pratiques font l'objet d'une offre très large dans l'ensemble des États membres. Dans certains pays, ils peuvent impliquer le secteur privé – c'est par exemple le cas du programme *Young Potentials* mis en place par la Suède – ou être organisés par les partenaires sociaux, comme le prévoit le programme *Gradlink* suivi en Irlande.

Les programmes d'apprentissage se sont eux aussi révélés extrêmement utiles pour faciliter la transition des jeunes vers l'emploi. Durant la crise, les pays connus pour leurs programmes d'apprentissage (Autriche et Allemagne) sont ainsi parvenus à contenir le chômage des jeunes. En fait, l'ensemble des États membres ont récemment mis en œuvre des programmes d'apprentissage ou ont renforcé les programmes existants.

De plus, certains pays, soucieux de veiller à ce que tout jeune ait un travail ou soit engagé dans une activité d'éducation ou de formation, ont institué des garanties pour la jeunesse. En Finlande par exemple, tout chômeur de moins de 25 ans doit, dans un délai de trois mois à compter de son inscription auprès du service public pour l'emploi, se voir proposer un emploi, une formation ou une mesure d'activation en suivant un plan de développement personnalisé.

### Politiques d'emploi

De nombreux pays ont mis en place diverses mesures (systèmes d'exonération fiscale, subventions, réductions de coûts salariaux indirects, etc.) pour inciter les entreprises à recruter et former des jeunes, et à créer des emplois supplémentaires leur étant destinés. En Hongrie, les nouveaux arrivants sur le marché de l'emploi se voient remettre une carte « premier emploi » valable deux ans. Tout employeur qui engage le détenteur d'une telle carte bénéficie d'une réduction des cotisations sociales à sa charge. Certains pays ont mis en place des mesures spécifiques visant à encourager le recrutement de personnes handicapées ou issues de milieux défavorisés. D'autres ont adopté des mesures visant à promouvoir l'esprit d'entreprise et l'activité indépendante chez les jeunes, en proposant des services spécifiques à ceux d'entre eux qui souhaitent démarrer leur propre entreprise. Enfin, les pays ont presque tous mis en place, dans le but de lever les obstacles logistiques et pratiques à l'emploi des jeunes, des aides à la mobilité géographique et d'autres mesures axées sur les jeunes présentant des besoins spécifiques ou issus de milieux défavorisés ou immigrés.

Source : Les jeunes et les NEET en Europe : premiers résultats, Fondation européenne pour l'amélioration des conditions de travail, 2013.

## DOCUMENT 3 :

### Créer un RSA jeune activé

Pour donner de réelles perspectives aux jeunes en difficulté, il est souhaitable de coupler le renforcement de l'accompagnement et l'amélioration de son pilotage avec la possibilité de percevoir le Revenu de solidarité active, le RSA (socle et chapeau), qui offrirait une réelle opportunité de s'en sortir à ceux qui ont peu de moyens ou que le système scolaire a rejetés. En réservant le RSA aux personnes de 25 ans et plus, la France fait figure de quasi-exception au sein des pays européens. Presque partout en Europe, les jeunes ont accès à un revenu minimum de solidarité bien avant 25 ans. En France, la crainte de voir émerger une jeunesse

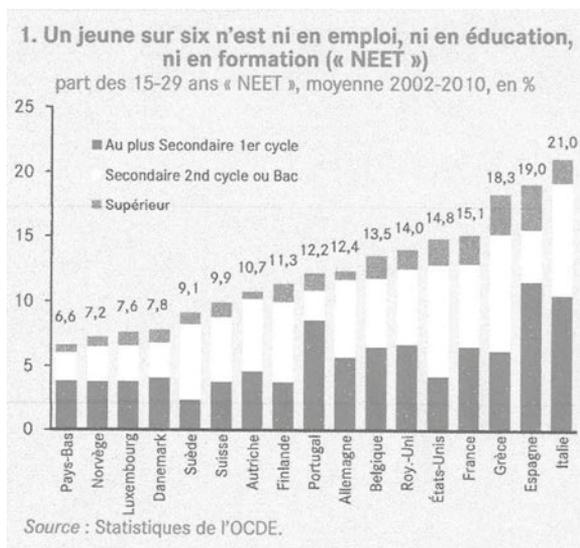
désœuvrée a empêché d'envisager sérieusement que les jeunes de moins de 25 ans puissent percevoir le RSA. La conséquence de ce système est que parmi la population des 20 % les plus pauvres, la moitié a entre 15 et 29 ans.

Pourtant, l'exemple des pays étrangers montre qu'un revenu minimum d'assistance peut être utilisé afin de faciliter non seulement l'autonomie des jeunes, mais aussi leur accès à l'emploi. C'est en « activant » véritablement le RSA que cet objectif pourra être atteint. Dans cette optique, le RSA devrait être accordé dès 18 ans, mais sa perception devrait être conditionnée à une obligation de recherche d'emploi réellement contrôlée, à un accompagnement personnalisé et, le cas échéant, à des formations qualifiantes. Pour un jeune, entrer dans le dispositif du RSA serait synonyme d'exercer une activité à *temps plein*, soit en recherchant de manière intensive un emploi, soit en se formant le temps nécessaire pour acquérir les qualifications requises dans des formations professionnelles de niveau CAP ou BEP. De la sorte, il existerait bien un filet de sécurité pour les jeunes les plus défavorisés. On cesserait d'abandonner ceux qui n'ont pas réussi dans le système scolaire ou qui n'arrivent pas à trouver un emploi.

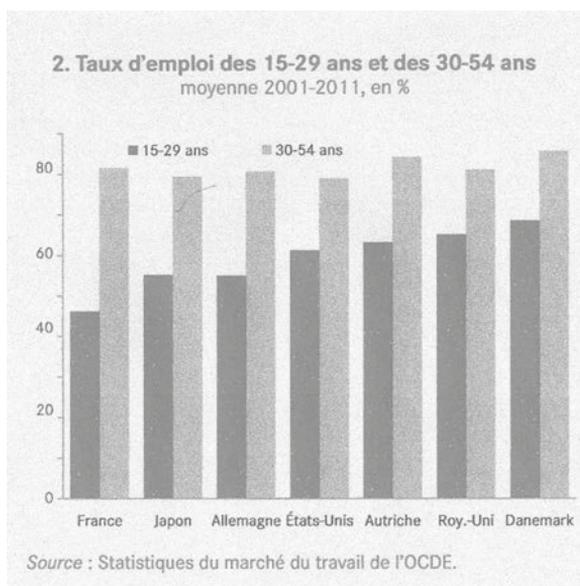
La création d'une « garantie jeunes » annoncée par le gouvernement, qui vise à inscrire 100 000 jeunes NEET en situation de pauvreté dans un parcours contractualisé d'accès à l'emploi ou à la formation, va dans ce sens. Cependant, son succès repose sur la mise en place d'un accompagnement resserré, avec des conseillers spécialisés et la possibilité d'orientation vers des formations en alternance longues et coûteuses. En effet, pour un jeune sans qualification, chercher un emploi, avec éventuellement une formation adéquate dans le cadre de l'alternance, relève souvent du parcours du combattant. Il peut être difficile de se motiver lorsqu'on a perdu confiance dans ses chances de succès et que l'on ne s'estime pas armé face aux employeurs (manque de savoir-être, difficultés à s'exprimer, timidité, etc.). Accompagner, c'est donc aussi redonner confiance et motiver à toutes les étapes de la recherche d'un emploi et/ou d'une formation : dans la préparation à la rencontre avec les entreprises et les organismes de formation, mais aussi dans l'acquisition d'un logement, d'un moyen de transport ou de documents administratifs. Dans cette optique, l'accompagnement se rapproche plus du « *coaching* » que de l'entretien individuel standard de Pôle emploi ou des Missions Locales. Ce type d'accompagnement nécessite du temps et des moyens renforcés qui doivent être ciblés sur les plus défavorisés. Il nécessite également d'exercer un véritable contrôle sur la participation des jeunes à ces programmes intensifs, avec à la clef la suspension du RSA pour ceux qui ne se donneraient pas véritablement les moyens d'y participer. Cet objectif n'est pas irréaliste, mais on en est encore loin. De ce point de vue, l'expérience passée du *contrat d'autonomie*, lancé en 2008 à petite échelle et qui reposait sur la plupart de ces principes, constitue une excellente base de départ qui mérite d'être sérieusement analysée pour savoir ce qui fonctionne et ce qui ne fonctionne pas. Le coût de cette prestation est déjà prévu par le projet à l'étude de « garantie jeune », soit environ 0,5 milliard d'euros pour 100 000 jeunes.

Source : L'emploi des jeunes peu qualifiés en France, Les notes du Conseil d'analyse économique, avril 2013.

**DOCUMENT 4 : UN JEUNE SUR SIX EST UN NEET**



**DOCUMENT 5 : LE FAIBLE TAUX D'EMPLOI DES JEUNES**



**SECONDE PARTIE : RÉFLEXION ARGUMENTÉE**

Sujet : La France est-elle condamnée à avoir durablement un taux de chômage élevé ?

## CORRIGÉ

Par Frédéric Larchevêque, professeur de chaire supérieure au Lycée Jules Michelet, à Vanves.

### PREMIÈRE PARTIE : NOTE DE SYNTHÈSE

L'ensemble documentaire fourni cette année par l'Essec comporte 4 documents, 3 textes et un graphique pour un total de 2 400 mots environ, titres et sources des documents compris. Comme les sessions précédentes, la consigne indique le thème sur lequel doit porter la note. Cette année, il s'agissait donc d'appréhender l'ensemble documentaire sous le prisme « **du phénomène des NEET en France** ».

La consigne ne doit surtout pas être négligée, car elle permet de sélectionner plus facilement les idées principales, de concevoir son introduction en identifiant plus facilement le problème posé et enfin de construire le plan de sa note. Une première lecture de l'ensemble documentaire permet toutefois de préciser le sens de la consigne.

#### L'intérêt d'une première lecture

La première lecture doit permettre de dégager les idées fondamentales sans se perdre dans les détails, les exemples, les arguments qui viennent renforcer une idée ou au contraire en démentir la pertinence. Son but est de dégager les grands axes qui pourront devenir les futurs paragraphes de la note. On décompose si possible le texte en questions de ce type : de qui parle-t-on ? Quel est l'objet principal ? Quel constat ? Quelles causes ? Quelles solutions ? etc. Il s'agit de restituer le sens global de l'ensemble documentaire et de résumer succinctement les apports de chacun des documents.

Le **premier document** définit la catégorie sociologique des jeunes de 15 à 29 ans ni en emploi ni en formation, les NEET. Chômeurs ou inactifs, ces jeunes ne parviennent pas à s'insérer durablement sur le marché du travail. Sur la base de cette définition, un dénombrement est effectué (données disponibles à relever), mais, au-delà de leur caractéristique commune d'être peu diplômé, la catégorie apparaît peu homogène. Tout d'abord, leur degré d'éloignement du marché du travail est variable (1<sup>er</sup> critère), ensuite, les NEET au chômage de longue durée ou inactif depuis au moins deux ans ne sont pas comparables aux NEET chômeurs ou inactifs pour une courte période.

Le **document 2** présente l'objectif de réduction de la population des NEET en Europe. Une attention toute particulière devait être apportée à ce paragraphe qui devait être utilisé dans le cadre français. La note impose en effet de traiter le phénomène des NEET en France. Atteindre cet objectif passe par l'amélioration de l'employabilité des jeunes et la promotion de leur insertion au marché du travail. L'employabilité implique des actions ciblées de formation destinées à lutter contre les sorties précoces de l'école sans diplômes et qualifications. Quant à leur meilleure chance d'intégration au marché de l'emploi, les solutions expérimentées vont de la création de parcours d'information, d'aide à la recherche d'emploi, le développement de l'apprentissage aux mesures visant à augmenter la demande de travailleurs jeunes et encourager la création d'entreprise.

Le **document 3** aborde le débat sur l'absence de revenu d'assistance en France pour les jeunes les plus défavorisés. L'accès au RSA est en effet refusé aux jeunes

de moins de 25 ans, officiellement pour ne pas créer une incitation à l'inactivité. Pourtant, les expériences menées dans certains pays étrangers montrent que ce système pourrait avoir des vertus en matière d'accès à l'emploi à la condition d'être activé pour en faire une activité à plein-temps pour le jeune concerné. Le gouvernement est à l'initiative d'une expérience menée à petite échelle avec la création d'une « garantie-jeunes » destinée aux jeunes les plus précaires. Toutefois, sa réussite nécessite des mesures d'accompagnement importantes et des moyens matériels (0,5 milliard d'euros) et humains.

**Les graphiques des documents 4 et 5** rendent compte des difficultés rencontrées particulièrement par les jeunes français à s'insérer sur le marché du travail à l'aide de deux indicateurs complémentaires : le taux de NEET et le taux d'emploi.

### L'ensemble documentaire dans le programme

L'ensemble documentaire était en apparence simple, mais ce n'est qu'une apparence. En effet, s'il ne nécessitait pas la maîtrise de références théoriques (aucun auteur, aucun mécanisme économique utilisé), il portait sur un concept, les NEET, encore peu utilisé dans la littérature économique et qui n'aura donc très probablement pas été étudié en tant que tel au cours des deux années de préparation. Toutefois, la maîtrise du concept était indirecte et passait par une bonne connaissance des lignes de partage entre l'emploi, l'inactivité et le chômage.

De fait, les notions nécessaires à la lecture sans contre sens de l'ensemble documentaire s'intègrent au programme dans le cadre du module I, les fondements de l'économie de marché qui prévoit l'étude du marché du travail et du module III La justification des politiques économiques et plus particulièrement les points 2 La protection sociale : objectifs, résultats et 3 Le chômage et la politique de l'emploi.

### Module I Les fondements de l'économie de marché

1.3 Un exemple de marché : le marché du travail

1.3.2 Equilibre et déséquilibre du marché du travail

### Module III La justification des politiques économiques

3.2 L'intervention des autorités publiques dans la redistribution des richesses

3.2.1 La protection sociale : objectifs, résultats

3.3 L'intervention des autorités publiques dans la régulation

3.3.2 Le chômage et la politique de l'emploi

### Le recensement des idées principales

Le recensement des idées principales de l'ensemble documentaire constitue la base du travail préparatoire. Sa qualité dépend, d'une part de votre capacité à distinguer les idées principales des idées plus accessoires et d'autre part de votre capacité à les reformuler de façon personnelle sans faire de contresens, et sans jugement de valeur.

Vos différents entraînements (en devoir, en colle) vous ont permis de tester la méthode qui peut vous convenir le mieux pour effectuer rapidement ce recensement : prise de note document par document, confection d'un tableau par grandes questions thématiques identifiées, système de renvoi numéroté aux textes, etc. Il n'existe pas une seule méthode, une seule façon de faire. Le but des entraînements est de vous aider à trouver celle qui vous convient le mieux et vous permet de travailler rapidement.

Nous proposons ici un recensement systématique des idées telles qu'elles apparaissent dans chaque document en approfondissant notre première lecture et en nous appuyant sur l'apport de la consigne : « le phénomène des NEET en France ».

## DOCUMENT 1 :

---

**Des personnes qui ne sont jamais entrées sur le marché du travail, en particulier des jeunes qui ne sont durablement ni en emploi ni en formation (« NEET »)**

**Idée 1 :** Le concept de NEET désigne les personnes ni en emploi ni en formation. Il est ici appliqué à la population des jeunes de 15-29 ans et sert d'indicateur d'insertion sur le marché du travail.

**Idée 2 :** Le concept permet un dénombrement de la population concernée. Début 2013, on dénombrait 1,9 millions de NEET en France, soit 17 % du total des jeunes de la classe d'âge avec une évolution à la hausse de 2 points par rapport à la moyenne 2002-2010.

**Idée 3 :** Les jeunes NEET ont en commun un manque de formation scolaire : 85 % d'entre eux ont atteint le niveau IV (niveau Bac) et 45 % ont au mieux atteint un diplôme du niveau V (BEPC).

**Idée 4 :** Mais, les NEET ne constituent pas pour autant un groupe social homogène. Deux critères sont employés pour les identifier plus finement. Selon leur degré d'éloignement du marché du travail, trois sous-groupes se dégagent avec une situation particulièrement difficile pour les NEET qui cumulent le manque de formation et d'être sans emploi depuis longtemps. C'est ce dernier sous-groupe que l'on peut identifier lorsque l'on classe les NEET qui souhaitent travailler selon leur ancienneté au chômage et dans l'inactivité. 44 % des jeunes de 15-29 ans étaient inactifs et 15 % étaient chômeur de longue durée, pour un total de près d'un million de jeunes.

## DOCUMENT 2 :

---

**Des axes de sortie du groupe des NEET**

L'Union européenne se donne comme objectifs d'accroître l'employabilité des jeunes et de promouvoir leur participation au marché du travail.

**Idée 1 :** Pour le premier objectif, il s'agit de réformer le système d'enseignement pour prévenir le décrochage scolaire et réintégrer les jeunes en rupture scolaire dans un dispositif adapté de formation qualifiante. Des mesures variées sont recommandées ou expérimentées par certains pays : relèvement de l'âge de la scolarité obligatoire, création de classes de soutien individualisé (Luxembourg), distribution d'une aide matérielle aux enfants de familles pauvres (Bulgarie, Roumanie), extension de la filière professionnelle, et enfin création de l'école de la seconde chance comme en France.

**Idée 2 :** Pour faciliter l'insertion professionnelle des jeunes NEET, il s'agit d'abord de prendre des mesures destinées à faciliter le passage de l'école à l'emploi comme par exemple le système britannique de communication d'informations sur l'orientation, la multiplication des stages pratiques, l'apprentissage comme en Suède ou en Allemagne, etc.

Il convient aussi de prendre des mesures d'incitations fiscales à l'embauche ou à la création d'entreprise.

**DOCUMENT 3 :****Créer un RSA jeune activé**

**Idée 1 :** La France est l'un des rares pays de l'Union qui laisse sans revenu d'assistance les jeunes de 15 à 24 ans. En effet, le RSA est réservé aux plus de 25 ans au nom de l'argument du risque de désincitation au travail.

Mais, ce choix à peu près unique en Europe a pour effet que les jeunes de 15-29 ans représentent la moitié du quintile de la population (20 %) la plus pauvre.

**Idée 2 :** Pourtant, la démonstration a été faite dans plusieurs pays que le RSA jeune peut être un bon instrument pour favoriser l'accès à l'emploi et l'autonomie à condition toutefois d'être combiné à une recherche d'emploi effective et à un accompagnement personnalisé vers une formation qualifiante. Percevoir le RSA-jeune devrait être une activité à plein-temps.

**Idée 3 :** Le gouvernement annonce la création d'une « garantie jeune » destinée à créer un filet de sécurité pour 100 000 jeunes NEET parmi les plus précaires pour un coût de 500 millions d'euros. Son succès suppose de réunir des conditions matérielles (offre de formations longues en alternance), des moyens humains (conseillers spécialisés –type coach- beaucoup plus adaptés au public que les conseillers actuels de Pôle emploi) et un suivi du jeune avec des moyens de coercition pour ceux qui ne joueraient pas le jeu.

**Idée 4 :** Les NEET sont un public très particulier souvent peu motivés, découragés par leurs échecs passés, à qui il manque les compétences nécessaires pour accéder à l'emploi et convaincre un employeur.

**DOCUMENT 4 :****Un jeune sur 6 est un NEET**

Les tableaux et graphiques sont trop souvent ignorés alors qu'ils apportent souvent des informations absolument essentielles.

**Idée 1 :** Le graphique complète d'abord le dénombrement des NEET du document 1. Sur la période 2002-2010, la France compte 15,1 % de NEET soit un jeune sur six (de 15 à 29 ans) ce qui la classe tout juste derrière la Grèce, l'Espagne et l'Italie.

**Idée 2 :** Les jeunes NEET sont majoritairement des jeunes peu diplômés.

**Idée 3 :** Certains pays, notamment de l'Europe du Nord, ont de bien meilleures performances que la France ce qui suggère qu'il existe des solutions efficaces.

**DOCUMENT 5 :****Le faible taux d'emploi des jeunes**

Le taux d'emploi des jeunes de 15 à 29 ans est le nombre de jeunes de cette catégorie qui ont un emploi sur l'ensemble de la population des jeunes de cette tranche d'âge.

Le taux d'emploi des 15-29 ans est plus faible en France que dans d'autres pays de l'OCDE comme le Japon l'Allemagne ou les Etats-Unis alors que les taux d'emploi des 30-54 sont comparables, voire dans la fourchette pour la France. Cela confirme bien le problème de l'accès à l'emploi des jeunes en France.

## NOTE DE SYNTHÈSE PROPOSÉE EN 550 MOTS

Il va de soi qu'il n'existe pas un seul plan possible pour rendre compte avec exactitude de cet ensemble documentaire. Alors que le recensement des idées exige la plus stricte neutralité et objectivité, la conception du plan est par nature plus personnelle à condition qu'il soit cohérent et respectueux des idées énoncées dans l'ensemble documentaire. Il faut beaucoup de savoir faire et une grande pratique pour relier logiquement les idées relevées et donner du sens à sa note.

### Introduction rappel de méthode

Courte et précise, l'introduction a deux fonctions essentielles. Elle énonce d'abord avec précision le problème central soulevé dans l'ensemble documentaire, puis elle propose au lecteur un guide clair du plan de la note. L'introduction débute par une entrée en matière qui reprend une idée, un exemple, une donnée chiffrée en lien avec le problème abordé par l'ensemble documentaire.

### Proposition rédigée

Le taux d'emploi des jeunes français de 15 à 29 ans est, à 40 %, inférieur de 20 points à des pays comme le Danemark ou les Etats-Unis. Mais le phénomène des NEET, c'est-à-dire les jeunes de 15-29 ans ni en emploi ni en formation, illustre mieux encore les difficultés de certains jeunes à s'insérer dans la société.

Avec près d'1,9 million de NEET, soit 17 % des jeunes de 15-29 ans, la France se situe en très mauvaise position parmi les pays comparables.

Mais qui sont ces jeunes ni en emploi ni en formation ? De quels dispositifs la France pourrait-elle s'inspirer pour en réduire le nombre ?

### Le développement, rappel de méthode

Le lecteur doit repérer aisément le plan choisi lorsqu'il découvrira votre note de synthèse. Il convient donc de l'organiser en deux ou trois parties clairement annoncées par une phrase courte. Le plan proposé correspond à un réagencement ordonné des idées qui permet de rendre compte avec exactitude de l'ensemble documentaire. Il est important que votre note de synthèse soit porteuse de sens.

### Proposition rédigée

#### I. Appréhender le phénomène des jeunes NEET en France

##### A/ Les NEET partagent des traits communs

Les NEET sont des jeunes faiblement diplômés (85 % d'entre eux ont seulement le niveau bac). Souvent victimes d'un décrochage scolaire, ils manquent de confiance en eux et cumulent les handicaps en matière de savoir-être, de compétences relationnelles pour convaincre les employeurs.

Avant 25 ans, les NEET sont écartés du RSA au motif de ne pas les encourager à vivre assistés. Cette exclusion explique pourquoi les jeunes représentent la moitié des 20 % les plus pauvres de la société.

**B/ Un groupe social toutefois peu homogène**

Trois sous-groupes se dégagent selon leur éloignement plus ou moins durable de l'emploi. Le premier rassemble les jeunes qui, à peine diplômés, cherchent un emploi, un second est constitué de ceux qui passent d'un emploi précaire à un autre en alternant avec des périodes de chômage et enfin un dernier, beaucoup plus préoccupant, réunit ceux qui, démunis d'une formation initiale complète, ne sont ni en formation ni en emploi. Il est possible de classer les NEET selon leur ancienneté au chômage et dans l'inactivité. 44 % des NEET étaient inactifs et 15 % chômeurs de longue durée, soit près d'un million de jeunes.

**II. Des solutions pour l'insertion des NEET****A/ Des solutions pour améliorer leur employabilité**

L'Union européenne soutient les dispositifs pour prévenir le décrochage scolaire et réintégrer les jeunes en rupture scolaire dans un dispositif adapté de formation qualifiante. Si certains pays optent pour la création de classes de soutien individualisé (Luxembourg) ou la distribution d'une aide matérielle aux enfants de familles pauvres (Bulgarie, Roumanie), d'autres développent leur filière professionnelle. La France a créé l'école de la seconde chance.

**B/ Des solutions pour promouvoir l'accès au marché du travail**

L'objectif de l'UE est de faciliter le passage de l'école à l'emploi. Cela passe par exemple par une meilleure communication d'informations sur l'orientation (RU), la multiplication des stages, le développement de l'apprentissage comme en Allemagne, ou le versement de subventions à l'embauche. Si plusieurs pays de l'UE ont mis en place un RSA-jeune avec de bons résultats en termes d'accès à l'emploi, le gouvernement français a annoncé la création d'une « garantie jeune » destinée à créer un filet de sécurité pour 100 000 jeunes NEET parmi les plus précaires pour un coût de 500 millions d'euros. Comme pour le RSA-jeune, son succès suppose la mobilisation de moyens humains importants pour assurer un suivi personnalisé et de moyens de coercition pour ceux qui ne joueraient pas le jeu.

**Conclusion, rappel de méthode**

La conclusion de la note de synthèse doit être courte. Il n'est pas question, comme dans une dissertation, de faire le résumé des idées énoncées dans le développement ou bien encore de chercher à ouvrir des perspectives. Une bonne conclusion ne dépasse pas deux ou trois lignes et consiste à répondre, dans l'esprit de l'ensemble documentaire, au problème posé. Il peut être adroit d'utiliser une idée importante qui n'aura pas eu sa place dans le développement.

**Proposition rédigée**

Réduire le taux de NEET en France représente un enjeu économique, car la croissance dépend du niveau de formation et de qualification de la population.

## SECONDE PARTIE : RÉFLEXION ARGUMENTÉE

**Sujet :** La France est-elle condamnée à avoir durablement un taux de chômage élevé ?

### • Le sujet de réflexion argumentée dans le programme

Le sujet de réflexion argumentée de la session 2015 était particulièrement difficile cette année pour plusieurs raisons combinées. Sa formulation en fait d'abord un véritable sujet de dissertation d'analyse économique alors que le temps pour le traiter est très – trop – court. Une réflexion s'impose sur le format des sujets proposés. Sa complexité vient ensuite de la grande richesse des arguments factuels et théoriques à mobiliser pour véritablement le traiter. Enfin, il invite à mener une analyse prospective, par nature très aléatoire et risquée.

En tous les cas, il nécessitait une maîtrise des connaissances relatives à deux modules du programme.

### - Les connaissances utiles du module 1 : « les fondements de l'économie de marché »

Dans son point 3, ce module présente le marché du travail comme exemple de marché Il comporte l'étude des déterminants de l'offre et de la demande de travail, l'analyse des flux d'entrée et de sortie sur le marché du travail, le rôle des salaires dans l'équilibre ou le déséquilibre de ce marché.

### - Les connaissances utiles du module 1 : « La justification des politiques économiques »

Son point 3 consacré à l'intervention des autorités publiques dans la régulation de l'économie comprend l'étude du chômage et de la politique de l'emploi. C'est ce point du programme qui se trouvait au cœur du sujet proposé.

### • Le sujet dans l'actualité économique

C'est une constante maintenant, le sujet de réflexion argumentée est connexe à la note de synthèse et s'inscrit dans une actualité riche. Est connexe un phénomène qui entretient des liens étroits, voire se trouve dans une relation de dépendance avec un autre phénomène ou événement. De fait, le phénomène des NEET sur lequel portait la note de synthèse est en lien avec la question du chômage élevé en France. Mais si le phénomène des NEET s'inscrit effectivement dans les nombreuses thématiques de l'emploi et du chômage, le sujet de réflexion argumentée était beaucoup plus large et avait une portée générale. Il était donc hors de question de prétendre traiter la question de réflexion argumentée avec les informations de la note de synthèse. Outre la maîtrise des notions et de certaines théories économiques, le traitement de la question de réflexion nécessite la connaissance des événements principaux liés au sujet. C'est important pour préciser dans quel contexte la question se pose et pour sa réflexion de faits (données chiffrées, dispositifs législatifs nouveaux, etc.).

### - Les notions et théories qu'il était possible de mobiliser :

La notion de chômage, les modes de dénombrement des chômeurs (BIT, Pôle emploi), les notions d'emploi et d'activité, les composantes du chômage, conjoncturel, frictionnel et structurel, les explications du chômage structurel ou d'équilibre, la courbe de Beveridge, les modèles d'appariement sur le marché du travail, les politiques actives et passives de l'emploi, les actions de modernisation du marché du travail, etc.

### - Les éléments de contexte :

Les chiffres du chômage en France (données de l'Insee et de Pôle emploi), l'histoire du chômage de masse en France, les signes de dysfonctionnements du marché du

travail (sous emploi, dualisme du marché du travail, chômage de longue durée), les mesures de politique de l'emploi mises en œuvre depuis 30 ans et particulièrement dans la période récente.

• **L'analyse du libellé du sujet**

C'est le préalable indispensable à un travail efficace de mobilisation des connaissances et de justification du plan choisi. Comme vous disposez de peu de temps, il convient d'identifier rapidement les termes ou expressions clés du sujet, puis de travailler rapidement sur leurs relations logiques qui peuvent être par exemple de complémentarité, d'opposition ou de causalité.

Dans le cas présent, le libellé du sujet était formulé sous la forme d'une question. Cela a plusieurs implications importantes du point de vue méthodologique :

- **Toute question attend une réponse** : votre travail doit être tendu vers cet objectif, proposer une réponse, certes argumentée, parfois prudente et nuancée, mais en tous les cas, une réponse.

- **Ne pas confondre le libellé du sujet et l'expression de la problématique** : la question posée n'est pas la problématique. Ce serait une erreur de la reprendre telle quelle sans analyse préalable des termes du sujet et de leur relation car la formulation utilisée ne permet pas de justifier un plan.

- **Un impératif incontournable, définir et faire parler le ou les termes clés du sujet** : ici, il n'y avait qu'une seule notion économique à définir, le taux de chômage qui consiste à rapporter le nombre de chômeurs à la population active. Pour autant, la facilité n'était qu'apparente, tant la notion est riche et complexe. Il convenait de connaître les deux modes de dénombrement du chômage, celui utilisé par l'Insee dans ses enquêtes emploi, et celui utilisé par Pôle emploi qui enregistre les demandeurs d'emploi en fin de mois en plusieurs catégories selon leur éloignement de l'emploi à temps et à durée indéterminée. Il était également attendu une connaissance des chiffres du chômage en France depuis 30 ans environ que le pays connaît un chômage de masse, ainsi qu'une typologie des différents types de chômage, volontaire ou involontaire, conjoncturel, frictionnel et structurel.

- **Ne pas négliger les autres termes du sujet** : outre la référence explicite à la France qui délimitait les frontières spatiales du sujet, il convenait d'être attentif au sens des autres termes : « condamnée » ; « durablement » ; un taux de chômage « élevé ». Est élevé un taux de chômage qui s'écarte durablement du plein-emploi qui se situe pour un pays comme la France probablement au voisinage de 4 % de la population active (chômage frictionnel). Les chiffres du chômage nous disent que le chômage est élevé en France depuis le milieu des années 1980, période à partir de laquelle on a commencé à parler de chômage de masse pour désigner ce fléau. **Nous considérerons donc qu'un taux de chômage élevé est un chômage de masse.**

Est condamné durablement celui qui ne peut échapper avant longtemps à sa peine, à sa sanction. L'usage du mot condamnation est un peu surprenant dans un libellé de sujet d'économie car le terme a d'abord un sens juridique. Il faut donc passer par un synonyme pour approcher un peu le sens de la notion : est condamné, celui qui est déclaré incurable d'un mal qui le frappe. Le chômage de masse devient alors une « maladie » impossible à guérir, un mal incurable, un déséquilibre économique impossible à réguler par des actions de politique économique appropriées. Si le passé ne préjuge pas de l'avenir, il peut toutefois servir d'expériences empiriques de ce qui « marche » et de ce qui ne suffit pas à exercer un pouvoir sur le phénomène du chômage de masse : de fait la France vit avec un chômage élevé depuis 30 ans. Cela va-t-il durer encore longtemps ? Pourquoi le chômage est-il permanent en France ?

· **Reformuler la question posée pour en déduire des axes de réflexion possibles**

Le chômage de masse que connaît la France depuis 30 ans va-t-il perdurer encore longtemps ? A quelles conditions, la bataille contre le chômage élevé peut-elle être gagnée ? La question posée peut être examinée au regard de l'histoire des fluctuations du taux de chômage depuis 30 ans environ, de la connaissance que nous avons des comportements d'offre et de demande sur le marché du travail, et enfin des enseignements de la théorie économique sur les causes du chômage.

A partir de là, trois axes se dégagent : le retour de la croissance ne peut pas mordre au-delà de la part conjoncturelle du chômage. Par ailleurs, la nature du fonctionnement du marché du travail comme le relatif dynamisme démographique de la France n'autorisent pas à penser que le chômage pourrait mécaniquement baisser avec la diminution des entrées sur le marché du travail et la progression des sorties. Enfin, la persistance du chômage français est due à son haut niveau de chômage structurel. Tant que des réformes de fond ne s'attaqueront pas à ce problème, la France ne reviendra pas au voisinage du plein-emploi, soit probablement 4 à 5 % de la population active. Il s'agit donc d'examiner ce qui est fait en la matière et ce qui pourrait être fait.

**Proposition rédigée de réflexion argumentée**

**Introduction, quelques conseils de méthode**

L'introduction sert à capter l'attention du correcteur. Elle doit donc être particulièrement soignée et montrer sa compréhension de la question posée. Sa construction est en quelque sorte un parcours imposé. Elle doit comporter :

- Une entrée en matière qui permet de situer la question dans son contexte. Une référence à l'actualité économique est souvent efficace.
- Une définition ou une explication des termes et expressions du libellé du sujet.
- Une reformulation de la question posée qui prend appui sur l'analyse des termes et de leurs liens logiques.
- Une annonce du plan choisi en deux ou trois parties

Depuis la crise de 2008, le nombre de demandeurs d'emploi inscrits à Pôle emploi, catégories A à C, poursuit inexorablement sa progression en France, passant en septembre 2008 de 3 108 000 à 5 414 000 personnes. On ne voit donc pas dans les chiffres l'inversion de la courbe de chômage annoncée par le chef de l'Etat un peu hâtivement en septembre 2012 pour la fin de l'année 2013.

Le dénombrement des chômeurs repose sur une définition et suppose de disposer d'instruments de mesure. L'Insee s'appuie sur la définition conventionnelle retenue par le bureau international du travail (BIT) pour mener son enquête emploi. D'après le BIT, sont considérés comme chômeurs les actifs en âge de travailler (15 ans ou plus) qui répondent simultanément à trois conditions : être sans emploi (ne pas avoir travaillé au moins une heure durant une semaine de référence, être disponible pour prendre un emploi dans les 15 jours, et rechercher activement un emploi (réalisation de démarches spécifiques).

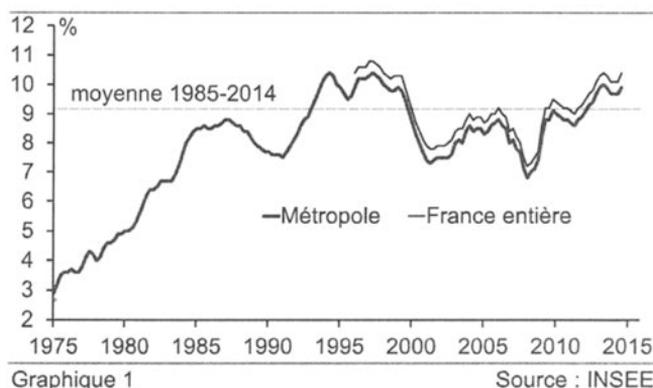
La mesure officielle du taux de chômage consiste à rapporter le nombre de chômeurs à la population active. C'est cet indicateur que l'on suit sur longue période. Néanmoins, les concepts de chômeur au sens du BIT et de Pôle emploi ne se recoupent pas complètement. Selon Pôle emploi, le nombre de demandeurs d'emploi en fin de mois est ventilé en cinq catégories (catégorie A à catégorie E), selon que les personnes ont exercé une activité durant le mois et qu'elles sont tenues d'exercer des actes positifs de recherche d'emploi. Ainsi, les demandeurs d'emploi inscrits en catégorie A regroupent les personnes n'ayant pas travaillé et

en recherche d'emploi, ceux de la catégorie B, les personnes ayant eu une activité réduite de moins de 78 h dans le mois et ceux de la catégorie C, les personnes ayant travaillé plus de 78 h dans le mois et qui cherchent un emploi.

Même si les chiffres du chômage communiqués par l'Insee et Pôle emploi ne se recoupent pas totalement, les tendances sont globalement les mêmes et les deux séries statistiques ont leur utilité propre.

Les données de Pôle emploi permettent d'apporter des éléments sur le fonctionnement du marché du travail. Ainsi, une analyse plus fine des chiffres permet d'approcher le degré de fluidité du marché du travail. Car, être demandeur d'emploi n'est pas grave en soi, si cela correspond à une situation transitoire et courte. Or, ce n'est pas la réalité en France. L'ancienneté moyenne passée au chômage est en hausse constante depuis la crise et atteint 549 jours, tandis que 43 % des inscrits en catégories A, B et C le sont depuis plus d'un an et 13 % depuis plus de 3 ans. En moyenne sur le premier trimestre 2015, le **taux de chômage au sens du BIT** atteint 10,3 % de la population active en France et 10 % pour la seule France métropolitaine. Mais l'ampleur du chômage dans notre pays nécessite de passer par les séries longues.

### Le taux de chômage en France (en % de la population active)



Depuis le milieu des années 1980, le taux de chômage français évolue dans un corridor compris entre 7 % de la population active, au plus bas, et 10,5 % au plus haut, la moyenne sur ces 30 dernières années étant proche de 9 %. C'est donc depuis 1985 que la France est caractérisée par un chômage de masse persistant et durable. Il faut souligner que ce n'est pas le cas de nombreux autres pays comparables à la France qui ont su revenir au plein-emploi.

Un tel constat est conforme aux enseignements de la théorie économique contemporaine qui distingue trois composantes dans le chômage : une composante frictionnelle incompressible, une composante conjoncturelle et enfin une composante structurelle. Le fait que depuis 30 ans le chômage ne soit jamais redescendu sous la barre des 7 % de la population active laisse penser que le chômage français est devenu essentiellement de nature structurelle.

Pourtant, la nation consacre aux politiques de l'emploi des moyens importants sans pour autant réussir là où d'autres réussissent mieux. A tel point que la lutte contre le chômage alterne souvent entre un volontarisme peu crédible et le découragement (« contre le chômage, on a tout essayé » disait François Mitterrand en 1993).

Cela va-t-il durer pour longtemps encore ? 30 années de plus ? Il est naturellement difficile de le dire. Toutefois, nous nous posons la question de savoir à quelles conditions la bataille contre le chômage de masse pourrait être enfin gagnée ?

Nous montrerons d'abord qu'il convient désormais de se préserver de deux illusions : ni de meilleures perspectives de croissance, ni les évolutions démographiques ne sont susceptibles d'être des solutions (partie I). Nous montrerons ensuite que le niveau élevé du chômage structurel appelle des remèdes aussi diversifiés que le sont ses causes (Partie II).

### **Le développement, quelques conseils de méthode**

Le développement doit bien entendu suivre votre plan tel qu'il a été annoncé à la fin de l'introduction. Il est préférable de ménager des titres sous la forme de courtes phrases pour exprimer les idées principales que vous souhaitez développer. Mais le plus important est ailleurs, vos idées doivent reposer sur des arguments précis. Ceux-ci peuvent être des arguments théoriques tirés des enseignements de la science économique ou des arguments factuels tirés d'exemples de l'actualité économique, mais il ne s'agira jamais de simples arguments d'autorité, autrement dit d'affirmations gratuites non étayées et justifiées.

## **PARTIE I**

### **La France est condamnée au chômage de masse si elle attend trop de la croissance et des évolutions démographiques naturelles**

La variation du taux de chômage peut s'analyser, au moins au premier abord, comme le solde des créations d'emplois et de l'évolution de la population active. A priori, plus les créations d'emploi sont dynamiques et moins le solde des entrées et des sorties de la population active est élevé et plus on peut espérer une baisse du taux de chômage. Pourtant, ce raisonnement est simpliste et recèle en lui une fausse promesse à la fois démentie par les faits et la théorie économique. Voyons pourquoi.

#### **A/ L'espoir vain de la croissance pour faire baisser le chômage en deçà de sa part conjoncturelle**

##### **1) La politique de stimulation de la croissance**

La crise de 2008-2009, puis la croissance nulle des années 2012-2014 ont contribué à détruire massivement des emplois, surtout des emplois précaires non reconduits, et explique la forte progression du chômage. Dans un contexte où les instruments traditionnels de relance de l'activité sont devenus peu opérationnels – politique budgétaire rigoureuse du fait des contraintes d'endettement public et des engagements européens de la France de réduire son déficit public, et politique monétaire à sa limite d'efficacité en raison des taux zéros pratiqués désormais –, le gouvernement n'abandonne pas le terrain de la stimulation de l'activité pour créer davantage d'emplois.

Lancé à la fin de l'année 2012, le Pacte national pour la croissance, la compétitivité et l'emploi vise à restaurer à la fois la compétitivité de l'économie et l'emploi. Pour atteindre ces deux objectifs, le principal instrument est le crédit d'impôt pour la compétitivité et l'emploi qui consiste en un soutien de 20 milliards d'euros accordés aux entreprises. Le CICE correspond à un allègement de 6 % la masse salariale comprise entre le SMIC et 2,4 fois le SMIC. La transformation de ce crédit

d'impôt en baisse des charges patronales, comme annoncé récemment, serait susceptible d'avoir un impact plus fort sur l'emploi.

Second élément : le gouvernement a annoncé en janvier 2014, un Pacte de responsabilité. Ce pacte contient un cumul d'allègements de charges (allègements de cotisations patronales ciblés sur les bas salaires, suppression des cotisations au niveau du salaire minimum) et d'impôts (suppression de la surtaxe de l'impôt sur les sociétés par exemple) en faveur des entreprises, d'ici 2020, en contrepartie d'embauches. Toutefois, les représentants du patronat n'ont pas voulu prendre des engagements fermes et quantifiés, si bien que l'avenir de ce pacte est suspendu aux résultats des négociations des accords de branche.

Enfin, la loi pour la croissance, l'activité et l'égalité des chances économiques cherche, comme son nom l'indique, à lever un ensemble de freins à l'activité et l'emploi identifiés dans un certain nombre de secteurs réglementés, à y accroître la concurrence, libérant ainsi du pouvoir d'achat utile à la croissance. Si la libéralisation du transport par autocar ne fait guère discussion, il n'en va pas de même de l'extension du travail dominical et de l'effritement de la rente des professionnels du droit.

Il est certes difficile de dire encore quel sera l'impact sur la croissance et l'emploi de ces réformes pour l'économie française. Mais, il est certain qu'il ne faut pas en attendre une résorption du chômage de masse. Trop souvent, la France a en effet succombé à cette illusion de la croissance.

## 2) Les retours d'expérience : la croissance ne peut pas tout

Depuis 1985, le chômage a reculé de façon importante à trois occasions caractérisées chaque fois par une conjoncture plus porteuse : sur la période « 1987-1990 » (700 000 emplois créés en trois ans et baisse du taux de chômage de 1,2 point), la période « 1997-2001 » (plus d'un million de nouveaux emplois et baisse de 3 points du taux de chômage), puis la période 2006-2008 qui voit le taux de chômage revenir à 7,5 % de la population active. Ces trois phases ont à chaque fois laissé espérer une sortie du chômage de masse et un retour au plein-emploi et à chaque fois, l'espoir fut déçu. Est-ce dû à l'interruption de la reprise économique ? Faudrait-il plus de croissance pendant plus longtemps ?

La plupart des pays qui ont réussi à régler le problème du chômage de masse l'ont fait avec une croissance sensiblement équivalente à celle de la France, au moins sur moyenne période. Ensuite, à l'époque où l'on s'interroge sur l'affaiblissement de la croissance potentielle en Europe, il apparaît inconcevable de placer tous ses espoirs dans une hypothétique reprise durable et forte de la croissance.

La loi d'Okun établit une relation entre le taux de croissance et la variation du taux de chômage en prenant en considération deux facteurs propres à chaque pays : l'évolution de la population active et de la productivité du travail. Sur la base des données pour la France, l'OFCE estime qu'il faut créer actuellement environ 150 000 nouveaux emplois pour absorber le flux net annuel des nouveaux entrants sur le marché du travail et donc stabiliser le chômage. Or, un tel volume de création d'emplois suppose une croissance d'au minimum 1,5 %, soit bien plus que ce que l'économie française a pu réaliser ces dernières années. Il est hypothétique de tabler sur cet espoir pour sortir du chômage de masse.

## 3) Les enseignements de la théorie économique

La théorie économique explique pourquoi la croissance ne peut suffire pour atteindre le plein-emploi.

**Emploi et cycle de productivité** Depuis le début de l'année 2015, la France connaît une certaine reprise économique portée par la dépréciation de l'euro, la

baisse des prix du pétrole, la baisse des taux directeurs, une politique budgétaire moins contracyclique. Pourtant, cette reprise se fait sans importantes créations d'emplois et le chômage poursuit sa progression.

Comment expliquer ce phénomène ?

A court terme, l'ajustement de l'emploi suit avec retard le cycle de productivité du travail.

Lorsque la demande s'effondre, l'affaiblissement de la productivité du travail devrait en principe commander un ajustement de la masse salariale (emploi pondéré par le coût salarial) pour éviter la hausse des coûts de production. Inversement, la reprise économique devrait commander des embauches à court terme. Mais en France l'ajustement de l'emploi au choc de productivité se fait plus lentement qu'ailleurs.

En France, les entreprises connaissent un déficit de productivité important, car pendant la crise, elles n'ont pas ajusté l'emploi à leur niveau d'activité. Elles ont donc conservé davantage de main-d'œuvre que nécessaire. Maintenant, que la reprise est là, elles peuvent donc répondre au supplément de demande sans avoir besoin d'embaucher beaucoup.

Cet effet retard a bien sûr plusieurs explications, parmi lesquelles la rigidité salariale, la relativement forte protection de l'emploi, la faible confiance dans la pérennité de la reprise.

### **Chômage conjoncturel et effet d'hystérèse**

La théorie du chômage inspirée des analyses de Keynes met l'accent sur le déficit de croissance et de demande anticipée par les entreprises pour expliquer le chômage. On parle donc de chômage transitoire ou conjoncturel destiné à disparaître lorsque la croissance revient.

Certes, les chocs d'offre et de demande qui ont frappé la France représentent une explication de la hausse du chômage depuis 2008. Néanmoins, tout le chômage n'est pas conjoncturel et sa persistance à un niveau élevé même lorsque l'activité repart a inspiré des analyses nouvelles.

Blanchard et Summers (1986) ont identifié un phénomène bien connu en physique, l'effet d'hystérèse qui désigne un état qui persiste alors même que sa cause a disparu. Appliqué au marché du travail, il s'agit donc d'expliquer pourquoi un choc conjoncturel qui ne devrait augmenter le chômage de façon transitoire va finir par créer un chômage permanent à plus long terme. L'idée est alors que le chômage appelle le chômage.

Blanchard et Summers proposent plusieurs explications à ce phénomène particulièrement pertinentes pour la France.

La reprise de la croissance crée d'abord des emplois de façon sélective, au sens qu'elle est loin de profiter à tous de la même façon. Dans la file d'attente vers le retour à l'emploi, les chômeurs de plus longue durée sont mal placés. Concrètement, aux yeux des employeurs, les chômeurs de longue durée ont perdu une part de leur employabilité en raison d'une dévalorisation de leurs compétences à occuper un emploi. Ce phénomène est d'ailleurs accru par la qualification plus élevée des nouveaux entrants sur le marché du travail et la rapide obsolescence du capital humain lorsque le progrès technique est rapide.

Le fort dualisme du marché du travail en France est une autre explication. Lindbeck et Snower (1986) ont montré que lorsque la conjoncture est médiocre, les employeurs font porter l'ajustement sur les « outsiders », travailleurs les plus précaires (travail à temps déterminé, temps partiel contraint). En principe, on pourrait s'attendre à ce que ces travailleurs soient réembauchés avec le retour de meilleures perspectives. Mais ce n'est que partiellement le cas. En effet, les « insiders » profitent de la reprise pour négocier des hausses de salaire qui auront pour effet

de rigidifier les salaires réels qui sont alors déconnectés du niveau de chômage. Ces deux explications sont très opérationnelles pour la France qui connaît à la fois un nombre élevé de chômeurs de longue, voire de très longue durée, et une forte segmentation du marché du travail entre salariés en CDI et en contrats de travail précaires.

## **B/ Les évolutions démographiques naturelles ne suffiront pas**

### **1) L'espoir du déclin démographique pour solutionner le problème du chômage**

L'idée est simple, arithmétique, donc a priori évidente : les générations nombreuses du baby-boom (1945-1965) arrivent progressivement à l'âge de la retraite depuis le milieu des années 2000 et le mouvement devrait se poursuivre jusqu'en 2040 environ. Dans le même temps des générations moins nombreuses vont être amenées à les remplacer. Donc, plus de départs, moins d'offre de travail, fatalement, à un moment donné, le chômage doit mécaniquement baisser. C'est bien dans le déclin démographique que l'issue du chômage de masse pourrait se trouver. Il suffirait d'être patient Certains annonceront même les futures pénuries d'emploi. Les choses sont pourtant plus compliquées.

D'abord, alors que les premiers baby boomers ont atteint l'âge de la retraite depuis 10 ans maintenant, les effets sur l'emploi ne se sont pas fait sentir. L'explication vient des réformes successives des retraites et de la suppression des systèmes de préretraite mis en place dès la fin des années 1970. L'objectif officiel n'est plus d'agir sur le chômage en incitant les travailleurs seniors à quitter plus tôt le marché du travail, mais bien au contraire d'élever leur taux d'emploi. Ainsi, plusieurs mesures ont été prises pour aller dans ce sens : relèvement de l'âge légal du départ à la retraite de 60 à 62 ans, allongement de la durée du nombre d'années travaillées pour avoir droit à une pension complète, etc. Résultat, le taux d'emploi des 55-64 ans a fortement progressé passant de 38 % en 2008 à 47 % en 2014.

Les évolutions démographiques sont donc différées par la volonté de soulager les comptes de nos systèmes de retraite.

En prenant en compte cet effet retard, le Conseil d'analyse stratégique a réalisé une enquête prospective sur l'évolution future de la population active en France<sup>1</sup>. Selon cette étude, le nombre de départs en fin de carrière devrait être plus fort entre 2012 et 2022 (619 000 par an) qu'il ne l'a été précédemment entre 2005-2012 (565 000) ou en 2001-2005 (507 000).

Ce « papy-boom », même retardé, peut-il suffire à réduire le chômage de masse ?

### **2) Les effets quantitatifs seront au mieux modérés : critique de l'argument de type malthusien**

Rappelons qu'un comportement est malthusien lorsqu'il consiste à partager une situation de pénurie. Appliqué au marché du travail, le raisonnement consiste à considérer l'emploi comme un stock donné, de la même façon que Malthus en son temps considérait impossible de faire progresser plus vite les ressources agricoles. Dans ce type d'analyse, le salut vient soit de la réduction volontariste de la population active, soit de la baisse naturelle de son taux de croissance.

Finalement, le raisonnement est le même que l'on attende le départ naturel des baby boomers ou que l'on mette en place des politiques de retrait de l'activité comme ce fut le cas dans les années 1980-1990 avec les incitations au départ des travailleurs les plus âgés.

Or, cette thèse malthusienne n'est pas corroborée par les faits.

1. Conseil d'analyse stratégique, les métiers en 2022, avril 2015, entièrement téléchargeable

Plusieurs expériences d'un afflux important d'actifs n'ont pas conduit à une progression du chômage. Le rapatriement des Français d'Algérie en 1962 a coexisté avec le plein-emploi, l'exode en 1982 des Cubains en Floride aux États-Unis a momentanément provoqué une hausse de deux points du taux de chômage, mais en un an le problème était réglé. En France encore, l'arrivée des générations nombreuses sur le marché du travail a précédé de plus de 10 ans la montée du chômage. On ne peut donc lui imputer la responsabilité.

Ces expériences renforcent l'idée qu'il n'existe pas de corrélation significative entre le taux de chômage et le dynamisme de la population active. C'est même plutôt le contraire qui apparaît : les pays les plus proches du plein emploi sont souvent aussi ceux qui ont les taux d'activité les plus élevés.

La théorie économique permet de comprendre cette faible corrélation entre le taux de chômage et la population active.

Le raisonnement des « malthusiens » du marché du travail repose sur trois hypothèses implicites : les travailleurs âgés et les plus jeunes sont substituables, les comportements d'activité fixes, la création d'emploi, une donnée indépendante de l'évolution de la population active. Or, aucune de ces hypothèses n'est solide. La demande de travail dépend du rythme de la croissance économique et donc des capacités propres de l'économie. Parmi ces capacités, il faut compter avec la croissance plus ou moins forte de la population active. A priori, une baisse ou une croissance ralentie de la population active réduit le potentiel de croissance. Ce n'est donc pas favorable à l'emploi. En d'autres termes, il est exclu de pouvoir modéliser l'évolution du taux de chômage sans considérer ensemble l'évolution de la population active et la capacité de création d'emploi de l'économie.

En outre, l'offre de travail n'est pas seulement une donnée dépendante de l'âge des actifs. Il est tout à fait possible que la baisse de la population active attendue pour des raisons démographiques soit compensée par des comportements d'activité nouveaux, chez les femmes et les jeunes notamment. De plus, on sait que certaines personnes inactives sont incitées à revenir sur le marché du travail lorsque la conjoncture s'améliore sur le marché du travail.

Le Conseil d'analyse stratégique a intégré ces paramètres pour quantifier l'effet des départs des baby boomers sur le taux de chômage d'ici 2022. Trois scénarios ont été proposés sur la base d'hypothèses plus ou moins optimistes. Le scénario central table sur une croissance de 1,4 % en moyenne annuelle et des gains de productivité de 0,8 % par an. Sur ces bases, la France créerait 177 000 emplois en moyenne par an. Compte tenu de la croissance de la population active et des départs naturels à la retraite, le taux de chômage reviendrait alors à 7,9 % de la population active. A ce niveau, on ne peut pas considérer avoir solutionné le chômage de masse. Ce n'est qu'avec le scénario le plus optimiste que le chômage reviendrait à 6,9 % de la population active, mais les hypothèses d'une croissance à 1,8 % par an et des gains de productivité de 1 % apparaissent peu réalistes.

### 3) Les effets qualitatifs des évolutions démographiques

Le raisonnement malthusien suppose une parfaite substituabilité entre les travailleurs âgés qui partent et les jeunes qui entrent. Or, il n'en va pas ainsi. Il y a plusieurs raisons à ce phénomène, principalement liées à l'évolution des métiers et aux compétences différentes des sortants et des entrants. Parce que les besoins de l'économie changent, les départs à la retraite ne seront pas tous remplacés. Les entreprises profitent des départs à la retraite pour se restructurer et supprimer sans douleur des postes. Et même lorsque les besoins existent, les désirs des jeunes entrants, les compétences demandées par les employeurs ne sont pas les mêmes, les remplacements ne peuvent se faire poste à poste, à l'identique.

Tout ceci pose donc la question essentielle de l'appariement entre demandeurs et offreurs de travail. Si les besoins et les compétences offertes ne coïncident pas, il est tout à fait possible de voir perdurer un taux de chômage élevé dans un contexte de forts départs à la retraite.

Il convient donc de se préserver d'une double illusion : le retour de la croissance ne peut contribuer qu'à absorber la part conjoncturelle du chômage. Mais, par un effet d'hystérèse, le chômage peut continuer à progresser pour devenir structurel. Certes, le départ à la retraite des générations nombreuses du Baby-boom peut aider à réduire un peu le chômage, mais beaucoup moins qu'on a pu l'espérer et surtout il oblige à mettre l'accent sur les problèmes d'appariement entre offre et demande de travail.

## **PARTIE II**

### **La vraie solution passe par la réduction du chômage structurel élevé en France**

#### **A/ L'importance du chômage structurel**

##### **1) Le concept théorique de chômage structurel ou d'équilibre**

Le taux de chômage structurel est un taux de chômage théorique qui ne tient pas compte des fluctuations conjoncturelles ni des inévitables délais d'embauche et de changement d'emploi. Indépendant du cycle économique et des mouvements de main-d'œuvre sur le marché du travail, il n'est donc ni conjoncturel ni frictionnel.

On doit à Milton Friedman d'avoir montré dans les années 1960 que même lorsque le marché du travail est à l'équilibre, un certain taux de chômage subsiste. Ce taux de chômage « naturel » s'explique par un mauvais fonctionnement du marché du travail (rigidités réelles multiples).

Si on mesure de façon conventionnelle le taux de chômage, on ne peut que procéder à des estimations des composantes frictionnelles, conjoncturelle et structurelle du chômage.

Le chômage structurel correspond à un chômage dit d'équilibre, cela signifie qu'il correspond au niveau du chômage pour lequel il n'y a pas de croissance des salaires et des prix. Pour l'estimer, les économistes calculent le taux de chômage pour lequel il n'y a pas de croissance des salaires. En effet, lorsque le marché de l'emploi est à l'équilibre – ni surproduction, ni sous-production –, les salaires ne peuvent varier qu'en fonction de la productivité globale des facteurs.

Selon les techniques utilisées, les estimations du chômage structurel peuvent être différentes. Par exemple, l'OFCE, l'évalue à plus de 7,5 % de la population active et l'OCDE à plus de 9 %. Mais il existe un consensus pour considérer qu'il atteint un niveau très élevé en France.

##### **2) Les problèmes d'appariement sont un indice d'un chômage structurel élevé**

La réalité du chômage structurel peut être approchée par les problèmes d'appariement sur le marché du travail entre les besoins des entreprises et les compétences des chômeurs. La courbe de Beveridge met en relation la qualité de l'appariement entre les besoins des uns et les désirs des autres.

Cette courbe met en relation le taux de chômage (sur l'axe des abscisses) et le pourcentage d'emplois vacants/Taux d'offre d'emploi insatisfaite (en ordonnées).

## La courbe de Beveridge



Comme on peut le voir sur la figure, la relation entre les deux axes est décroissante. En période de croissance, les créations d'emplois sont dynamiques et les demandeurs d'emploi ont davantage le choix. Donc, le taux de chômage baisse et le taux d'offre d'emploi non pourvu augmente. A l'inverse, en période de récession, l'emploi est plus rare : le taux d'emplois d'offre d'emploi non pourvu baisse et le chômage augmente. Sur la courbe 1 de la figure, il existe donc un taux de chômage qui correspond à un taux d'emploi vacant.

Il n'est pas anormal qu'il y ait des emplois vacants dans une économie. L'appariement n'est jamais parfait. Mais ce qui pose problème, c'est leur nombre et leur caractère durable. Le plus ou moins bon fonctionnement du marché du travail (au sens qualité de l'appariement entre l'offre et la demande de travail) peut alors se mesurer à l'aune de la position de la courbe par rapport à l'origine des axes. Le passage de la courbe 1 à la courbe 2 sur la figure est mauvais signe puisqu'alors un même pourcentage d'emplois vacants correspond à un taux de chômage plus élevé, ce qui témoigne d'une moins bonne adéquation entre l'offre et la demande de travail et présume une élévation du taux de chômage structurel.

Qu'en est-il pour la France ? On ne dispose pas en France de séries statistiques sur le nombre d'emplois vacants. Il faut donc passer par d'autres indicateurs comme les déclarations des entreprises sur leurs difficultés de recrutement ou de façon très large les offres d'emploi disponible à Pôle emploi. Il n'existe donc pas de consensus sur l'ampleur du problème (1 million selon l'estimation du Conseil d'orientation pour l'emploi en 2013 et même 1,7 million pour Patrick Artus qui reprend les chiffres de pôle emploi sur les emplois disponibles).

Une étude menée par la Banque de France révèle que depuis 2010, la courbe de Beveridge de la France indique une hausse simultanée du chômage et des vacances d'emploi, ce qui suggère une augmentation du chômage structurel. Ainsi, entre le troisième trimestre 2009 et le deuxième trimestre 2011, les vacances d'emploi augmentent à chômage constant et à partir de 2012 le chômage augmente sans diminution des vacances d'emploi, indiquant que les qualifications d'une partie des nouveaux chômeurs ne correspondent pas aux besoins des entreprises.

### 3) Les explications des problèmes d'appariement sur le marché du travail

Si le chômage persiste, c'est donc parce que le processus d'appariement entre l'offre et la demande de travail est défaillant.

Deux grands types d'explications sont proposés. Le premier type d'explications repose sur une analyse de l'économie en termes de destructions-créatrices. En permanente recomposition, le système productif crée et détruit simultanément des emplois, mais la réallocation des emplois se fait mal car la structure de la demande de travail se déforme aux dépens de certaines qualifications, secteurs d'activité, métiers et compétences. Les transferts de main-d'œuvre peuvent être handicapés par la faible mobilité géographique des travailleurs en général et des chômeurs en particulier, et leur employabilité insuffisante, surtout lorsqu'ils sont chômeurs de longue durée.

Le second type d'explications met l'accent sur certaines rigidités institutionnelles du marché du travail : la fixation d'un salaire minimal indifférencié selon les régions, les classes d'âge, etc., le régime d'indemnisation du chômage, les prélèvements sur les salaires, la protection de l'emploi. En clair, ce qui est à l'œuvre, ce sont les rigidités salariales. Ceci nous conduit à un dysfonctionnement particulièrement fort du marché du travail français : **l'absence de sensibilité des salaires au taux de chômage.**

Pourquoi les salaires ne jouent-ils pas plus leur rôle de variable d'ajustement du marché du travail et ne ralentissent-ils pas plus en période de chômage élevé ?

Plusieurs éléments d'explications sont proposés.

Le rapport Enderlein-Pisany-Ferry (2014) met l'accent sur l'obligation de négociations salariales annuelles au niveau de l'entreprise qui crée une pression à la hausse des salaires même quand il n'y a pas de croissance du revenu à distribuer, le bas niveau du taux de chômage pour les plus qualifiés qui tire leur salaire vers le haut, l'indexation partielle du SMIC sur le salaire horaire moyen en déconnexion avec l'évolution de la productivité.

Mais, les employeurs ont également leur raison. Une étude du Conseil d'Analyse Economique (2013) montre que la dynamique des salaires en France trouverait aussi son origine dans la réticence des entreprises, même face à la crise, à infléchir leurs pratiques salariales. Pour préserver la motivation des travailleurs, le climat social, ne pas risquer de perdre leurs meilleurs collaborateurs, les entreprises préfèrent réduire l'emploi plutôt que les salaires », protégeant ce faisant les « insiders » – ceux en emploi – au détriment des « outsiders » – ceux en dehors du marché du travail.

Sur la période récente, un « effet de composition » a également joué à la hausse : les pertes d'emplois frappant surtout les personnes les moins diplômées et donc moins bien rémunérées, leur sortie des effectifs contribue à rehausser la moyenne des salaires.

Lorsqu'à ces différents facteurs s'ajoute la faiblesse de l'inflation, le tout contribue à ce que les salaires réels, et donc le coût global du travail, progressent plus vite que les gains de productivité (eux-mêmes par ailleurs peu dynamiques). Si elle est positive pour les travailleurs concernés, la hausse de leur salaire réel est plus problématique pour les employeurs, confrontés à une hausse du coût réel unitaire du travail, ce qui décourage la demande de travail, induit moins d'embauches et entretient le chômage.

## **B/ Réduire la part structurelle du chômage**

Pour faire baisser le chômage, les caractéristiques des demandeurs d'emploi (qualifications notamment) doivent mieux correspondre à la demande des entreprises. L'ajustement est possible par deux leviers complémentaires : la mise en place de politiques de formation mieux ciblées, une plus grande flexibilité salariale, rendue difficile par l'existence de rigidités nominales.

## 1) L'enjeu décisif d'une meilleure formation professionnelle pour réduire le chômage structurel

Toutes les enquêtes menées par l'OCDE le montrent, la France souffre particulièrement du niveau insuffisant de formation de ses travailleurs adultes, notamment des plus anciens. Ce manque de compétences freine les mouvements de main-d'œuvre et pénalise les moins bien formés.

L'objectif à atteindre est donc d'adapter l'offre de travail par la formation professionnelle afin de faire correspondre les compétences des chômeurs aux emplois demandés. Cette voie est longue et coûteuse mais elle permet aussi d'améliorer les perspectives de croissance potentielle au travers d'une hausse de la productivité du travail.

Le niveau de qualification est un élément déterminant de l'insertion et du maintien sur le marché du travail.

Des réformes sont mises en œuvre pour pallier cette difficulté de l'économie française. Certaines mesures visent à favoriser l'insertion sur le marché du travail : développement de l'apprentissage, encouragement à la mobilité à l'international durant les études, création d'un nouveau service public d'orientation et de formation. Mais c'est aussi pour améliorer l'employabilité que des efforts sont réalisés. La loi de sécurité de l'emploi crée ainsi de nouveaux dispositifs, notamment le **compte personnel de formation**. Ce compte serait universel, activable tout au long de la carrière professionnelle, ouvert aux salariés comme aux chômeurs et transférable d'un emploi à un autre.

Dans le registre de la formation ciblée sur un public particulier, on mentionnera aussi l'annonce, à l'été 2013, d'un plan de formations prioritaires, adressé aux chômeurs, pour pourvoir spécifiquement les emplois classés vacants. Au moins 30 000 chômeurs devaient en bénéficier d'ici la fin 2013 et 100 000 de plus en 2014. Il y a également, pour les chômeurs de longue durée, la voie de l'« insertion par l'activité économique » que le gouvernement souhaite soutenir *via* les « mises en situation professionnelle » et la formation par les entreprises elles-mêmes des chômeurs qui leur sont confiés dans ce cadre.

La **réforme de la formation professionnelle**, conclue en décembre 2013 et promulguée en mars 2014 avait, pour objectif général, d'aboutir à une meilleure allocation de son important budget (plus de 30 milliards) pour qu'il bénéficie à ceux qui en ont le plus besoin, à savoir les demandeurs d'emploi. Ce qui n'est pas le cas aujourd'hui, le système profitant plus aux salariés en activité et aux plus qualifiés d'entre eux. Cette réforme cherche à responsabiliser chacun des acteurs du système, qui se trouve aussi simplifié dans son financement. La formation professionnelle devrait y gagner en efficacité. Le compte personnel de formation, institué officiellement par cette réforme et entrant en vigueur le 5 janvier 2015, est une avancée significative. Mais il faut être conscient que les déficits de formation ne se règlent pas en quelques mois, mais plutôt en quelques années.

## 2) Améliorer la fluidité du marché du travail

Un second levier consiste à encourager la création d'emplois correspondant aux chômeurs non qualifiés. Cela ne peut se faire qu'en diminuant les barrières qui freinent l'ajustement sur le marché du travail.

Rendre les salaires réels plus flexibles semble toutefois difficile en raison de l'existence de mécanismes de fixation de salaires collectifs tels que le SMIC en France et d'un niveau d'inflation faible.

Toutefois, des mesures sont prises pour s'engager sur la piste de la flexisécurité...

L'**accord sur la sécurisation de l'emploi** conclu entre les partenaires sociaux en janvier 2013 (et traduit dans la loi du 14 juin 2013) entre dans la catégorie des réformes structurelles. Cet accord est important à double titre. Sur la forme, car il est

le fruit d'un compromis social ce qui en améliore la légitimité. Sur le fond, car, en prolongation de la loi du 25 juin 2008 sur la « modernisation du marché du travail », il précise à son tour les contours d'une flexisécurité à la française.

Il contient, en effet, diverses mesures pour sécuriser davantage les employés : généralisation de la complémentaire santé, droits rechargeables à l'assurance-chômage, compte personnel de formation, droit à une période dite de mobilité volontaire sécurisée. Est également introduite une surtaxe appliquée aux CDD de moins de 3 mois, dont les cotisations à l'assurance chômage sont majorées (de 4 % à 7 % pour les CDD de moins d'un mois et à 5,5 % pour ceux compris entre 1 et 3 mois). Cette surtaxe s'accompagne d'une exonération de charges pendant trois mois pour toute embauche en CDI d'un jeune de moins de 26 ans. La mesure cherche à dissuader les abus et à inciter les entreprises à recruter davantage en CDI. Un objectif, certes difficile à obtenir dans la conjoncture actuelle de stagnation de l'activité, mais qui pourrait l'être en cas de véritable reprise. De plus, les CDD de moins de 3 mois ne se sont pas des substituts aux CDI.

Les principales mesures de flexibilité pour les entreprises sont : la simplification du dispositif de chômage partiel et les accords de « maintien dans l'emploi ». Ceux-ci constituent une réelle avancée. Ils doivent permettre aux entreprises, qui font face à de « graves difficultés conjoncturelles », de maintenir leur main-d'œuvre en négociant, pendant une durée maximale de deux ans, une adaptation du temps de travail et/ou des rémunérations. La simplification des procédures de licenciement collectif et la réduction de l'aléa juridique devraient également être bénéfiques à l'emploi (l'embauche est plus facile si le licenciement l'est aussi).

Cet accord atténue certaines rigidités du marché du travail français. Mais les effets positifs à en attendre devraient rester limités.

Le problème de la dualité du marché du travail n'est qu'effleuré. L'accord ajoute une touche de complexité au code du travail et il renchérit le coût du travail (via la surtaxe sur les CDD de moins de trois mois et la généralisation de la complémentaire santé). La flexibilité permise par les accords de maintien dans l'emploi est très encadrée et de nature défensive. La formule n'a d'ailleurs rencontré qu'un très maigre succès pour le moment.

Enfin, certains envisagent de conduire une réforme du **SMIC**, dont la dynamique et le niveau posent question. Sa formule de revalorisation automatique pourrait être révisée pour être plus en ligne avec la dynamique des gains de productivité. D'autres envisagent une différenciation de son niveau (en fonction de l'âge, des qualifications, du degré d'éloignement à l'emploi, des régions, ...) pour mieux être en phase avec les difficultés d'emploi de certaines catégories de travailleurs. Toutefois, le prix politique d'une telle réforme est élevé et surtout, la solution au chômage des jeunes ou des personnes peu qualifiées passe aussi par la formation.

Ces idées ne sont pas exhaustives, mais elles donnent une idée de la complexité des mesures à prendre pour réduire le niveau du chômage structurel.

### Conclusion :

La lutte contre le chômage de masse est, depuis le tournant des années 1980-1990, l'un des objectifs que les gouvernements successifs se fixent sans succès jusqu'ici. Cet échec, la France le doit à l'enchevêtrement des causes du chômage qu'il faut traiter simultanément. Mais, il tient également à la difficulté de mener les réformes nécessaires du marché du travail. Les réformes sont toujours difficiles à faire accepter car les coûts qu'elles génèrent sont plus visibles et immédiats que les gains. Le gouvernement actuel met en œuvre des réformes profondes qui touchent en profondeur les institutions du marché du travail et de son fonctionnement. Les fruits viendront... avec le coup de pouce de la reprise.

# MANAGEMENT ET GESTION DE L'ENTREPRISE

**DURÉE : 4 HEURES.**

*Matériel autorisé :*

- calculatrice de poche à fonctionnement autonome, sans imprimante et sans aucun moyen de transmission, à l'exclusion de tout autre élément matériel ou documentaire (circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999 ; BOEN n° 42) ;

- liste intégrale des comptes du Plan comptable général.

*Les candidats ne doivent faire usage d'aucun autre document.*

## SUJET

### LE GROUPE AGRICONSEIL

Dossier 1 : Les axes stratégiques du groupe Agriconseil

Dossier 2 : L'adaptation des ressources humaines aux nouveaux besoins

Dossier 3 : Le développement de l'activité « logiciel en mode Saas »

#### Annexes

Annexe 1 : Historique du groupe Agriconseil

Annexe 2 : Intervention de Pierre Mignan créateur et PDG du groupe

Annexe 3 : Les activités du groupe Agriconseil

Annexe 4 : Les engagements du groupe Agriconseil

Annexe 5 : L'entité Softfarm, filiale du groupe Agriconseil

Annexe 6 : Intervention d'Anna Audourd, directeur de Softfarm

Annexe 7 : Extraits de la fiche informative de Softfarm

Annexe 8 : Données sociales du service Conseil et formation aux clients

Annexe 9 : Offres de PGI en mode Saas : l'heure de la maturité ?

Annexe 10 : Bilan Softfarm au 31 décembre 2014

Annexe 11 : Informations relatives au développement de la solution en mode Saas

Annexe 12 : Documentation spécialisée sur les systèmes d'information

### GROUPE AGRICONSEIL

Fondée en 1983, *Agriconseil* est une entreprise de conseil spécialisée dans les systèmes d'information d'entreprises du secteur de l'agriculture (élevage, production de fruits et légumes, viticulture). Sous la direction de Pierre Magnan, PDG depuis sa création, l'entreprise se donne pour objectif d'accompagner les agriculteurs dans leur gestion grâce à l'informatique. Forte de plus de 1 300 collaborateurs, l'entreprise est reconnue comme le principal acteur informatique en Europe avec 140 millions d'euros de chiffre d'affaires en 2014, 110 000 clients agriculteurs-viticulteurs, 350 cabinets de conseil partenaires sur le terrain et 400 clients « Grands Comptes ».

Cette entreprise est devenue un acteur majeur dans le domaine informatique. Elle développe et distribue des logiciels dédiés à la gestion des exploitations agricoles et a su élargir son champ d'activités aux médias spécialisés sur ce secteur. Cependant, la multiplicité des composantes logicielles qu'elle propose, agrégées au gré de la stratégie de croissance du groupe, est aujourd'hui confrontée à l'évolution des technologies et des modalités de travail dans l'agriculture (réseaux, mobilité, progiciels de gestion intégrés). Les solutions, actuellement proposées, deviennent rapidement obsolètes et de nouveaux besoins liés à la mobilité nécessitent un repositionnement de l'offre.

Le choix d'intégrer son offre logicielle au sein d'un seul progiciel, avec plusieurs modules a été ainsi validé l'an dernier. Une offre de progiciel de gestion intégré (PGI) est en voie de réalisation et l'intégration des progiciels pour ses clients est en train de se mettre en place. Pour les grandes exploitations, la nécessité d'un système intégré (PGI) n'est plus en question ; la transition des anciennes installations vers des systèmes intégrés se généralise. Pour les petites exploitations, des modalités de type logiciel à la demande (« Saas : *software as a service* ») sont à l'étude. Il s'agit de porter les solutions logicielles produites par le groupe dans un mode Saas et de tester la fiabilité de ce modèle économique.

Comme à ses débuts, *Agriconseil* est soucieuse de faire évoluer son offre, d'améliorer la qualité de ses services tout en maintenant un accroissement de ses performances et en consolidant sa notoriété sur ses différentes activités. Elle est cependant confrontée à de nouveaux enjeux notamment en ce qui concerne son activité à destination des petites exploitations agricoles : la concurrence de plus en plus vive de groupes européens et américains, des tensions en matière de ressources humaines et enfin des besoins en capitaux importants pour financer les projets en cours.

#### **L'étude est composée de 3 dossiers :**

Dossier 1 : Les axes stratégiques du groupe Agriconseil

Dossier 2 : L'adaptation des ressources humaines aux nouveaux besoins (Softfarm)

Dossier 3 : Le développement de l'activité « logiciel en mode Saas » (Softfarm)

Ces 3 axes d'étude peuvent être abordés de façon indépendante.

## **DOSSIER 1**

---

### **Les axes stratégiques du groupe Agriconseil**

Le groupe *Agriconseil* fait preuve d'une très grande stabilité en matière de direction. Pierre Magnan, l'un des créateurs, est toujours le PDG et plusieurs membres de sa famille font partie du conseil d'administration. Ce groupe a toujours privilégié, jusqu'à ces dernières années, un développement par autofinancement dans le but unique de préserver son indépendance. Cependant des emprunts importants auprès de banques partenaires ont dû être récemment souscrits. Pierre Magnan souhaite prochainement quitter son poste de président-directeur général et s'inquiète du devenir de l'entreprise tant sur son mode de gouvernance que sur ses choix stratégiques.

Les éléments d'analyse stratégique sont communiqués en annexes 1 à 7.

En vous appuyant sur vos connaissances et sur les annexes :

1. Présenter les finalités et les domaines d'activité stratégique du groupe *Agriconseil*.
2. Caractériser les différentes étapes du développement de ce groupe (direction, modalités et voies de développement des trente dernières années) et apprécier la pertinence de chaque choix opéré.
3. Évaluer les conséquences de l'acquisition du groupe presse *Agricola* sur la structure organisationnelle et le système d'information du groupe *Agriconseil*.
4. Préciser en quoi le groupe *Agriconseil* cherche à assumer une responsabilité sociale d'entreprise.
5. Identifier les avantages et les risques du mode de gouvernance du groupe *Agriconseil* et proposer des pistes de communication globale du groupe.

## DOSSIER 2

---

### L'adaptation des ressources humaines aux nouveaux besoins

Pour répondre aux besoins de sa clientèle et suivre les évolutions technologiques et notamment la problématique d'intégration, *Agriconseil* a créé une entité spécifique baptisée *Softfarm*. Cette dernière propose des solutions et des services d'intégration logicielle orientés nouvelles technologies et se destine principalement à la gestion des petites exploitations agricoles.

Dans le cadre de son projet « Cap carrières », *Softfarm* a l'ambition de créer de nombreux postes, notamment dans le domaine du conseil, de l'assistance et de la formation aux clients (annexes 5 à 9).

En vous appuyant sur vos connaissances et sur les annexes :

1. Identifier les facteurs clés de succès sur le marché des logiciels de gestion puis indiquer l'origine de l'avantage concurrentiel de *Softfarm* dans ce domaine.
2. Proposer et calculer trois indicateurs pertinents afin d'évaluer les ressources humaines du service « Conseil et formation aux clients ».
3. Présenter, dans une note d'une page, un diagnostic du service « Conseil et formation aux clients ».

## DOSSIER 3

---

### Le développement de l'activité « logiciel en mode Saas »

Pour résister à la concurrence de grands groupes déjà présents sur le domaine des progiciels de gestion intégrés, *Softfarm* souhaite adopter un positionnement davantage axé sur l'adaptation du logiciel aux besoins spécifiques du client, d'une part, et sur la qualité et la proximité du service, d'autre part. Notamment, elle souhaite renforcer sa présence dans les petites exploitations agricoles, qui peuvent être considérées comme des petites et moyennes entreprises.

*Softfarm* souhaite développer l'activité de fourniture de progiciel de gestion intégré (PGI) en mode Saas auprès de ses nouveaux clients pour ensuite l'étendre à l'ensemble de sa clientèle. Cependant Pierre Magnan, PDG du groupe, souhaite s'assurer que la structure financière de *Softfarm*, permettra réellement le développement et le financement d'une telle activité (annexes 10 à 12).

En vous appuyant sur vos connaissances et sur les annexes :

1. Mettre en évidence les principaux avantages offerts par un progiciel de gestion intégré.
2. Qualifier le positionnement commercial de l'offre logicielle de *Softfarm* au regard de ses concurrents et montrer que ce positionnement est pertinent pour le groupe *Agriconseil*.
3. Proposer un argumentaire des éléments clés de l'offre « Saas » auprès des petites exploitations agricoles.
4. Analyser la structure financière de *Softfarm*. Proposer, calculer et commenter quatre indicateurs ou ratios pertinents, mobilisables dans ce type d'analyse, pour mettre en évidence les marges de manœuvre dont dispose l'entreprise.
5. Déterminer le niveau critique de la nouvelle activité.
6. Présenter, dans une note d'une page, les risques induits par ce projet, pour *Softfarm* et pour le groupe *Agriconseil*.

## ANNEXES

### ANNEXE 1

#### Historique du groupe Agriconseil

Fondé en 1983 par quelques professeurs chercheurs, *Agriconseil* va très vite révolutionner le marché agricole français en rendant l'informatique accessible au plus grand nombre. Trois décennies plus tard, *Agriconseil* a bien grandi et est devenu un groupe pionnier en informatique agricole.

Tout commence avec une poignée de professeurs de l'Institut Supérieur Agricole (ISA) et d'agriculteurs. Depuis, l'entreprise se structure, de jeunes ingénieurs sont recrutés pour le développement des produits et du service. Sur le terrain, les agriculteurs deviennent des utilisateurs des logiciels *Agriconseil*. Cela assure une croissance régulière du nombre de clients en faisant connaître les produits proposés par cette entreprise qui connaît alors une croissance rapide.

L'aube des années 90 marque les débuts d'un succès commercial. Les bénéfices de la société sont alors systématiquement réinvestis dans la recherche et le développement afin de maintenir un rythme régulier de croissance. En 1990, la société se structure en un groupe constitué de différentes filiales. En 1991, *Agriconseil* franchit les frontières pour créer *Agriconseil-Espagne* à Valence. Le groupe est reconnu leader sur le marché de l'Informatique agricole, diffusant en France et dans le monde une gamme de 25 logiciels, couvrant l'ensemble des besoins de gestion en agriculture. A la fin des années 90, *Agriconseil* se lance dans l'activité internet et crée [www.terre-net.fr](http://www.terre-net.fr), premier portail d'information agricole. Le groupe *Agriconseil* poursuit son développement en Europe (Italie, Pays-Bas et Allemagne).

En 2002, le groupe *Agriconseil* rachète *Kerland* et *Likeland*. La première conçoit des logiciels destinés aux coopératives agricoles et groupements de producteurs, la seconde met à la disposition des conseillers en agriculture une gamme de logiciels pour l'environnement. A la même époque, pour élargir ses compétences en média électronique, *Agriconseil* rachète un leader en marketing direct agricole et son portail spécialisé en élevage : [www.web-agrl.fr](http://www.web-agrl.fr). Enfin, l'entreprise consolide sa présence en Europe et crée une filiale au Portugal.

*Geosatmaps*, entreprise spécialisée en matériel GPS (Global Positioning System) et système d'information géographique pour l'agriculture depuis 1997, rejoint le groupe *Agriconseil* en 2005 pour se positionner comme la filiale spécialiste des technologies GPS et de l'agriculture de précision. À la fin des années 2000, la presse spécialisée diffuse le classement des 20 plus grands acteurs français de l'édition de logiciels dans lequel *Agriconseil* est classée 16<sup>e</sup>.

En 2011, pour répondre aux besoins de sa clientèle et suivre les évolutions technologiques et notamment la problématique de l'intégration, *Agriconseil* crée une entité spécifique baptisée *Softfarm*. En 2012, *Agriconseil* poursuit son développement à l'international et franchit l'Atlantique par le rachat de *SIG Informatique*, leader du logiciel agricole au Canada. La même année, *Agriconseil* fait l'acquisition du groupe de presse *Agricola*. Ce rachat va lui permettre d'accélérer le développement de son activité média. Ce groupe de presse diffuse de manière payante différents hebdomadaires professionnels : *l'Avenir agricole*, *RIA* (Référence de l'Industrie Alimentaire), *la lettre viticole et du vin*, *l'Éleveur Laitier*. En 2013, de nouvelles filiales sont créées au Maroc puis en Roumanie.

## ANNEXE 2

---

### Intervention de Pierre Magnan créateur et PDG du groupe

« En créant *Agriconseil*, notre ambition était de mettre à la disposition des agriculteurs les technologies qui leur permettraient de gérer finement leur exploitation, comme de véritables chefs d'entreprise. Au fil du temps, nous avons décliné cette ambition à tous les acteurs de la filière agricole et viticole, en spécialisant les équipes par marché. Au-delà de l'édition et la diffusion de logiciels, nous avons progressivement spécialisé les équipes sur des technologies avancées qui évoluent quotidiennement : les solutions GPS, les services Internet, le développement et l'intégration d'applications spécifiques, les offres réseaux et télécoms.

Pour trouver des solutions pragmatiques et pérennes qui conviennent à nos clients nous nous engageons à être à leur écoute, pour bien comprendre les défis de leur métier, à proposer l'innovation qui leur sera utile et à accompagner l'entreprise dans la valorisation et l'évolution régulière de ses solutions.

L'innovation, le progrès et la pérennité sont au cœur de notre action quotidienne pour œuvrer durablement et travailler en toute confiance. »

## ANNEXE 3

---

### Les activités du groupe Agriconseil

Un pôle informatique (83 millions d'euros de chiffre d'affaires en 2014) regroupant notamment les filiales du groupe : *Agriconseil SA* et ses filiales étrangères et récemment *Softfarm*.

Un pôle média (58 millions d'euros de chiffre d'affaires) qui inclut le groupe de presse *Agricola*, *Terre-net*, *Webagri*.

La filiale *Agriconseil* propose des solutions progicielles, conçues pour répondre aux besoins administratifs, techniques et économiques d'une exploitation agricole ou viticole.

*Softfarm* propose des solutions et services d'intégration logicielle orientés nouvelles technologies et pour la gestion des petites exploitations agricoles.

Le groupe de presse *Agricola* est la référence en termes d'informations et d'expertises sur les contenus indispensables à l'agriculture et aux filières alimentaires.

*Terre-net* fournit une information quotidienne et des services électroniques pour les professionnels de l'agriculture, l'élevage et à la viticulture, par le biais de newsletters. *Web-agri* dispose de connaissance fine de toutes les exploitations agricoles françaises pour dynamiser l'efficacité commerciale des entreprises et favoriser le marketing direct.

## ANNEXE 4

---

### Les engagements du groupe Agriconseil

Les technologies de l'information et la communication mises en œuvre par *Agriconseil* depuis sa création à destination des professions agricoles et viticoles ont pour objectif d'accroître l'efficacité des exploitations et de maîtriser au mieux les ressources naturelles en limitant l'impact écologique des activités agricoles.

Le groupe *Agriconseil* représente 1 250 collaborateurs. Il propose 26 métiers différents permettant à ses collaborateurs de s'épanouir et d'évoluer. En effet :

- 52 promotions internes ont été réalisées ;
- 73 jeunes ont été recrutés sur le dernier exercice ;
- 300 heures de formation sont délivrées à tout nouvel arrivant ;
- plus de 5 % de la masse salariale sont consacrés à la formation.

Des évolutions de carrière offrent des places à responsabilités, aux salariés les plus impliqués et performants. En 2010, 3 595 jours de formation ont été dispensés auprès des salariés. Le budget consacré à cet effort est quatre fois supérieur au minimum légal. Un bilan individuel des souhaits de formation est établi chaque année avec les collaborateurs de l'entreprise.

### Au cœur de la mêlée...

« Plus qu'un sport, c'est un état d'esprit que nous soutenons à travers le rugby. L'esprit d'équipe, la solidarité, le respect et la convivialité sont des valeurs que nous soutenons à *Agriconseil* » explique Pierre Magnan, PDG fondateur d'*Agriconseil*. Les succès sont bels et bien au rendez-vous ! En novembre 2014, le XV Rugby Club (BRC XV) reçoit à l'Hôtel de Ville le trophée « challenge 51 de l'Offensive et du Fair play » qui récompense les équipes de rugby françaises qui ont marqué le plus d'essais et ont été le moins sanctionnées durant la saison.

### Dès l'école de Rugby...

Le BRC XV, c'est également une école ouverte aux grands comme aux tout petits « Poussins, Benjamins, Minimes ». *Agriconseil* soutient cette école en offrant aux salariés et à leurs enfants des facilités pour leur inscription.

### Agriconseil solidaire des agriculteurs sinistrés par Xynthia, tempête qui dévasté la région vendéenne en 2010.

Quelques semaines après le drame, *Agriconseil* a remis un peu plus de 35 000 €

à la fédération départementale des syndicats des exploitants agricoles (FDSEA) et aux jeunes agriculteurs de Vendée afin de soutenir les exploitants agricoles sinistrés par Xynthia, l'une des pires tempêtes que la région ait connue.

## ANNEXE 5

---

### L'entité Softfarm, filiale du groupe Agriconseil

*Softfarm* propose depuis 2011 des solutions Informatiques intégrées et orientées sur les nouvelles technologies mobiles.

*Softfarm* est une entité dédiée à ce champ de développement. Elle travaille à l'intégration et à la modernisation des modules de gestion pour des exploitations de plus petite taille. *Softfarm* accompagne actuellement plus de 1 500 exploitations agricoles et s'appuie sur son expertise et ses savoir-faire en édition de logiciels, services d'assistance, matériels, réseaux, hébergement et télécoms.

*Softfarm* propose une offre logicielle de type PGI (progiciel de gestion intégré) évolutive en s'appuyant sur d'importants efforts de recherche et développement. L'objectif est la satisfaction du client grâce à des applications simples et intuitives, ergonomiques et performantes, innovantes, fiables et faciles à administrer et évolutives. A cela s'ajoute les nouveaux outils permettant la mobilité, l'accès à distance des informations, le travail collaboratif et les échanges de données sécurisés avec les parties prenantes. Il est donc aujourd'hui possible de gérer en ligne sa comptabilité, ses données sociales... tout en maîtrisant son budget grâce à des contrats de long terme.

## ANNEXE 6

---

### Intervention d'Anna Audourd, directrice de Softfarm

« C'est un fait : tout change de plus en plus rapidement dans notre environnement. Et vous savez, la profession agricole n'est pas épargnée par ce mouvement ! Déréglementation des services, réglementations et exigences de rentabilité accrues, concurrence internationale, ... Mais aussi, et c'est moins connu, un nouveau saut technologique : la convergence des mondes « Web » et « réseau ».

Cette évolution oblige à repenser la réécriture des applications et logiciels à destination de la profession agricole, au-delà du simple changement de bases de données.

*Softfarm* œuvre pour accompagner ces mutations qui touchent la profession agricole. Dans ce contexte, l'efficacité des futures solutions informatiques doit reposer non seulement sur la qualité, la fiabilité et l'innovation, mais aussi sur une approche globale des services et sur un modèle économique moderne et différenciant. Aujourd'hui, c'est un nouveau challenge qui nous attend, celui de l'informatique dans le nuage et de l'agrégation des données clients collectées à travers l'usage de notre PGI « en-ligne ».

## ANNEXE 7

---

### Extraits de la fiche informative de Softfarm

Softfarm propose une gamme intégrée de logiciels pour le cœur de métier de ses clients :

- un module comptable, pour la réalisation des états courants de la comptabilité d'une exploitation agricole,
- un module permettant la gestion commerciale,
- un outil de gestion documentaire et de veille réglementaire en matière d'agriculture,
- un outil de gestion du patrimoine agricole,
- des applications Web mobiles permettant d'être sur le terrain et de mettre à jour les données,
- des outils de travail collaboratif avec les partenaires (Chambres d'agriculture, Préfectures, syndicats professionnels...),
- les paramétrages spécifiques et éditions personnalisées selon l'activité du client,
- un service d'assistance chez le client, également disponible à distance,
- la proposition de matériels, de réseaux et de télécom afin d'adapter le matériel informatique aux besoins de l'entreprise.

## ANNEXE 8

---

### Données sociales du service Conseils et formation aux clients

Il y a actuellement 120 techniciens et ingénieurs logiciels, organisés en équipe de 10 personnes spécialisées, au sein de *Softfarm*.

Le rôle de ce service est de concevoir et fiabiliser les futures versions, développer les nouvelles fonctionnalités liées au mode Saas, gérer le contrat d'hébergement et autres sous-traitants liés au projet Saas, conseiller et assister techniquement par téléphone les clients pour qu'ils valorisent pleinement les logiciels proposés ; former les clients sur différentes fonctionnalités.

En termes de profil recherché, il faut être détenteur d'un BTS, DUT ou d'une licence de gestion, informatique ou agricole ou d'un certificat de spécialisation, disposer d'un sens du service pour assister et dépanner le client, avoir une réelle capacité d'écoute.

Différentes perspectives de carrières existent au sein du groupe. Un conseiller formateur auprès de la clientèle peut devenir technicien contrôle qualité, consultant métier, manager, chef de produit (Marketing).

Une quarantaine de techniciens d'Agriconseil ont participé à la création de *Softfarm* en 2011.

**Structure par âges du service de « Conseil et formation » en 2014**

Age du personnel	Effectif
15-25 ans	40
26-35 ans	30
36-45 ans	30
46-55 ans	19
> 55 ans	1

**Evolution des effectifs du service « Conseil et formation »**

Postes	2012	2013	2014
Encadrement	8	10	12
Directeur	1	1	1
Conseiller « junior »	40	50	60
Conseiller « senior »	31	39	47
Total	80	100	120

**Départs : motifs des départs à l'initiative de salarié et d'employeur**

Année	Initiative du salarié	Démission	Fin essai salarié	Fin CDD salarié	Initiative de l'employeur	Licenciement	Fin essai employeur	Fin CDD employeur	Total départ
2012	6	5	0	1	4	1	2	1	10
2013	10	8	1	1	5	1	3	1	15
2014	12	8	2	2	6	2	3	1	18

**Départs par tranche d'ancienneté dans le poste**

Année	0-12 mois	12-24 mois	2-3 ans	Total
2012	6	4	0	10
2013	10	5	0	15
2014	12	4	2	18

**Recrutements annuels de 2012 à 2014**

Année	Recrutements (temps plein et partiel)
2012	20
2013	35
2014	38

Indicateur	Modalité de calcul	2012	2013	2014
Taux de rotation du personnel	Nombre de départs annuels / Effectif moyen de l'année	13 %	15 %	-
Efficacité du recrutement	(Nombre d'embauche de l'année - nombre de départ parmi ces embauches) / nombre d'embauches de l'année	70 %	71 %	-

**ANNEXE 9****Offres de PGI en mode Saas : l'heure de la maturité ? (extrait de la presse spécialisée)**

L'émergence récente d'une vaste offre Saas (*Software as a service*) dans le domaine des PGI – progiciels stratégiques par excellence – traduit l'arrivée à maturité de ce mode de commercialisation. L'entrée en lice du leader SAP a conforté le marché. L'offre reste généralement basée sur des progiciels traditionnels tels que ceux de Cegid, Generix, Sage, Divalto ou SAP. Mais ces produits ont beaucoup évolué. Tous fonctionnent désormais nativement en mode Web voire Web 2.0. Et la plupart reposent sur une plate-forme technique qui peut être mutualisée pour plusieurs clients.

**Interlocuteur unique : une notion variable**

Il existe trois types d'acteurs sur le marché : les éditeurs, les éditeurs logiciels historiques et les « pure players ». Les premiers, comme Cegid ou SAP, qui cumulent des offres en modes licence et Saas, se posent d'autant mieux en interlocuteurs uniques qu'ils vont jusqu'à prendre en charge le projet de personnalisation. Les prestataires spécialisés comme Prodware ou Aspaway s'appuient pour leur part sur les progiciels d'éditeurs tiers tels que Generix, Sage ou Divalto (qui ne sont eux-mêmes pas présents sur ce marché) et parfois sur des intégrateurs tiers. Enfin, les *pure players* développent leurs propres plates-formes et se consacrent essentiellement au mode Saas. En France, ce n'est le cas que pour Ines. *Pure player* par excellence, l'américain NetSuite n'a pas encore franchi l'Atlantique.

**Infrastructure : une offre qui va jusqu'au réseau**

Le volet infrastructure représente la différence majeure avec le mode licence. C'est en effet le prestataire qui héberge l'ensemble des systèmes, les administre, procède aux sauvegardes et met en œuvre un plan de continuité d'activité. Traditionnellement, le volet réseau faisait seulement l'objet de conseil – typiquement une connexion internet de qualité professionnelle – mais certains prestataires le prennent en charge. C'est le cas de Prodware ou d'Aspaway, qui se targuent ainsi de délivrer un service de bout en bout.

### Une offre adaptée aux PME/PMI ?

Rappelons que l'offre Saas, s'adresse avant tout à des PME/PMI, même si dans le cas de celle de SAP il s'agit déjà de grosses PME/PMI. A l'inverse, un acteur français fait figure de précurseur : il s'agit de Proginov, qui met son ERP complet à disposition des utilisateurs en mode Saas, prenant de fait en charge également tous les aspects hébergement. Un tiers des clients de l'éditeur a déjà adopté ce mode de fonctionnement. Malgré cela, il faut bien constater que l'adoption des ERP en mode Saas marque le pas. Les raisons à cela sont à rechercher du côté de la complexité des applications elles-mêmes, bien sûr, comparativement à des pans d'applications métier. Mais on observe des freins plus traditionnels, comme la nécessité de redéfinir les procédures de l'entreprise ou les aspects liés à la sécurité, pas toujours très clairs pour le décideur. Du côté des éléments plus moteurs et positifs, notons les gains potentiels en ressources informatiques liés au modèle Saas, qui permettent à l'entreprise de faire autre chose que de se consacrer à la maintenance du PGI, le côté facilité d'implémentation ou encore la maîtrise (théorique au moins) des coûts. Ceux-ci finiront-ils par l'emporter, même s'il faut plus de temps que prévu ? Pour l'heure, l'avenir demeure incertain.

### Progiciels de gestion ciblant les petites PME

Offre	Fonctions	Tarification (par mois et par utilisateur)
<i>Sage Ligne 100</i>	<i>Comptabilité, gestion commerciale, Immobilisations</i>	<i>A partir de 80 €</i>
<i>Tiny Saas</i>	<i>Comptabilité, finances, gestion de la production, des stocks, gestion logistique, gestion des commandes, RH, CRM</i>	<i>50 à 150 €</i>
<i>ITool</i>	<i>Comptabilité, gestion commerciale, gestion documentaire</i>	<i>9 à 20 € selon module et nombre d'écritures</i>

## ANNEXE 10

## BILAN Softfarm 2014 – ACTIF

## ANNEXE 10 : BILAN Softfarm 2014 – ACTIF (1/2)

Déclaration souscrite en euros		Exercice 2014, clos le : 31/12/2014			31/12/2013	
		Brut	Amortissements, provisions	Net	Net	
Capital souscrit non appelé (I)		AA			0	
ACTIF IMMOBILISÉ*	IMMOBILISATIONS INCORPORELLES	AB	AC	0		
	Frais d'établissement*	AD	AE	0		
	Frais de recherche et de développement*	AF	AG	640 468	198 755	
	Concession, brevets et droits similaire	AH	AI	0		
	Fonds commercial (§)	AJ	AK	0		
	Autres immobilisations incorporelles	AL	AM	0		
	Avances et acomptes sur immobilisations incorporelles	AN	AO	0		
	Terrains	AP	AQ	144 355	110 849	
	Constructions	AR	AS	28 655	18 023	
	Installations techniques, matériels et outillage industriels	AT	AU	1 478 536	1 943 920	
	Autres immobilisations corporelles	AV	AW	0		
	IMMOBILISATIONS CORPORELLES	AX	AY	0		
Avances et acomptes sur immobilisations corporelles	CS	CT	0			
Participations évalués par mise en équivalence	CU	CV	0			
Autres participations	BB	BC	0			
Créances rattachées à des participations	BD	BE	0			
Autres titres immobilisés	BF	BG	0			
Prêts	BH	BI	0			
Autres immobilisations financières*						
<b>TOTAL (II)</b>		BJ	BK	1 867 691	2 271 547	
3 050 676				1 182 985		
ACTIF CIRCULANT	STOCK*	BL	BM	0		
		Matières premières, approvisionnements	BN	BO	0	
		En cours de production de biens	BP	BO	0	
		En cours de production de services	BR	BS	0	
		Produits intermédiaires et finis	BT	BU	0	
	Marchandises	BV	BW	34 675	13 145	
	Avances et acomptes versés sur commandes	BX	BY	4 847 288	3 674 676	
	Clients et comptes rattachés* (3)	BZ	CA	0		
	Autres créances (3)	CB	CC	0		
	Capital souscrit et appelé, non versé	CD	CE	0		
BIENES	CF	CG	24 278	88 732		
	Valeurs mobilières de placement (dont actions propres)	CH	CI	81 517	94 089	
Disponibilités						
Charges constatées d'avance* (3) (E)		CJ	CK	4 987 758	3 870 642	
<b>TOTAL (III)</b>				32 712		
5 020 470				4 987 758	3 870 642	
COMPTES DE COLLABORATION	Charges à répartir sur plusieurs exercices* (IV)	CL		0		
	Primes de remboursement des obligations (V)	CM		0		
	Ecart de conversion actif* (VI)	CN		0		
	<b>TOTAL GÉNÉRAL (I à VI)</b>	CO	IA	1 215 697	6 855 449	6 142 189
8 071 146				6 855 449	6 142 189	

Les charges constatées d'avance sont liées à l'exploitation

**ANNEXE 10 (suite) : BILAN Softfarm 2014 – PASSIF (2/2)**

		(Ne pas reporter le montant des centimes)*		Exercice 2014	Exercice 2013
CAPITAUX PROPRES	Capital social ou individuel (1)* (dont versé.....)	DA		1 020 000	1 020 000
	Primes d'émission, de fusion, d'apports, .....	DB			
	Écarts de réévaluation (2)* (dont écart d'équivalence <input type="checkbox"/> EK <input type="checkbox"/> )	DC			
	Réserve légale (3)	DD		52 000	38 000
	Réserves statutaires ou contractuelles	DE			
	Réserves réglementées (3)* (Dont réserve spéciale des provisions pour fluctuations des cours) <input type="checkbox"/> B1 <input type="checkbox"/> )	DF			
	Autres réserves (Dont réserve relative à l'achat d'œuvres originales d'artistes vivants) <input type="checkbox"/> EJ <input type="checkbox"/> )	DG		626 650	492 670
	Report à nouveau	DH			
	RÉSULTAT DE L'EXERCICE (bénéfice ou perte)	DI		315 403	336 947
	Subvention d'investissement	DJ			
	Provisions réglementées*	DK			
		<b>TOTAL (I)</b>	DL		<b>2 014 053</b>
Autres fonds propres	Produits des émissions de titres participatifs	DM			
	Avances conditionnées	DN			
	<b>TOTAL (II)</b>	DO		<b>0</b>	<b>0</b>
Provisions pour risques et charges	Provisions pour risques	DP		13 527	35 721
	Provisions pour charges	DQ			
	<b>TOTAL (III)</b>	DR		<b>13 527</b>	<b>35 721</b>
DETTES (4)	Emprunts obligataires convertibles	DS			
	Autres emprunts obligataires	DT			
	Emprunts et dettes auprès des établissements de crédit (5)	DU		4 197 117	3 475 948
	Emprunts et dettes financières diverses (Dont emprunts participatifs) <input type="checkbox"/> EI <input type="checkbox"/> )	DV			
	Avances et acomptes reçus sur commandes en cours	DW			
	Dettes fournisseurs et comptes rattachés	DX		474 545	596 919
	Dettes fiscales et sociales dont IS 10N = IS 10N-1=	DY		132 442	124 031
	Dettes sur immobilisations et comptes rattachés	DZ			
	Autres dettes	EA			
Compte réquil	EB		23 765	21 953	
	<b>TOTAL (IV)</b>	EC		<b>4 827 869</b>	<b>4 218 851</b>
	Écarts de conversion passif* <b>(V)</b>	ED			
	<b>TOTAL GÉNÉRAL (I à V)</b>	EE		<b>6 855 449</b>	<b>6 142 189</b>
RENVIS	(1) Ecart de réévaluation incorporé au capital	EB			
	(2) Dont {	Réserve spéciale de réévaluation (1959)	EC		
		Ecart de réévaluation libre	ED		
		Réserve de réévaluation (1976)	EE		
	(3) Dont réserve réglementée des plus-values à long terme*	EF			
(4) Dettes et produits constatés d'avance à moins d'un an	EG				
(5) Dont concours bancaires courants et soldes créditeurs de banques et CCP	EH		920 598	248 340	

Les produits constatés d'avance sont liés à l'exploitation

## ANNEXE 11

---

### Informations relatives au développement de la solution en mode Saas

L'évolution de l'activité logicielle, conduit *Softfarm* à proposer le mode Saas comme une forme de commercialisation de son PGI. La nouvelle offre nécessitera un investissement en recherche et développement et en infrastructures réseau d'un montant de 500 000 €. Il sera considéré que le rythme de consommation des avantages économiques attendus sera calculé, faute de mode mieux adapté, par un calcul linéaire sur 5 ans.

Pour héberger les serveurs de ses clients, un abonnement annuel chez un grand hébergeur est prévu à concurrence de 800 € par exploitation agricole cliente par an. Les charges de gestion d'un compte client sont globalement estimées à 50 € par an et par exploitation agricole cliente. Des frais publicitaires sont programmés dans les revues spécialisées à hauteur de 20 000 €, uniquement la première année, afin de pénétrer très rapidement le marché. L'activité nécessite l'embauche de quatre salariés ingénieurs et techniciens dont la rémunération individuelle brute annuelle moyenne s'élève à 35 000 €. Les charges patronales sont estimées à 42 % du salaire brut. La rémunération est considérée comme fixe.

Dans son business plan, *Softfarm* a fixé, compte tenu de ses ressources, son objectif commercial à 1 000 petites exploitations en Europe dès la première année avec 2 utilisateurs par exploitation en moyenne. Compte tenu de la concurrence, l'offre est proposée à 50 € par mois et par utilisateur. Le prix pourrait augmenter à 55 € dès la seconde année, en cas de succès commercial la première année, tout en gardant l'objectif commercial.

## ANNEXE 12

---

### Documentation spécialisée sur les systèmes d'information

**PGI** : un **Progiciel de Gestion Intégré** est une application informatique dont le but est de coordonner les activités de l'entreprise. Les domaines fonctionnels intégrés au PGI sont plus ou moins étendus et spécialisés selon le degré d'intégration du système d'information. Le principe fondateur d'un PGI est de construire des applications informatiques (gestion des commandes, des stocks, de la comptabilité, etc.) de manière modulaire et intégrée au niveau des traitements offerts (les différents modules qui le composent sont indépendants mais parfaitement compatibles entre eux) et de manière rigoureuse et cohérente au niveau des données gérées (partage d'une base de données unique et commune).

**SAAS** : le **logiciel en tant que service** ou **Software as a Service** (Saas) est un modèle d'exploitation commerciale des logiciels dans lequel ceux-ci sont installés sur des serveurs distants plutôt que sur la machine de l'utilisateur. Les clients ne paient pas de licence d'utilisation pour une version, mais payent un abonnement récurrent pour utiliser le service en ligne. Les inducteurs de facturation peuvent être fixes ou variables. Le *logiciel en tant que service* (Saas) est donc la livraison conjointe de moyens, de services et d'expertise qui permet aux entreprises d'externaliser intégralement un aspect de leur système d'information (messagerie, sécurité, gestion...) et de l'assimiler à un coût de fonctionnement plutôt qu'à un investissement.

## CORRIGÉ

*Par Quentin Leroux, professeur au lycée les Bruyères à Sotteville-les-Rouen et Xavier Schneider, professeur au lycée Chevrollier à Angers.*

Ce corrigé comprend, pour chaque question :

- des conseils méthodologiques (compréhension des termes de la question, annexes à mobiliser, raisonnement, etc.),
- des éléments de corrigé proprement dit.

### DOSSIER 1 - LES AXES STRATÉGIQUES DU GROUPE AGRICONSEIL

#### 1. Présenter les finalités et les domaines d'activité stratégique du groupe Agriconseil

##### Conseils aux candidats

C'est une question simple et classique. Deux conseils :

- Structurer la réponse en utilisant une typologie (les différentes catégories de finalités) ;
- Ne pas se contenter d'une réponse descriptive. Ici, il était possible de faire le lien entre les finalités et la politique de financement, de présenter les critères de segmentation stratégique aboutissant à la détermination des DAS...

##### Éléments de corrigé

Les finalités sont la raison d'être de l'entreprise, c'est-à-dire l'idée philosophique ou politique que l'entreprise se fait de son existence. Il est possible de distinguer :

- les finalités économiques et financières : Agriconseil, au-delà des finalités classiques telles que la pérennité ou la satisfaction des clients, cherche à démocratiser l'utilisation de l'informatique auprès des agriculteurs. Un équilibre est recherché entre la qualité de service, l'innovation et les performances financières, afin de permettre un autofinancement de la croissance, le groupe souhaitant préserver son indépendance financière.
- les finalités sociales, écologiques et éthiques : les solutions logicielles proposées par Agriconseil facilitent la mise en œuvre d'une agriculture respectueuse de l'environnement (maîtrise des ressources naturelles, limitation de l'impact écologique de l'activité agricole) ; par ailleurs, le groupe cherche à favoriser la promotion interne et a mis en place un dispositif de formation et de gestion des carrières ; enfin, l'éthique se matérialise par un soutien aux agriculteurs (aide aux agriculteurs sinistrés par la tempête).

Il est possible de distinguer trois domaines d'activités stratégiques (sous-ensembles d'activités homogènes, régis par des facteurs clés de succès communs, faisant l'objet d'une stratégie spécifique), avec, pour chacun, les filiales correspondantes :

- Un DAS « informatique », qui comprend les activités réalisées par Agriconseil SA et Softfarm. Ces deux filiales s'appuient sur des ressources et des compétences communes (création et vente de solutions logicielles) et appartiennent à un espace concurrentiel commun.
- Un DAS « média », qui comprend les activités réalisées par Agricola, Terre-Net et Webagri. Quel que soit le canal utilisé, il s'agit de diffuser des informations à destination des agriculteurs.

- Un DAS plus récent, créé à la suite du rachat de l'entreprise Geosatmaps, spécialisée dans les technologies GPS à destination de l'agriculture. Il est néanmoins possible que cette activité soit considérée comme une sous-partie du DAS « informatique ».

Il y a des synergies importantes entre ces trois DAS (clients communs, synergies technologiques comme les ressources et compétences en informatique).

## **2. Caractériser les différentes étapes du développement de ce groupe (direction, modalités et voies de développement des trente dernières années) et apprécier la pertinence de chaque choix opéré**

### Conseils aux candidats

Le vocabulaire utilisé pour formuler cette question est ambigu (étapes du développement, direction...), mais on peut légitimement considérer que cette question porte sur les choix stratégiques du groupe. Il est alors judicieux de « classer » ces choix en fonction des typologies étudiées en classe (stratégie globale, stratégie d'activité ou de domaine, modalités de développement...) afin de structurer la réponse. Il n'y a pas UNE solution et le vocabulaire utilisé est variable selon les auteurs, les enseignants, etc.

### Éléments de corrigé

Plusieurs choix stratégiques sont identifiables :

- Une stratégie globale de diversification concentrique (ou liée), le développement de l'activité média et des technologies GPS se faisant autour de la clientèle initiale. L'entreprise s'est donc appuyée sur des synergies (commerciales, technologiques) pour se développer et a ainsi pu saisir des opportunités de croissance et répartir ses risques, tout en gardant une identité claire. La progressivité de la diversification a permis à l'entreprise d'éviter une dispersion de ses ressources, inconvénient fréquent de ce type de stratégie.
- Une stratégie de différenciation, qui se caractérise par un accent mis sur le conseil aux clients, la proposition d'offres adaptées à leur taille (PGI classique pour les grandes exploitations, PGI en mode Saas pour les petites exploitations).
- Des modalités de développement multiples :
  - Une croissance interne, s'appuyant notamment sur la conquête régulière de nouveaux clients, le développement de la gamme de solutions logicielles proposées, l'ajout progressif de nouveaux modules ;
  - Une croissance externe, massive, puisque l'histoire du développement du groupe est celle d'une succession de rachats d'entreprises existantes. Cette stratégie permet d'accéder rapidement à des ressources et marchés existants. Elle est coûteuse mais a néanmoins pu être menée par recours à l'autofinancement ;
  - Une stratégie d'internationalisation (en Europe, Amérique du Nord et au Maroc), par la création de filiales étrangères, afin d'obtenir de nouveaux débouchés.

### 3. Évaluer les conséquences de l'acquisition du groupe de presse Agricola sur la structure organisationnelle et le système d'information du groupe Agriconseil

#### Conseils aux candidats

La notion de structure apparaît dans le préambule du programme (à partir de la session 2016, le nouveau programme a introduit l'étude plus détaillée du concept), mais n'est pas approfondie ensuite. Les problématiques spécifiques liées à la structure (lien entre structure et stratégie, structure multidivisionnelle pour accompagner la stratégie de diversification, formalisation de la structure consécutive à l'augmentation de sa taille, par exemple) ne pouvaient donc être exigées des candidats. Il était néanmoins possible de formuler une réponse générale. L'impact de l'acquisition d'Agricola sur le système d'information du groupe Agriconseil pouvait en revanche être étudié plus précisément, mais de façon théorique, puisqu'aucune annexe n'apporte de précision.

#### Éléments de corrigé

L'acquisition d'une entreprise a des conséquences sur l'organisation de la société acquéreuse : organisation du travail, structure, mais aussi système d'information. La structure étant la somme totale des moyens employés pour diviser le travail et le coordonner, une acquisition a nécessairement des conséquences, mais elles dépendent des choix effectués : l'organisation de l'entreprise cible est-elle conservée ? Une division spécifique est-elle créée ? Les équipes sont-elles intégrées à la structure existante ? L'intégration de la nouvelle unité se traduira probablement par une redéfinition de certains processus, de certaines tâches.

Les conséquences sur le système d'information peuvent être envisagées d'un point de vue théorique. Selon la définition proposée par Reix, Fallery, Kalika et Rowe, un système d'information est un ensemble organisé de ressources (matériel, logiciels, personnel, données, procédures...) permettant d'acquérir, de traiter, de stocker des informations dans et entre des organisations.

Un système d'information se construit progressivement (des investissements sont effectués, des procédures sont mises en place, des personnels sont formés, des changements sont effectués par accompagner la croissance de l'organisation, etc...).

L'acquisition d'une entreprise par une autre se traduit par la coexistence de deux systèmes d'information et accroît la fragmentation de l'ensemble. Les données, les applications et les processus ont toutes les chances d'être hétérogènes, ce qui va avoir pour effet de multiplier les risques d'erreur ou de redondances et d'accroître les coûts administratifs, en particulier si un partage de l'information entre les deux systèmes est nécessaire. Afin de faciliter le traitement, la circulation et le stockage de l'information, il est donc souvent nécessaire d'assurer l'intégration du système d'information (unification des données, uniformisation des processus). Un progiciel de gestion intégré permet cette intégration. Dans le cas d'Agriconseil, il faudrait étudier précisément les synergies possibles entre les activités du groupe et Agricola pour déterminer si une refonte du système d'information est nécessaire. Une mutualisation des infrastructures (serveurs par exemple) est envisageable. Une étude comparée des processus et des méthodes pourra aussi permettre de s'inspirer des meilleures pratiques de chacune des organisations. On peut suppo-

ser que les compétences et ressources en informatique détenues par Agriconseil seront utiles dans ce contexte.

#### **4. Préciser en quoi le groupe Agriconseil cherche à assumer une responsabilité sociale d'entreprise**

##### Conseils aux candidats

C'est une question simple qui fait appel à un concept important en management, la responsabilité sociale (ou sociétale) des entreprises. Il est donc nécessaire de le définir, d'en montrer l'intérêt et de mobiliser les annexes pour donner des éléments précis d'argumentation (tous les éléments figurent dans l'annexe 4). Certains éléments de réponse ont déjà pu être intégrés la question 1, qui portait sur les finalités de l'entreprise (et donc logiquement, sur les éléments liés à la RSE). Le piège à éviter ici est bien sûr la paraphrase ou la recopie des annexes.

##### Éléments de corrigé

On désigne par responsabilité sociale ou sociétale des entreprises (RSE) la prise en compte, par les entreprises, des externalités de leur activité. Cette responsabilité comporte des dimensions environnementales (prise en compte des préoccupations écologiques et des dégradations de l'environnement), sociales (prise en compte des effets sur l'emploi, le niveau de formation, l'employabilité...) et éthiques (prise en compte des dimensions morales – respect des droits de l'homme, lutte contre les discriminations par exemple). La RSE, d'abord vue comme une contrainte imposée par les parties prenantes, peut aussi être transformée en avantage concurrentiel. Elle aussi un outil de motivation des salariés.

Plusieurs éléments permettent de montrer que le groupe Agriconseil cherche à s'inscrire dans ce mouvement, dans les trois domaines identifiés ci-dessus (voir question 1) :

- la dimension environnementale : les solutions logicielles permettent la maîtrise des ressources naturelles ;
- la dimension sociale grâce à la promotion interne, la formation (avec un budget quatre fois supérieur au minimum légal), la gestion des carrières, etc. ;
- dimension éthique avec le soutien aux agriculteurs en difficulté.

Le dispositif de parrainage du club de rugby peut également être cité, mais il peut aussi s'apparenter à une stratégie de communication visant à s'approprier les valeurs véhiculées par un sport...

#### **5. Identifier les avantages et les risques du mode de gouvernance du groupe Agriconseil et proposer des pistes de communication globale du groupe**

##### Conseils aux candidats

La notion de gouvernance est complexe et renvoie largement aux éléments déjà développés dans la question précédente (la gouvernance désigne en effet l'ensemble des dispositifs mis en place pour intégrer les parties prenantes dans le processus de décision et contrôler / limiter le pouvoir des dirigeants d'une entreprise). Aucun élément autre que ceux déjà traités dans les questions 1 et 4 n'étant proposé dans les annexes, la question renvoie donc probablement aux

éléments plus spécifiquement liés à la structure du capital (entreprise familiale) et du conseil d'administration de cette entreprise. Sur le plan méthodologique, cela montre la nécessité d'adapter la compréhension des termes d'une question aux éléments d'analyse fournis dans le sujet. La spécificité des entreprises familiales ne faisant pas l'objet d'une étude particulière dans le programme de management de classe préparatoire, les candidats doivent faire preuve de bon sens et mobiliser leurs connaissances, par exemple sur les modes de financement. La seconde partie de la question invite les candidats à formuler des propositions de communication globale. Il s'agit, dans ce cas, de mobiliser ses connaissances en termes de communication (objectifs, cibles, moyens...) pour structurer la réponse, la communication globale comprenant logiquement des dimensions externes et internes. Les annexes contiennent quelques éléments sur la communication actuelle du groupe, mais aucun permettant de repérer des pistes de communication pour l'avenir. Le plus prudent est donc d'analyser la communication actuelle du groupe et d'analyser sa pertinence, pour en déduire des propositions d'amélioration. La mobilisation du vocabulaire spécifique à la communication est essentielle ici. Enfin, il n'y a pas de lien évident entre la première et la seconde partie de la question.

#### Éléments de corrigé

L'introduction du dossier 1 précise que l'actuel PDG d'Agriconseil est l'un de ses créateurs et que plusieurs membres de la famille siègent au conseil d'administration. Même si nous ne connaissons pas exactement la structure du capital, cela suggère un mode de direction typique des entreprises familiales, qui possède des avantages et des inconvénients.

Parmi les avantages fréquemment repérés, la préférence pour le long terme, qui permet de justifier un recours à l'autofinancement (les actionnaires savent renoncer à la distribution de dividendes pour permettre un financement plus indépendant des investissements – cet argument est clairement mis en avant dans l'introduction du cas) et favorise la capacité d'innovation et l'adaptation à l'environnement. La moindre fréquence des conflits entre actionnaires favorise aussi la stabilité stratégique. Toutefois, renoncer au financement externe peut aussi freiner la croissance de l'entreprise. On note toutefois une augmentation récente du recours aux emprunts bancaires, qui liée au départ annoncé de l'actuel PDG, laisse augurer une évolution du mode de gouvernance de cette entreprise. Le dossier 3 permettra d'ailleurs de montrer que l'endettement de la filiale Softfarm est préoccupant.

L'impact sur la gestion des ressources humaines est également contrasté : si l'on peut penser que l'orientation vers le long terme et l'investissement favorise un modèle de gestion des ressources humaines créateur d'emplois, générateur de confiance et de loyauté, fédérateur autour de la culture d'entreprise, on peut aussi craindre un management paternaliste qui ne favorise pas le renouvellement des compétences.

Une entreprise familiale doit donc rechercher le recrutement de cadres non issus de la famille, pour éviter les risques de myopie stratégique (on reproduit le modèle traditionnel) et les conséquences des éventuelles tensions au sein de la famille. Une diversification des membres du conseil d'administration permet aussi d'apporter un nouveau regard et d'éviter l'enracinement des membres familiaux (qui les pousserait à ne plus prendre en compte les exigences des actionnaires non-membres de la famille).

Pour ce qui est de la communication globale, un effort de définition est nécessaire : est globale une communication qui comprend des dimensions internes et externes et qui tente d'articuler de manière cohérente les différents moyens de communication utilisés. Le tableau suivant permet de présenter les éléments de communication déjà mis en œuvre et les pistes d'amélioration envisageables.

Communication actuelle			Améliorations ou pistes complémentaires
Cibles	Objectifs	Moyens de communication	
<i>Cible large, interne (salariés) et externe (cible directe, les clients, mais aussi cible relais, les journalistes)</i>	<i>Objectif affectif : véhiculer une image d'entreprise impliquée dans la communauté, associer à l'entreprise les valeurs d'un sport</i>	<i>Communication hors média : parrainage d'une équipe de rugby, soutien d'une école de rugby</i>	<i>Compléter ce dispositif par des relations presse afin de démultiplier le message et bénéficier de retombées presse (peu coûteux)</i>

En l'absence d'informations complémentaires, il s'agit donc d'une communication *a minima*, insuffisante pour une entreprise de cette taille. Agriconseil aurait tout intérêt, si elle ne le fait déjà, à utiliser les moyens traditionnels d'une communication en B to B (*business to business*) : édition commerciale, présence dans les salons professionnels... Le groupe pourrait également utiliser les différents supports média qu'elle possède après le rachat du groupe Agricola dans le cadre d'une communication média, ainsi que le média internet, indispensable dans ce secteur d'activité. Cette communication pourrait être à la fois commerciale (communication produit pour informer les clients et les prospects sur les caractéristiques des produits sur un marché en constante évolution technologique, communication de marque pour conforter sa notoriété) et institutionnelle (information sur les différents éléments de la politique de RSE). Une politique de communication directe auprès des agriculteurs compléterait utilement ce dispositif et permettrait d'atteindre des objectifs à la fois cognitifs (newsletters présentant les évolutions de l'offre par exemple) et conatifs (offres personnalisées favorisant l'acte d'achat).

Enfin, la communication globale incluant la communication interne, Agriconseil aurait intérêt (mais c'est peut-être déjà le cas) à inclure un dispositif permettant de viser spécifiquement les salariés (avec des moyens adaptés, l'intranet en particulier). Ce serait cohérent avec l'analyse qui est proposée dans le dossier 2, qui révèle des tensions et des insuffisances dans ce domaine.

## DOSSIER 2 - L'ADAPTATION DES RESSOURCES HUMAINES AUX NOUVEAUX BESOINS

**1. Identifier les facteurs clés de succès sur le marché des logiciels de gestion puis indiquer l'origine de l'avantage concurrentiel de Softfarm dans ce domaine.**

### Conseils aux candidats

Cette question invite les candidats à étudier le marché des logiciels de gestion. Les annexes à mobiliser pour y répondre sont les annexes 5, 6, 7 ainsi que l'annexe 9. Elles ne s'intéressent pas de manière générale à ce marché mais à un de ses segments, à savoir la commercialisation des progiciels de gestion intégrés, en particu-

lier en mode Saas. Faute de disposer d'éléments probants sur le marché en général, l'identification des FCS n'a donc de validité que sur ce segment. Cette question mobilise deux notions différentes mais complémentaires de l'analyse stratégique, celles de facteur-clé de succès et d'avantage concurrentiel. Il est attendu des candidats qu'ils les définissent clairement avant toute tentative de réponse et qu'ils fassent apparaître le lien entre elles.

#### Éléments de corrigé

Les facteurs-clés de succès (FCS) représentent les éléments stratégiques qu'une entreprise doit maîtriser pour être (et rester) compétitive sur un marché donné. Ils sont donc déduits du diagnostic stratégique externe. Ils ne sont pas immuables : leur nature et leur importance respectives changent avec le temps. Lorsqu'une entreprise maîtrise un FCS relativement mieux que la concurrence, elle détient un avantage concurrentiel. Pour ce faire, elle mobilise des ressources spécifiques et des compétences-clés.

Sur le marché des logiciels de gestion, en particulier celui des progiciels de gestion intégrés (PGI), le premier FCS que doivent maîtriser les trois types d'offres (les éditeurs, les éditeurs logiciels historiques et les « pure-players »), recouvre leur **capacité à proposer une offre en réseau**. Ce FCS est relativement nouveau. Il est naturellement maîtrisé par les pure-players, encore peu présents en France mais les acteurs historiques comme Cegid ou Sage ont réussi à faire évoluer leur offre en ce sens. C'est également le cas de Softfarm. Pour autant, cela ne constitue pas un avantage concurrentiel pour la structure puisqu'elle ne le maîtrise *a priori* pas mieux que ses concurrents et ne mobilise pas des ressources et de compétences différentes pour ce faire. Elle a su uniquement s'y adapter.

Ce n'est pas le cas du second FCS qui correspond à la **capacité à proposer une offre à la fois globale** (dans le sens où elle est susceptible de gérer l'ensemble des fonctions de l'entreprise : comptabilité, marketing, gestion de la paie...) **et spécifique** (c'est-à-dire adaptée aux besoins des clients tant en matière de secteur d'activité que de taille de la structure). Softfarm maîtrise *a priori* ce FCS relativement mieux que la concurrence sur le segment de clientèle particulier que représentent les exploitations agricoles de petite taille, ce qui en fait pour elle un avantage concurrentiel. Son offre est ainsi spécifiquement adaptée à leurs besoins (simplicité d'utilisation, budget limité...), évolutive et prend fortement appui sur les technologies mobiles et collaboratives. Pour cela, Softfarm mobilise des ressources spécifiques (humaines, financières, matérielles...), au niveau du service d'assistance des clients mais aussi au niveau de la conception et du paramétrage du PGI utilisé par chacun de ses clients. La recherche et développement (R&D) joue ici un rôle clé sur lequel s'appuie clairement l'avantage concurrentiel de l'entité.

## **2. Proposer et calculer trois indicateurs pertinents afin d'évaluer les ressources humaines du service « Conseil et formation aux clients ».**

#### Conseils aux candidats

L'annexe 8 identifie déjà deux indicateurs RH, calculés uniquement pour les exercices 2012 et 2013, à savoir : le taux de rotation du personnel et le taux d'efficacité du recrutement. Compte-tenu de la formulation de la question 2, on peut supposer qu'elle invite le candidat à en proposer et à en calculer trois nouveaux afin de préparer la rédaction du diagnostic RH du service « Conseil et formations aux

clients » de la question 3. Par précaution, il peut néanmoins être utile de calculer la valeur du taux de rotation du personnel et du taux d'efficacité du recrutement pour l'exercice 2014.

### Éléments de corrigé

#### **Calcul du taux de rotation du personnel et du taux d'efficacité du recrutement pour l'exercice 2014**

	2014
Taux de rotation du personnel	15,00 %
Taux d'efficacité du recrutement	68,42 %

#### **Indicateur n° 1 – Poids de l'effectif salarié par classe d'âge en fonction de l'effectif total**

15-25 ans	26-35 ans	36-45 ans	46-55 ans	Plus de 55 ans
33,33 %	25,00 %	25,00 %	15,83 %	0,83 %

#### **Indicateur n° 2 – Taux de croissance des effectifs entre 2012 et 2014**

Encadrement	50,00 %
Directeur	0,00 %
Conseiller junior	50,00 %
Conseiller senior	51,61 %
Total	50,00 %

#### **Indicateur n° 3 – Poids des départs à l'initiative des salariés (respectivement des employeurs) dans le total des départs sur la période 2012 - 2014**

	Initiative salarié	Initiative employeur
2012	60,00 %	40,00 %
2013	66,67 %	33,33%
2014	66,67%	33,33%

#### **Autres indicateurs pertinents à calculer**

##### **Poids des démissions salariés dans le total des départs sur la période 2012 - 2014**

2012	50,00 %
2013	53,33 %
2014	44,44 %

##### **Taux d'évolution du nombre de recrutements sur la période 2012 – 2014**

2012	2013	2014	Total période
	75,00 %	8,57 %	90,00 %

### Poids des départs par tranche d'ancienneté dans le total des départs sur la période 2012 - 2014

	0 - 12 mois	12 - 24 mois	2 - 3 ans
2012	60,00 %	40,00 %	0,00 %
2013	66,67 %	33,33 %	0,00 %
2014	66,67 %	22,22 %	11,11 %

### 3. Présenter, dans une note d'une page, un diagnostic du service « Conseil et formation aux clients ».

#### Conseils aux candidats

Il est important de ne pas limiter l'analyse à une liste de constats construits, par exemple, sur la base des indicateurs de la question 2 mais de mettre en relation ces indicateurs ainsi que leur évolution entre eux. Le constat dynamique ainsi réalisé doit aboutir à la mise en exergue d'explications susceptibles de donner du sens aux tendances observées. De ce point de vue, la question 3 concluant l'étude du dossier 2, il peut être important de lier le diagnostic RH avec la problématique de ce dossier, à savoir l'adaptation des ressources humaines aux nouveaux besoins de l'entreprise. Il n'est pas attendu dans un diagnostic RH que les candidats aboutissent à des préconisations afin de répondre aux éventuels problèmes soulevés.

#### Éléments de corrigé

L'évolution du cadre stratégique du service « Conseil et formation aux clients » a des répercussions préoccupantes sur l'évolution de ses indicateurs RH. Si son développement s'accompagne logiquement d'une forte augmentation de ses effectifs (+50 % entre 2012 et 2014), l'augmentation plus que proportionnelle du nombre de recrutements (+90 % entre 2012 et 2014) témoigne du fait qu'il doit compenser un nombre toujours plus important de départs de salariés (+80 % entre 2012 et 2014). Cela se traduit d'ailleurs par une augmentation significative du taux de rotation du personnel entre 2012 et 2014 (+ 2 points).

Le service « Conseil et formation aux clients » est donc confronté à un problème majeur d'efficacité de recrutement. Ce problème a d'ailleurs tendance à s'aggraver comme en témoigne la diminution du taux d'efficacité du recrutement qui passe de 71,43 % en 2013 à 68,42 % en 2014. Force est en outre de constater que les départs concernent majoritairement des salariés dont l'ancienneté est inférieure à un an (60 % des départs en 2012 et 66,67 % en 2013 comme en 2014) et qu'ils résultent principalement de l'initiative des salariés eux-mêmes (60 % des départs en 2012 et 66,67 % en 2013 comme en 2014).

En l'absence d'informations sur leur niveau de rémunération, nous pouvons en conclure que les salariés nouvellement recrutés ne disposent pas des compétences suffisantes pour exercer les missions qui leur sont confiées et/ou qu'ils ne travaillent pas dans un environnement suffisamment motivant en dépit des perspectives de carrière existantes. Malgré la précaution prise, lors de la phase de recrutement, de ne retenir que des candidats détenteurs d'un diplôme en cohérence avec le secteur économique visé (l'agriculture) et/ou les tâches à réaliser (licence de gestion ou d'informatique), il est très probable que la tech-

nicité très importante du travail à effectuer alliée à la nécessité de posséder de fortes qualités relationnelles (sens du service et capacité d'écoute importante) conduit les salariés nouvellement recrutés, le plus souvent jeunes et donc peu expérimentés, à travailler en grande partie hors de leur zone de confort ce qui augmente le risque de démission ou d'inadaptation au profil de poste. D'ailleurs, le service « Conseil et formation aux clients », créé en 2011, est encore lui-même en pleine construction. Il comprend assez logiquement un personnel jeune : 58,33 % de salariés ont moins de 35 ans. Cela reflète toute la difficulté qu'il peut y avoir à intégrer un nombre toujours plus important de nouveaux salariés qu'il faut former sans pouvoir véritablement utiliser le savoir-faire de salariés expérimentés, avec, qui plus est, une offre de services en constante évolution. La structure du service « Conseil et formation aux clients » cherche cependant à pallier cette difficulté. L'organisation en équipes de 10 personnes impose en effet un taux d'encadrement stable (chaque équipe est dirigée par un responsable) et une répartition également stable dans le temps entre conseillers juniors et conseillers seniors, susceptibles de favoriser l'apprentissage organisationnel au sein du service.

En conclusion, il apparaît primordial que la structure mène une politique RH active, de type GPEC, en termes de recrutements, de formation et, plus généralement, de perspectives de carrière afin d'attirer les meilleurs profils et de fidéliser ses salariés.

## DOSSIER 3 - LE DÉVELOPPEMENT DE L'ACTIVITÉ « LOGICIEL EN MODE SAAS »

### 1. Mettre en évidence les principaux avantages offerts par un progiciel de gestion intégré.

#### Conseils aux candidats

Cette question est une question de cours, en grande partie déconnectée du cas à étudier. Elle doit donc être traitée rapidement par les candidats pour peu, bien sûr, qu'ils aient une connaissance précise de ce qu'est un progiciel de gestion intégré.

#### Éléments de corrigé

Un PGI permet de gérer l'ensemble des processus d'une entreprise. Tout en partageant une base de données unique et commune, il permet de construire, de manière modulaire, des applications informatiques correspondant aux diverses fonctions d'une entreprise (gestion des ressources humaines, gestion financière et comptable, aide à la décision, vente...) indépendantes entre elles.

Les principaux avantages offerts par un PGI sont les suivants :

- **L'intégrité et l'unicité du SI**, c'est-à-dire qu'un PGI permet une logique et une ergonomie unique grâce à sa base de données, elle aussi unique. Les différents modules peuvent échanger des informations. Cela permet d'automatiser la transmission de l'information et ainsi d'éviter des redondances dans le traitement de cette information. Les mises à jour dans la base de données sont effectuées en temps réel et propagées aux modules concernés ;
- Un PGI est un **outil multilingue et multidevise**, il est donc adapté au marché mondial, en particulier aux multinationales ;
- La **maintenance corrective est simplifiée** car celle-ci est assurée directement par l'éditeur et non plus par le service informatique de l'entreprise.

Au bout du compte, un PGI favorise :

- **la productivité** : une meilleure intégration de l'ensemble des processus va permettre une diminution des coûts et un gain de productivité général pour l'ensemble de l'entreprise ;
- **la flexibilité** : le client étant dans le système d'information cible intégré en amont et en aval des processus de production, une plus grande flexibilité du système est possible ;
- **l'intégration des infrastructures** : le nouveau système d'information assure l'intégration applicative des infrastructures et de leur maintenance ;
- **un meilleur partage de l'information** : l'utilisation d'un système centralisé en temps réel autour d'une base de données unique garantit un meilleur partage de l'information et favorise la prise de décision.

## 2. Qualifier le positionnement commercial de l'offre logicielle de Softfarm au regard de ses concurrents et montrer que ce positionnement est pertinent pour le groupe Agriconseil.

### Conseils aux candidats

Cette question mobilise *a priori* l'une des notions-clés de la stratégie commerciale d'une entreprise, à savoir le positionnement. Elle comporte deux dimensions : la caractérisation du positionnement de l'entreprise et l'étude de sa pertinence au regard de la stratégie du groupe Agriconseil auquel Softfarm appartient. Les candidats doivent donc clairement faire apparaître ces deux dimensions dans leur réponse.

### Éléments de corrigé

Le positionnement est la place qu'occupent les produits et/ou la marque dans l'esprit du consommateur, sur les plans cognitif et affectif, par rapport aux positions occupées par les produits et/ou les marques concurrentes. De manière générale, il consiste à choisir les points de différence ou **attributs différenciants** que souhaite mettre en avant une entreprise parmi tout un ensemble d'attributs (les attributs importants). On distingue le positionnement voulu par l'entreprise du positionnement perçu par les consommateurs. Compte-tenu des informations disponibles dans les annexes, nous limiterons notre analyse au positionnement voulu.

Sur le marché des éditeurs de PGI, Softfarm appartient au groupe stratégique des éditeurs spécialisés (entre les éditeurs généralistes et les pure players du mode SaaS). Le positionnement voulu par Softfarm semble reposer sur les attributs différenciants suivants, en parfaite cohérence avec la stratégie du groupe Agriconseil :

Attributs différenciants	Pertinence avec la stratégie du groupe Agriconseil
<p><b>Disponibilité</b>  <i>En témoignent la valorisation des applications web mobiles et le service d'assistance de l'offre de l'entreprise.</i></p>	<p><i>Dès sa création en 1983, Agriconseil a cherché à rendre l'informatique accessible au plus grand nombre. Le fait de rendre les nouvelles technologies disponibles aux petites exploitations agricoles n'est que le prolongement de cette ambition initiale.</i></p>

<p><b>Praticité, modernité et étendue</b> La recherche d'applications à la fois simples, intuitives et innovantes le démontre.</p>	<p><i>Agriconseil propose une offre spécialisée pour les agriculteurs, au contraire des grands éditeurs du marché. La gamme de prestations est étendue, grâce à l'ajout continu de nouveaux modules adaptés aux besoins spécifiques de cette cible. Ce positionnement permet une différenciation.</i></p>
<p><b>Accessibilité en termes de prix</b> La tarification de 50 € par mois et par utilisateur est très compétitive par rapport à celles de ses concurrents (à partir de 80 € pour Sage Ligne 100, de 50 à 150 € pour Tiny Saas).</p>	<p><i>Le positionnement prix est adapté à la cible de petites exploitations agricoles.</i></p>

### 3. Proposer un argumentaire des éléments clés de l'offre « Saas » auprès des petites exploitations agricoles

#### Conseils aux candidats

Dans ce contexte, il faut comprendre le terme « argumentaire » comme un ensemble d'arguments qui seront mis en avant par les commerciaux lors de la présentation de l'offre aux clients potentiels. La construction d'un réel argumentaire de vente est bien trop ambitieuse dans le cadre d'une étude de cas en temps limité. Ici encore, les candidats doivent chercher à structurer leur réponse en utilisant une typologie (par exemple, des arguments techniques, financiers, commerciaux, etc...). Les annexes à exploiter sont les annexes 9 et 11.

#### Éléments de corrigé

L'offre PGI en mode Saas doit pouvoir convaincre les petites exploitations agricoles, dont le budget et l'expertise technique sont nécessairement limités. Voici un tableau proposant un ensemble d'arguments qui pourront être mobilisés par les commerciaux lors des entretiens avec leurs prospects et intégrés dans les documents commerciaux de l'entreprise. Ces arguments sont idéalement en cohérence avec le positionnement décrit dans la question précédente. Nous excluons ici les avantages du PGI, déjà décrits dans la réponse à la question 1 de ce dossier.

<p><b>Arguments techniques</b></p>	<p><i>Simplicité d'utilisation : aucune maintenance à assurer, les applications et les données sont hébergées sur un serveur distant (Cloud Computing), la connexion nécessite un simple navigateur. Les données sont sauvegardées sur les serveurs du prestataire, ce qui accroît la sécurité : sauvegarde, non intrusion (le prestataire étant doté d'un système de sécurité informatique plus performant qu'une petite exploitation agricole), etc.</i></p>
<p><b>Arguments commerciaux</b></p>	<p><i>Une offre étendue (de multiples modules) et adaptée aux besoins spécifiques des agriculteurs (alors que les autres PGI ont été conçus pour des entreprises « moyennes » et nécessiteront d'être adaptés, paramétrés, etc.). Une offre à un prix très compétitif, en deçà des prix pratiqués par les concurrents. La tarification par utilisateur permet de pratiquer un prix au plus juste. Une offre adaptée aux besoins et aux ressources financières des petites entreprises.</i></p>
<p><b>Arguments financiers</b></p>	<p><i>Le mode Saas évite l'investissement dans du matériel informatique sophistiqué et donc de mobiliser une somme importante.</i></p>

4. Analyser la structure financière de Softfarm. Proposer, calculer et commenter quatre indicateurs ou ratios pertinents, mobilisables dans ce type d'analyse, pour mettre en évidence les marges de manœuvre dont dispose l'entreprise.

#### Conseils aux candidats

Cette question est de facture classique et s'intéresse à l'équilibre financier de l'entreprise. Il est important que les candidats ne se contentent pas de simples constats mais qu'ils livrent, dans la mesure du possible, une véritable argumentation basée sur l'identification des causes explicatives de la situation financière de l'entreprise. Remarquons toutefois, qu'en l'absence de données sur l'activité de Softfarm, il est assez difficile d'évaluer le poids du BFRE. Une conclusion spécifique sur les marges de manœuvre dont elle dispose doit également apparaître clairement.

#### Éléments de corrigé

#### Construction du bilan fonctionnel de l'exercice 2014

EMPLOIS		RESSOURCES	
Emplois stables	3 050 676	Ressources stables	6 519 796
Emplois circulants d'exploitation	4 996 192	Ressources circulantes d'exploitation	630 752
Emplois circulants hors-exploitation	-	Ressources circulantes hors-exploitation	-
<b>Emplois circulants</b>	<b>4 996 192</b>	<b>Ressources circulantes</b>	<b>630 752</b>
Trésorerie active	24 278	Trésorerie passive	920 598
<b>Total des emplois</b>	<b>8 071 146</b>	<b>Total des ressources</b>	<b>8 071 146</b>

#### Calcul du FRNG, du BFR(E) et de la trésorerie nette pour l'exercice 2014

FRNG	3 469 120	
BFRE	4 365 440	
BFRHE	-	
BFR	4 365 440	
Trésorerie nette	- 896 320	- 159 608 (en 2013)

#### Calcul des ratios financiers pour l'exercice 2014

$$\text{Ratio de couverture des emplois stables par les ressources stables} = \frac{RS}{ES} = 2,14$$

$$\text{Ratio de couverture des capitaux investis} = \frac{RS}{ES+BFRE} = 0,88$$

$$\text{Taux d'endettement} = \frac{\text{Dettes financières}}{\text{Capitaux propres}} = 208,39 \% \quad (184,14 \% \text{ en } 2013)$$

$$\text{Ratio de liquidité immédiate} = \frac{\text{Disponibilités}}{\text{Dettes à moins d'un an}} = 0,038$$

### Analyse de la structure financière de Softfarm

En 2014, l'excédent de ressources stables sur les emplois stables (ratio de couverture des emplois stables par les ressources stables très nettement supérieur à 1) ne couvre pas le BFR(E) (ratio de couverture des capitaux investis inférieur à 1) ce qui se traduit par une trésorerie nette négative de 896 320 €. Comme en 2013, l'équilibre financier n'est donc pas atteint.

Cette situation est d'autant plus inquiétante que :

- la trésorerie nette s'est détériorée : déjà fortement négative en 2013, elle n'était cependant égale qu'à - 159 608 € ;
- le taux d'endettement, déjà excessif en 2013, a encore augmenté pour atteindre 208,39 % en 2014.

Compte-tenu du ratio de couverture très élevé des emplois stables par les ressources stables, il faut chercher l'origine du déséquilibre de la structure financière de l'entreprise au niveau du BFR(E) qui, même si on ne dispose pas des données sectorielles ou du chiffre d'affaires de l'entreprise, semble excessivement élevé. On remarque en particulier le montant très important des créances clients, plus de 10 fois supérieur à celui des dettes fournisseurs. Il apparaît donc que Softfarm rencontre de grandes difficultés pour recouvrer ses créances auprès de ses clients ce qui peut très certainement s'expliquer par les difficultés financières dans lesquelles les petites exploitations agricoles se trouvent en général.

Les marges de manœuvre dont dispose Softfarm apparaissent dès lors excessivement limitées :

- **dans la gestion de sa trésorerie tout d'abord** : avec un ratio de liquidité réduite très faible (proche de 0), l'entreprise est dépendante des établissements de crédit pour faire face à ses engagements et régler ses dettes comme le prouve le montant très élevé des concours bancaires courants ;
- **dans la mise en œuvre de sa stratégie de développement ensuite** : le taux d'endettement très élevé témoigne du fait que Softfarm ne peut espérer poursuivre indéfiniment son développement en recourant aux emprunts. Parallèlement, la baisse du résultat de l'entreprise pourrait refléter une capacité d'autofinancement en diminution.

Pour autant, Softfarm est une entité spécifique créée par Agriconseil. Par conséquent, elle peut prendre appui sur la puissance financière *a priori* très importante du groupe (capable par exemple de racheter le leader du logiciel agricole au Canada en 2012) pour poursuivre son développement.

### 5. Déterminer le niveau critique de la nouvelle activité.

#### Conseils aux candidats

On remarquera qu'un commentaire n'est pas attendu en tant que tel. En effet, la question 5 du dossier 3 sert, pour partie, de point d'appui à la formulation de la

réponse à la question 6 qui amène nécessairement les candidats à interpréter le calcul du niveau critique de la nouvelle activité réalisée.

Éléments de corrigé

### Compte de résultat différentiel pour les années 1 et 2

		Année 1		Année 2	
<b>Chiffre d'affaires</b>		<b>1 200 000,00 €</b>	<b>100,00 %</b>	<b>1 320 000,00 €</b>	<b>100,00 %</b>
Charges variables	Abonnement hébergeur	800 000,00 €		800 000,00 €	
	Charges de gestion	50 000,00 €		50 000,00 €	
<b>Total des charges variables</b>		<b>850 000,00 €</b>		<b>850 000,00 €</b>	
<b>Marge sur coût variable</b>		<b>350 000,00 €</b>	<b>29,17 %</b>	<b>470 000,00 €</b>	<b>35,61 %</b>
Charges fixes	Salaires	198 800,00 €		198 800,00 €	
	Publicité	20 000,00 €			
	Dotations aux amortissements	100 000,00 €		100 000,00 €	
<b>Total des charges fixes</b>		<b>318 800,00 €</b>	<b>26,57 %</b>	<b>298 800,00 €</b>	<b>22,64 %</b>
<b>Résultat d'exploitation</b>		<b>31 200,00 €</b>	<b>2,60 %</b>	<b>171 200,00 €</b>	<b>12,97 %</b>
<b>Seuil de rentabilité*</b>		<b>1 093 028,57 €</b>		<b>839 182,98 €</b>	

\* Le seuil de rentabilité en valeur est le rapport entre le montant des charges fixes et le taux de marge sur coût variable (respectivement égal à 29,17 % pour l'année 1 et 35,61 % pour l'année 2).

On remarque que le seuil de rentabilité est très élevé en année 1 (proche du niveau du chiffre d'affaires atteint) mais qu'il se réduit significativement en année 2.

**6. Présenter, dans une note d'une page, les risques induits par ce projet, pour Softfarm et pour le groupe Agriconseil.**

Conseils aux candidats

Cette question sert de conclusion au cas et peut dès lors mobiliser une partie des réponses apportées aux questions précédentes du dossier 3 comme des deux premiers dossiers. Elle valorise une notion-clé en analyse stratégique, celle de risque dont les candidats doivent absolument étudier différentes dimensions : le risque économique, le risque financier (impossible à évaluer compte-tenu des données disponibles en annexe 11), le risque commercial, le risque au niveau de la gestion des ressources humaines...

## Eléments de corrigé

### Calculs préalables à la rédaction de la note

	Année 1	Année 2
Chiffre d'affaires (CA)	1 200 000,00 €	1 320 000,00 €
Seuil de rentabilité (SR)	1 093 028,57 €	839 182,98 €
Marge de sécurité (CA – SR)	106 971,43 €	480 817,02 €
Indice de sécurité (Marge de sécurité / CA)	8,91 %	36,43 %
Levier opérationnel (MCV / résultat d'exploitation)	11,2	2,7
Rentabilité économique (Résultat d'exploitation / Capitaux mis en œuvre)	6,24 %	34,24 %

Comme le montrent les résultats du tableau ci-dessus, **le risque économique** du projet est très important, en tout cas la première année pour laquelle l'indice de sécurité est très faible et le levier opérationnel extrêmement élevé. Cela est d'autant plus préoccupant que, comme nous avons pu le démontrer dans la réponse à la question 4 du dossier 3, la situation financière de Softfarm est déjà préoccupante, que ses marges de manœuvre sont réduites et qu'un échec du projet pourrait par là-même remettre en cause la pérennité de l'entreprise. Remarquons néanmoins que le risque économique diminue fortement dès la deuxième année et que la rentabilité économique est satisfaisante voire importante (supérieure à 30 % en année 2).

Cependant, force est de constater que le risque économique est d'autant plus élevé que, **sur le plan commercial**, le risque est lui-même conséquent. Ainsi, non seulement la concurrence se renforce sur le marché mais les freins à l'utilisation du PGI en mode SaaS sont également très importants. L'accueil de l'offre de Softfarm est donc incertain et il est impératif que l'entreprise réalise un travail conséquent de prospection commerciale et de pédagogie avant d'espérer persuader les exploitants agricoles d'utiliser son PGI en mode SaaS. De ce point de vue, les compétences relationnelles du personnel en contact avec la clientèle sont déterminantes.

C'est en ce sens que **le risque** encouru **au niveau RH** par l'entreprise, celui de ne pas être en capacité d'adapter ses ressources humaines à ses besoins, prend toute sa dimension. Comme nous l'avons montré dans la réponse à la question 3 du dossier 2, l'augmentation du turn-over et les difficultés importantes que connaît l'entreprise à recruter et à fidéliser les salariés compétents dont elle a besoin, laissent penser que c'est à ce niveau que se situe au bout du compte la réussite du projet de développement de l'offre PGI en mode SaaS de Softfarm.

# DROIT

**DURÉE : 1 HEURE 30.**

*Il n'est fait usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*

*Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.*

## S U J E T

### PREMIERE PARTIE : CAS PRATIQUE

#### Cas Colette Albé

***Vous étudierez les situations suivantes en apportant des réponses argumentées en droit et en fait.***

Colette ALBÉ est un « nez », autrement appelé créateur de parfum ou encore parfumeur : elle utilise sa mémoire olfactive pour reconnaître les matières premières naturelles et synthétiques qui constituent les parfums.

Fine observatrice du marché du parfum, elle regrette son évolution. Pour elle, le parfum est devenu avant tout un produit marketing où sont privilégiés le choix du flacon, l'image qu'il véhicule, la publicité etc. Les parfums finissent tous par se ressembler, privilégiant les tonalités synthétiques, en général plus économiques. Colette ALBÉ est néanmoins persuadée qu'un certain nombre de consommateurs va se lasser de ces produits standardisés et être attiré par des parfums de caractère, reflet de leur personnalité.

C'est sur ce créneau que travaille son entreprise. L'objectif est de développer des parfums dont la composition repose exclusivement sur des matières naturelles, recherchées dans le monde entier. Le pari est risqué. Ses créations, « Parfum d'Emoi par Colette A » s'adressent avant tout à une clientèle féminine. Sa marque a été déposée auprès de l'INPI en 2003.

Le succès est au rendez-vous. Il tient à la qualité et à l'originalité de la gamme « Parfum d'Emoi par Colette A », mais aussi à l'efficacité du service commercial qu'elle a su mettre en place et que dirige son frère Laurent ALBÉ. Ce dernier a été recruté en 2006 par Colette ALBÉ qui n'a pas jugé nécessaire d'intégrer des clauses particulières au contrat de travail. Afin de conforter son image de marque elle envisage l'ouverture d'une antenne commerciale à Paris courant 2015. Elle souhaite mettre Laurent à la tête de cette antenne parisienne.

En janvier 2014, Colette ALBÉ, propose à Laurent ALBÉ de devenir le responsable de l'antenne commerciale parisienne. Malgré la promotion qui accompagne cette proposition, Laurent ALBÉ décline l'offre invoquant son attachement à la douceur de vivre du Midi et les complications d'ordre familial que cela pourrait générer.

**1 – Exposez les fondements juridiques que peut opposer Laurent ALBÉ à sa sœur pour étayer son refus de localisation de son poste de travail à Paris.**

En juillet, Laurent ALBÉ a finalement démissionné afin de créer lui-même sa propre entreprise. Interrogé par sa sœur, il reste assez flou sur ses projets. Dès les premiers mois de 2015, elle apprend que son frère Laurent ALBÉ a ouvert sa propre parfumerie à quelques kilomètres de Grasse. Ses créations s'appellent « Parfum d'Emoi pour Lui, par Laurent A ». Au-delà du nom qu'il a choisi, les flacons et les emballages s'inspirent des créations de Colette ALBÉ. Aussi, craint-elle que naisse une confusion entre ses propres parfums et ceux de son frère et que son image de marque en pâtisse. En effet, elle connaît la réputation du « nez » que son frère a embauché. Il représente ce qu'elle n'accepte pas dans le métier. Il est pour elle un parfumeur dont les créations sont avant tout commerciales et dont la formule incorpore essentiellement des composants synthétiques les plus économiques. Ses craintes sont aussi confirmées dès que lui sont remis les premiers échantillons. Elle souhaite faire cesser cette confusion et vous demande conseil.

**2 – Analysez la situation juridique née de l'activité de la nouvelle entreprise de Laurent ALBÉ.**

- a) Expliquez le problème juridique qui se pose dans ce cas.
- b) Exposez, en vous appuyant sur les faits, sur quels fondements et à quelles conditions Colette ALBÉ peut construire son argumentation juridique afin de faire cesser les agissements de son frère.
- c) Déterminez la juridiction devant laquelle Colette ALBÉ pourrait mener son action.

**Documentation juridique annexe :**

1. Conditions de dépôt d'une marque à l'INPI.
2. Extrait tribunal de commerce de Paris du 22/06/12 affaire Alban B / Michaël M.
3. Extrait cour de cassation, chambre commerciale, 16/01/01.

## **DEUXIEME PARTIE / VEILLE JURIDIQUE**

**A partir de la veille juridique que vous avez réalisée au cours de l'année 2014, vous répondez à la question suivante :**

« Expliquez l'évolution du pouvoir juridique des consommateurs dans les relations économiques »

**ANNEXE 1****Conditions de dépôt d'une marque à l'INPI**

Au sens de la propriété industrielle, la marque est un « signe » servant à distinguer précisément vos produits ou services de ceux de vos concurrents. La marque offre aux consommateurs un point de repère essentiel. Elle représente l'image de votre entreprise et est garante, aux yeux du public, d'une certaine constance de qualité. [...] Pour devenir propriétaire d'une marque, vous devez effectuer un dépôt à l'INPI. [...] Que vous soyez particulier ou que vous représentiez une personne morale (entreprise, association...), vous pouvez déposer vous-même votre marque. [...] Le coût de dépôt d'une marque dépend essentiellement du nombre de classes sélectionnées. [...]

Après un délai minimal de cinq mois, une fois la procédure d'examen du dossier achevée, l'INPI publie l'enregistrement du dépôt au BOPI. [...] Suite à cette publication, l'INPI vous envoie un certificat attestant que votre marque est enregistrée. Cet avis récapitule les informations concernant l'enregistrement de votre marque. [...]

En déposant votre marque à l'INPI, vous obtenez un monopole d'exploitation sur le territoire français pour 10 ans, renouvelable définitivement. Vous êtes ainsi le seul à pouvoir l'utiliser, ce qui permet de mieux commercialiser et promouvoir vos produits et services. Vous pouvez vous défendre en poursuivant en justice toute personne qui, notamment, imiterait ou utiliserait aussi votre marque.

Votre marque peut être protégée indéfiniment si elle est renouvelée tous les dix ans. [...] La marque doit être renouvelée tous les dix ans, dans les six mois précédents le dernier jour du mois anniversaire du dépôt. Ex : une marque déposée le 15 juillet 2004 pourra être renouvelée du 31 janvier 2014 au 31 juillet 2014 inclus. Toutefois, le renouvellement est encore possible dans un délai supplémentaire de six mois à compter du lendemain de la date échéance. Vous devrez alors payer une redevance de retard.

[www.inpi.fr](http://www.inpi.fr)

**ANNEXE 2****Extrait tribunal de commerce de Paris du 22/06/12 affaire Alban B / Michael B**

[...] M. Alban B. soutient que M. Michaël M. a commis des actes de concurrence déloyale en reproduisant à l'identique ses conditions générales de ventes. Il relève que M. Michaël M. a omis de modifier les mentions inexactes au regard de son propre statut d'auto-entrepreneur. [...] Il justifie sa demande de préjudice sur les économies réalisées par M. Michaël M. en s'abstenant de l'effort de réaliser ses propres conditions générales de ventes originales. [...]

Subsidiairement, M. Michaël M. affirme, au nom du principe de la liberté du commerce et de l'industrie institué par l'article 7 de la loi des 2 et 17 mars 1791, qu'un produit qui ne fait pas l'objet de propriété intellectuelle peut être librement reproduit dès lors qu'il n'existe pas de risque de confusion. M. Michaël M. indique qu'en tout état de cause l'action qui lui est reprochée ne peut être qualifiée de fautive et que le demandeur ne justifie pas de son préjudice. [...]

Attendu que la jurisprudence indique que le « parasitisme est caractérisé dès lors qu'une personne physique ou morale, à titre lucratif et de façon injustifiée, s'inspire ou copie une valeur économique d'autrui, individualisée et procurant un avantage concurrentiel, fruit d'un savoir-faire, d'un travail intellectuel et d'investissements » ; [...]

En conséquence de ce qui précède, le tribunal dira que M. Michaël M., en dupliquant servilement les conditions générales de vente mises en ligne par M. Alban B. sur son propre site de vente en ligne, s'est rendu coupable d'acte de parasitisme engageant sa responsabilité.

### ANNEXE 3

---

#### Extrait cour de cassation, chambre commerciale, 16/01/01

Attendu, selon l'arrêt attaqué (Lyon, 30 octobre 1998), que la société Techniques Michel Brochier (Société TMB) qui commercialise depuis 1987 des tentes à armature gonflable utilisées par divers organismes de secours et par l'armée, a assigné la société Air et voiles techniques stéphanoises (Société AVTS) en dommages-intérêts, en se prévalant de la concurrence déloyale résultant de l'imitation de ses produits ; [...]

Attendu que la société AVTS fait grief à l'arrêt d'avoir dit qu'elle avait commis des actes de concurrence déloyale par copie et de l'avoir condamnée, en conséquence, à diverses sommes et autres mesures accessoires, alors, selon le moyen :

1/ qu'elle faisait valoir que les similitudes constatées étaient justifiées par le fait que la société TMB comme la société AVTS avaient pris pour modèle la norme OTAN, c'est-à-dire, le modèle déposé par l'Armée française ; [...]

2/ que la société AVTS faisait valoir que les similitudes relevées étaient rendues nécessaires dès lors que la société TMB avait elle-même copié la norme OTAN ; [...]

Mais attendu qu'ayant constaté que l'identité de certaines caractéristiques des produits en cause relevée par l'expert n'était imposé ni par le cahier des charges relatifs aux appels d'offres considérés ni par aucune nécessité technique, l'arrêt retient que la société AVTS ne peut sérieusement soutenir que seul le respect des directives contenues dans le cahier des charges, [...] ou les impératifs techniques auxquels elle devrait répondre, l'auraient amenée nécessairement et inéluctablement à concevoir et réaliser une tente présentant des caractéristiques identiques à celles de la tente commercialisée antérieurement par la société TMB, ce dont il ressort que la normalisation éventuelle des produits en cause ne justifiait pas, dans le cas d'espèce, l'adoption d'un produit totalement similaire [...] ; qu'ainsi, la cour d'appel a légalement justifié sa décision [...] ; qu'il suit de là que le moyen n'est fondé en aucune de ses branches ; [...]

PAR CES MOTIFS :

REJETTE le pourvoi.

# CORRIGÉ

Par Pascal Simon-Doutreluingne, professeur au lycée René Cassin de Strasbourg.

## PREMIERE PARTIE : CAS PRATIQUE

### Eléments de correction

#### Remarques préliminaires

Les compétences ici recherchées devaient être :

- une restitution précise des connaissances théoriques ;
- un respect de la forme de la réponse (syllogisme).

Il était donc indispensable d'utiliser la démarche logique et cohérente pour répondre aux différentes demandes :

- réponses justifiées en fait (travail de qualification de la situation exposée : compréhension et analyse du contexte en déterminant la pertinence des faits par rapport à la recherche de solution) ;
- réponses justifiées en droit (connaître et maîtriser son cours pour identifier quelle(s) règle(s) de droit est(sont) nécessaire(s) à la solution proposée).

*Nota Bene* : les réponses proposées dans les rubriques « Problématique et points de droit » sont assez précises pour que vous puissiez envisager l'étendue de la réponse.

1. Exposez les fondements juridiques que peut opposer Laurent ALBÉ à sa sœur pour étayer son refus de localisation de son poste de travail à Paris.

### Eléments de correction

#### Remarques préliminaires

Le court exposé des faits permettait d'identifier rapidement les principales notions : un salarié se voit proposer une modification d'un élément de son contrat de travail, la localisation géographique.

La problématique était alors, comme le précisait la formulation de la question, de déterminer et présenter le cadre normatif de la modification des conditions de travail, ou du contrat de travail lui-même (travail de qualification), et de permettre, ainsi, de justifier le refus de Laurent ALBE.

C'est donc une prise en compte comparée des intérêts des parties au contrat de travail : les conditions initialement prévues par les parties ne peuvent pas toujours être maintenues pendant des années. Le contrat est souvent affecté par des événements provenant de l'évolution de l'entreprise, ici son développement économique.

#### Les faits

Il n'y avait aucune difficulté pour ce travail de qualification des faits : il fallait, juste, ne pas oublier de mettre en avant les deux arguments émis par Monsieur ALBE, à savoir son attachement à la région qu'il habite (peu pertinent en Droit) et les contraintes qu'un déménagement en région parisienne, peut avoir sur sa vie familiale (ce qui est déjà un argument bien plus fort).

#### **Le problème juridique et les points de droit**

Comme tout contrat, le contrat de travail repose sur un principe fondamental mentionné à l'article 1134 du code civil : « *Les conventions légalement formées tiennent*

*lieu de loi à ceux qui les ont faites. Elles ne peuvent être révoquées que de leur consentement mutuel, ou pour les causes que la loi autorise. Elles doivent être exécutées de bonne foi.* ».

Dès lors, toute modification est une exception à ce principe si elle ne rencontre pas l'accord du salarié.

Pour la situation particulière de l'exécution dans le temps du contrat de travail, les articles L. 1222-6 à L. 1222-8, L. 1233-3 et L. 1233-25 du Code du travail évoquent la notion, complexe, de modification survenant dans l'exécution du contrat de travail.

Plus précisément, l'article L. 1233-3 du code du travail et la jurisprudence envisagent la distinction entre deux situations en évoquant l'existence, dans le contrat de travail, d'« élément essentiel » sans en donner une définition légale.

Nous sommes donc ici dans une appréciation de fait : lorsqu'un élément du contrat de travail par nature essentiel, ou estimé essentiel par le salarié et l'employeur lors de la conclusion du contrat, est affecté, il y a modification du contrat de travail.

Selon la jurisprudence, quatre types de modifications sont, en principe, considérées comme essentielles :

- la fonction (qualification professionnelle) ;
- la rémunération (son montant et ses éléments de calcul, sous réserve d'une clause de variation de rémunération) ;
- les horaires (pour le passage d'un horaire de jour à un horaire de nuit ou pour une variation de la durée hebdomadaire) ;
- le lieu de travail (sous réserve d'une clause de mobilité).

Sinon, les juges qualifieront de modifications non essentielles toutes modifications accessoires ou non substantielles ou représentant de simples aménagements, notamment liés à l'application d'une clause et dans la limite que « *la mise en œuvre de la clause (de mobilité) ne portait pas une atteinte au droit de la salariée* » selon l'arrêt n°06-45562 du 13 janvier 2009 de la chambre sociale de la cour de cassation.

Dès lors :

- l'employeur peut souhaiter modifier un ou plusieurs éléments essentiels du contrat de travail : dans ce cas, cette modification, assimilée à une modification du contrat lui-même, nécessite l'accord du salarié concerné. A défaut de celui-ci, et si l'employeur souhaite maintenir cette modification, il devra procéder à un licenciement sans faute ;
- les modifications décidées par l'employeur peuvent ne constituer qu'un changement des conditions de travail du salarié ; dans ce cas, l'employeur peut reprocher au salarié une faute si celui-ci refuse l'application de ces modifications. La jurisprudence estime qu'il s'agit de l'application de son pouvoir de direction.

### **La solution (proposition)**

Il apparaît que l'argument de Laurent ALBE, quant à sa prise de fonction en région parisienne, et l'absence de clause de mobilité géographique vont dans le sens d'une modification de son contrat de travail.

Ainsi, si sa sœur souhaite lui imposer cette modification, il pourra refuser sans commettre de faute.

Par ailleurs, cette modification de la localisation de son poste ne relevant pas de l'article L1233-3 du code de travail, Colette ne pourra le licencier que pour un motif inhérent à la personne de son frère.

Qu'il soit disciplinaire ou non, le licenciement pour motif personnel doit reposer sur une « cause réelle et sérieuse » (article L.1232-1 du code du travail) sinon, il sera qualifié d'abusif.

On peut alors recommander à Colette ALBE de trouver une autre solution pour assurer la responsabilité de l'antenne commerciale parisienne.

2. Analysez la situation juridique née de l'activité de la nouvelle entreprise de Laurent ALBÉ :

- a) Expliquez le problème juridique qui se pose dans ce cas.
- b) Exposez, en vous appuyant sur les faits, sur quels fondements et à quelles conditions Colette ALBÉ peut construire son argumentation juridique afin de faire cesser les agissements de son frère.
- c) Déterminez la juridiction devant laquelle Colette ALBÉ pourrait mener son action.

### Éléments de correction

#### Remarques préliminaires

Les règles concernant la concurrence déloyale (dont le parasitisme) sont des règles jurisprudentielles, fondées sur l'article 1382 du code civil. Elles protègent les entreprises contre des atteintes fautives à leur clientèle, leur image, leur patrimoine.

Elles relèvent du droit de la concurrence, car elles jouent un rôle fondamental dans le respect d'une concurrence loyale.

Le cas simple, dans les éléments de fait, portait les indications précises des notions à mobiliser : la protection des entreprises par le droit de la propriété intellectuelle (confusion) et le droit de la concurrence (concurrence déloyale versus contrefaçon).

Une lecture attentive des trois documents fournis en annexe confortait cette première analyse du cas : l'impossibilité de protéger par un dépôt de marque, des éléments de propriété intellectuelle (documents 1 et 2) n'exclut pas leur protection par la sanction du parasitisme (document n° 3 sur la sanction d'une situation de concurrence déloyale en dehors d'un acte de contrefaçon).

Enfin, l'organisation des éléments de réponse reprendra cette logique : la question A évoquant le travail de qualification des faits, la question B la règle de droit applicable et enfin la question C étant accessoire à la thématique de la propriété industrielle (la compétence de la juridiction).

#### **a) Qualifier les faits pour expliquer le problème juridique**

Différents éléments (dénomination commerciale proche, flacons et emballages des produits ressemblants) sont identifiés par Colette ALBE comme préjudiciables à son activité et constitutifs d'une confusion dans l'esprit des consommateurs.

Elle souhaite obtenir réparation de son préjudice matériel et moral, né de ces actes de concurrence déloyale.

#### **b) Le problème juridique et les points de droit**

Qu'englobe la propriété intellectuelle et plus précisément la propriété industrielle ? Quelles sont les conséquences juridiques de toute atteinte à ce droit de propriété industrielle ?

L'action en concurrence déloyale est soumise aux conditions classiques de la responsabilité civile du fait personnel (article 1382 du code civil) : une faute, un dommage, un lien de causalité.

### 1. La faute

La faute suppose une action ou une abstention considérée comme contraire aux règles de comportement normal et notamment, en pratiquant une pratique menant à une confusion ou un parasitisme : Une entreprise cherche à tirer parti de la notoriété d'un concurrent, notamment en imitant un produit, un service, ou sa marque, par l'utilisation d'un ou plusieurs signes distinctifs qui permettent au consommateur d'identifier notamment un produit ou un type de commercialisation auxquels sont attachées certaines qualités ou qui confèrent une notoriété particulière.

### 2. Le préjudice

Il peut s'agir d'un préjudice matériel, correspondant notamment à une perte de chiffre d'affaires. Il peut s'agir également d'un préjudice moral.

En matière de preuve du préjudice, la Cour de cassation adopte une position très favorable à la victime, considérant que le préjudice au moins moral résulte de l'existence même des faits fautifs.

### 3. Le lien de causalité

Un lien de cause à effet doit exister entre la faute et le préjudice : comment savoir quelle part de la baisse constatée du chiffre d'affaires de l'entreprise qui se considère comme victime d'une concurrence déloyale est la conséquence des comportements reprochés ?

### 4. Le lien de causalité

Un lien de cause à effet doit exister entre la faute et le préjudice : comment savoir quelle part de la baisse constatée du chiffre d'affaires de l'entreprise qui se considère comme victime d'une concurrence déloyale est la conséquence des comportements reprochés ?

### **c) La compétence de la juridiction**

La compétence d'une juridiction est double : la compétence d'attribution (ou matérielle) en fonction de la nature et du montant du litige, la compétence territoriale en fonction du ressort géographique couvert par la juridiction.

La compétence territoriale désigne donc le secteur géographique pour lequel la juridiction saisie est apte à statuer.

Ainsi, l'action en concurrence déloyale évoquée précédemment relève d'un contentieux entre commerçants. Elle relève donc du tribunal de commerce (article L.721-3 du code de commerce) qui a la compétence matérielle.

Enfin, par principe, la compétence territoriale du tribunal correspond au ressort dans lequel le défendeur a son domicile.

Si la ville de Grasse est le siège d'un tribunal de commerce, Colette ALBE, représentante légale de la société demanderesse, pourra y assigner la société défenderesse.

### **Documentation juridique annexe :**

- Conditions de dépôt d'une marque à l'INPI.
- Extrait tribunal de commerce de Paris du 22/06/12 affaire Alban B / Michaël M.
- Extrait cour de cassation, chambre commerciale, 16/01/01.

## DEUXIÈME PARTIE : VEILLE JURIDIQUE

A partir de la veille juridique que vous avez réalisée au cours de l'année 2014, vous répondrez à la question suivante :

« Expliquez l'évolution du pouvoir juridique des consommateurs dans les relations économiques »

### Remarques préliminaires

Les éléments de veille juridique – 2014 – portant sur le thème « Droit et pouvoir » étaient nombreux et variés dans le domaine du droit de la consommation et tout particulièrement concernant le renforcement « pouvoir juridique des consommateurs, et non professionnels, face aux professionnels ». Et pour « faciliter » le travail de veille, la loi du 17 mars 2014 relative à la consommation, dite « loi Hamon » concentrait la plupart de ces éléments.

Dès lors, on citera, notamment mais principalement, les dispositions législatives emblématiques de cette loi du 17 mars 2014 :

1. Renforcement de l'obligation générale précontractuelle d'information du consommateur pour les contrats conclus sur les lieux de vente.

Il s'agit des informations concernant, outre les **caractéristiques essentielles** du bien ou du service, son prix :

a. La date ou le délai de livraison, en l'absence d'exécution immédiate du contrat avec un délai maximum de 30 jours après la conclusion du contrat ;

b. Les informations sur la période de disponibilité des pièces détachées pour les biens mis pour la première fois sur le marché depuis le 1<sup>er</sup> mars 2015 (art. L 111-3 du Code de la consommation) ;

c. Les informations sur tout paiement supplémentaire venant s'ajouter au prix de l'objet principal du contrat pour lequel le professionnel doit recevoir le consentement exprès du consommateur (art. L 114-1 du Code de la consommation).

2. Lors de ventes à distance et conclues hors établissements (renforcement de l'obligation d'informations pré-contractuelles – contrats conclus à distance, lors de foires ou salons, démarchage téléphonique et prospection commerciale et augmentation de la durée du délai de rétractation).

3. L'assouplissement de la procédure de résiliation d'un contrat d'assurance, et permettre, ainsi, à l'assuré de mieux faire jouer la concurrence en vue de faire baisser les prix du marché.

4. La création un nouvel « outil de régulation économique pour rééquilibrer les pouvoirs entre consommateurs et professionnels ». La procédure d'action de groupe permet à une association de consommateurs, agréée au niveau national, d'agir en justice pour un groupe de consommateurs. Cette action s'appliquera dans le cas de la vente de biens ou de la fourniture de services, et dans le cas de pratiques anticoncurrentielles.

5. La définition légale du commerçant : en droit français, la notion de consommateur a donné lieu à d'abondantes interrogations et à une jurisprudence fluctuante. Si la directive du 5 avril 1993 penche pour une définition restrictive du consommateur définit comme une personne physique n'entrant pas dans le cadre d'une activité professionnelle (art. 2, b) la loi française vise non seulement le consommateur mais aussi le « non professionnel ». Après une définition extensive du consommateur en considérant qu'une personne morale pouvait bénéficier de la protection dès lors qu'il était relativement au contenu du contrat « dans le même état d'ignorance que n'importe quel autre consommateur » (Cass. 1<sup>re</sup> civ. 28 avril 1987) la cour de cas-

sation a adopté une vision plus restrictive en délimitant le domaine de protection aux contrats n'ayant pas un rapport direct avec son activité professionnelle (Cass. 1<sup>re</sup> civ. le 24 nov. 1993). Il était donc nécessaire que le législateur puisse établir une définition claire et précise et assurer une certaine sécurité juridique : « *un consommateur ou un non-professionnel est alors une personne physique ou morale qui acquiert des biens de consommation ou qui a recours à une prestation de services pour son usage personnel ou celui de sa famille* ».

On pouvait aussi évoquer, en matière immobilière, le plafonnement des honoraires de location à compter du 15 septembre 2014, prévu par le décret n° 2014-890 du 1<sup>er</sup> août 2014 *relatif au plafonnement des honoraires imputables aux locataires et aux modalités de transmission de certaines informations par les professionnels de l'immobilier*.

#### Remarques préliminaires

Il est, à nouveau, important de rappeler que :

1. le travail de veille n'est ni proposer une liste d'éléments d'actualité plus ou moins précis, ni répondre à une question de cours sur le droit de la consommation ;
2. dès lors, les compétences attendues dans ce travail de restitution de la veille juridique effectuée sur l'année sont : comprendre la question et y répondre avec la forme demandée, « Expliquez l'évolution... », donc avec une introduction qui rappelle la problématique, une présentation structurée à défaut d'un plan apparent.

#### Éléments de plan

Le sujet portait une limite importante dans son libellé : « l'évolution du pouvoir juridique des consommateurs » dans le contrat de vente, de location ou de prestations de services (« les relations économiques ») et entraînait alors une problématique énoncée : Comment le Droit (le législateur et la jurisprudence), particulièrement en 2014, a contraint les professionnels dans les relations économiques avec les consommateurs et dans une certaine mesure les non-professionnels ?

Il est d'usage d'énoncer que le droit de la consommation est, particulièrement, protecteur des salariés. Dès lors, dans l'introduction, les candidats pouvaient, après avoir présenté le contexte de la veille et les éléments de définition requis, préciser que des contraintes à l'encontre des professionnels ont été créées (I), préservant ainsi l'équilibre dans les relations contractuelles et que d'autres ont été modifiées (II) pour prendre en compte l'évolution de notre société.

*N.B.* : Les attentes de cette partie de l'épreuve sont claires : dans le cadre d'une sous-épreuve de Droit qui doit pouvoir être effectuée en 1 h 30, il faut être rapide et concis. Ainsi, le travail en amont, lors de la veille juridique est donc tout autant la recherche des éléments que la compréhension du contexte juridique dans lesquels ils s'insèrent.

# DROIT

**DURÉE : 1 HEURE 30.**

*Il est recommandé de ne pas dépasser 10 pages.*

*Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*

*Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.*

## SUJET

### **PREMIÈRE PARTIE : MISE EN SITUATION JURIDIQUE**

#### **Cas SURGELES KELSEN**

Créée en 1980, la société Kelsen est spécialisée dans la fabrication de produits alimentaires surgelés. Leader de la fabrication de plats surgelés cuisinés salés haut de gamme en Europe, le groupe affiche un chiffre d'affaires en constante augmentation. Premier employeur privé du Bessin, la société Kelsen est réputée pour la qualité de ses produits, sa capacité d'innovation et son organisation pyramidale...

En France, on ne trouve pas la marque Kelsen dans les rayons des supermarchés. Le groupe fabrique des produits pour des clients comme Picard, Thiriet, Auchan, Lidl, Dia, Flunch ou Paul. Plats, entrées et, depuis peu, desserts, les produits du groupe sont principalement destinés à la grande distribution, mais également à la « restauration hors foyer », comme les cantines.

À Bayeux, où se situe le siège social de la société, deux usines fabriquent les produits Kelsen. Un troisième site est implanté en Bretagne et une quatrième usine vient d'ouvrir à Falaise.

Douze chefs travaillent dans la cellule recherche et développement. La société dispose de deux laboratoires dédiés à la recherche et un troisième spécialisé dans le transfert industriel, c'est-à-dire l'adaptation des produits à la production industrielle.

La société Kelsen se vante de n'utiliser ni OGM, ni conservateurs, ni colorants artificiels. Le groupe n'a pas été touché par les récentes crises alimentaires. « Il est facile d'acheter des matières premières à bas prix à l'autre bout du monde. Mais ce n'est pas notre politique », assure l'un de ses dirigeants, Jean-Denis Lanjuinais.

Il vous est demandé d'étudier trois dossiers juridiques et de donner un avis motivé et synthétique sur les difficultés qu'ils soulèvent...

**Questions :**

**1. Jean-Denis Lanjuinais** a passé un contrat d'approvisionnement avec un négociant en fruits et légumes biologiques, l'entreprise Pierre Hévin. Cette dernière s'est engagée, pour un an, à livrer chaque lundi à l'usine de Falaise plusieurs tonnes de fruits frais destinés à la préparation des nouvelles recettes de desserts commercialisés par Kelsen. Les premières livraisons sont satisfaisantes. Mais après trois mois, des problèmes surviennent : de nombreux fruits sont avariés et les retards de livraison s'accumulent. De plus, des analyses chimiques et bactériologiques ont révélé la présence de substances dangereuses dans certains fruits. Bien qu'elle ait été informée de la situation, l'entreprise Pierre Hervé fait la sourde oreille. Jean-Denis Lanjuinais décide alors de ne plus payer son fournisseur et de refuser les prochaines livraisons.

**Inquiet des conséquences juridiques de cette situation, Jean-Denis Lanjuinais souhaite connaître ses droits et obligations. Que pouvez-vous lui conseiller ?**

**2.** Deux chercheurs du laboratoire de recherche Kelsen de Bayeux, Alain Bouchart et Michel Sauvageau, ont mis au point un procédé chimique révolutionnaire de congélation, permettant de mieux préserver l'aspect et les saveurs de certains aliments. Ce procédé a été décrit par les deux chercheurs dans la prestigieuse revue américaine « Nature » et leur article a été salué par la communauté scientifique, qui reste cependant prudente sur les possibilités de mise en œuvre à l'échelle industrielle de cette invention.

**Très intéressé par la découverte des deux chercheurs de Kelsen, Jean-Denis Lanjuinais vous demande s'il est possible de breveter cette invention.**

**3.** La Confédération Nationale de Défense des Consommateurs (CNDF) a assigné la société Kelsen devant le Tribunal de Grande Instance de Bayeux, dans le cadre d'une action de groupe, pour obtenir l'indemnisation de plusieurs centaines de consommateurs qui auraient été trompés par des informations mensongères figurant sur les emballages de certains produits Kelsen. Selon la CNDF, le groupe Kelsen aurait en effet commercialisé sous l'appellation « Suprême de noix de Saint Jacques de Normandie » des plats cuisinés élaborés à partir d'autres espèces de coquillages provenant d'Amérique du Sud. Certains consommateurs souhaitent également s'associer à la procédure, s'estimant victimes d'une intoxication alimentaire après avoir consommé des produits Kelsen.

**Jean-Denis Lanjuinais aimerait avoir votre avis sur la validité de cette procédure et sur les risques encourus par la société Kelsen.**

## **SECONDE PARTIE : VEILLE JURIDIQUE**

**« Quelles sont les limites aux pouvoirs de l'employeur dans la rupture du contrat de travail ? »**

Vous répondrez à cette question dans un bref développement en illustrant vos propos par plusieurs exemples issus notamment de votre activité de veille juridique.

# CORRIGÉ

Par Pascal Simon-Doutreluingne, professeur au lycée René Cassin de Strasbourg.

## PREMIÈRE PARTIE : MISE EN SITUATION JURIDIQUE

### Éléments de correction

#### Remarques préliminaires

Les compétences ici recherchées sont :

- une lecture critique des faits pour identifier, au fur et à mesure de l'analyse, les notions juridiques à mobiliser ;
- une restitution précise des connaissances théoriques ;
- un respect de la forme de la réponse (syllogisme).

Il était donc indispensable d'utiliser une démarche logique et cohérente pour répondre aux différentes demandes :

- réponses justifiées en fait (travail de qualification de la situation exposée : compréhension et analyse du contexte en déterminant la pertinence des faits par rapport à la recherche de solution) ;
- réponses justifiées en droit (connaître et maîtriser son cours pour identifier quelle(s) règle(s) de droit est(sont) nécessaire(s) à la solution proposée).

*Nota Bene* : les réponses proposées dans les rubriques « Problématique et points de droit » sont ici assez précises pour que vous puissiez envisager toute l'étendue de la réponse.

### Questions :

1. Jean-Denis Lanjuinais a passé un contrat d'approvisionnement avec un négociant en fruits et légumes biologiques, l'entreprise Pierre Hévin. Cette dernière s'est engagée, pour un an, à livrer chaque lundi à l'usine de Falaise plusieurs tonnes de fruits frais destinés à la préparation des nouvelles recettes de desserts commercialisés par Kelsen. Les premières livraisons sont satisfaisantes. Mais après trois mois, des problèmes surviennent : de nombreux fruits sont avariés et les retards de livraison s'accumulent. De plus, des analyses chimiques et bactériologiques ont révélé la présence de substances dangereuses dans certains fruits. Bien qu'elle ait été informée de la situation, l'entreprise Pierre Hévin fait la sourde oreille. Jean-Denis Lanjuinais décide alors de ne plus payer son fournisseur et de refuser les prochaines livraisons.

**Inquiet des conséquences juridiques de cette situation, Jean-Denis Lanjuinais souhaite connaître ses droits et obligations. Que pouvez-vous lui conseiller ?**

### Éléments de correction

#### Remarques liminaires

Il s'agit ici d'une relation contractuelle entre deux professionnels, un fournisseur de fruits et légumes et son client, un professionnel de l'agroalimentaire. L'inexécution du contrat par le fournisseur entraîne un préjudice pour le créancier, des obligations de livraison et, sous conditions, l'engagement de sa responsabilité civile contractuelle.

D'une part, le candidat devait, alors, étudier les conséquences juridiques de la situation dans les rapports contractuels qui lient les entreprises KELSEN et HEVIN.

D'autre part, il restait à envisager les conséquences si les consommateurs des produits KELSEN se retournent contre la société sur la base du droit civil ou du droit de la consommation.

Mais la formulation, assez large, du questionnement, « les conséquences juridiques », pouvait mener le candidat à s'interroger dans un deuxième temps sur une autre problématique : la responsabilité civile délictuelle du fait des produits défectueux (article 1386-1 du code civil).

Cependant, cette analyse n'apparaît pas vraiment pertinente : le contexte est plutôt orienté vers les relations contractuelles entre les entreprises KELSEN et HEVIN, non vers d'éventuels dommages subis par les consommateurs des produits. En effet, cette responsabilité sans faute est d'abord celle du producteur, ici les agriculteurs, HEVIN n'étant que le négociant.

Mais on le verra dans les éléments de correction, l'argument de la sécurité des consommateurs peut être repris par Jean-Denis Lanjuinais pour justifier son exception d'inexécution.

La problématique est donc d'établir les conditions juridiques pour justifier une exception d'inexécution et ultérieurement la résolution/résiliation d'un contrat.

### **Les faits**

L'entreprise KELSEN s'approvisionne régulièrement auprès de la société HEVIN depuis un an. Après trois mois d'exécution du contrat, les livraisons sont effectuées avec des retards et ne correspondent pas à la qualité des produits, exigée contractuellement pour respecter la santé des consommateurs, clients de l'entreprise KELSEN.

Face à ces inexécutions répétées du contrat d'approvisionnement, Monsieur Lanjuinais, dirigeant de l'entreprise KELSEN, suspend ses paiements et refuse les prochaines livraisons.

Monsieur KELSEN souhaite obtenir réparation de son préjudice matériel, voire moral.

### **Le problème juridique et les points de droit**

L'article 1134 du code civil dispose que « *Les conventions légalement formées tiennent lieu de loi à ceux qui les ont faites. Elles ne peuvent être révoquées que de leur consentement mutuel, ou pour les causes que la loi autorise. Elles doivent être exécutées de bonne foi.* »

Cet article fonde tout le régime de la responsabilité civile contractuelle et permet ainsi à la jurisprudence d'étendre le principe d'exception d'inexécution prévu à l'article 1612 du code civil : « *Le vendeur n'est pas tenu de délivrer la chose, si l'acheteur n'en paye pas le prix, et que le vendeur ne lui ait pas accordé un délai pour le paiement.* »

Si une partie ne s'exécute pas, l'autre partie, l'exécutant, pourra suspendre l'exécution de ses obligations tant que l'autre partie ne recommence pas à s'exécuter. La principale condition de l'exception d'inexécution est toutefois que le créancier invoque l'exception de bonne foi. Une juste proportionnalité doit en effet exister entre l'obligation inexécutée et celle dont le créancier prétend suspendre l'exécution.

*N.B.* : Ce procédé comminatoire (pouvoir de contrainte) permet, sans recours au juge, de constater un abus et de permettre d'obtenir du juge, à défaut de rétablissement des relations contractuelles, la condamnation à des dommages et intérêts, voire d'obtenir la résolution/résiliation du contrat.

Enfin, les principes de la responsabilité contractuelle ont été dérivés par la jurisprudence sur la base de l'article 1147 du Code Civil qui dispose que : « *Le débiteur est condamné, s'il y a lieu, au paiement de dommages et intérêts soit à raison de l'inexécution de l'obligation, soit à raison du retard dans l'exécution, toutes les fois qu'il ne justifie pas que l'inexécution provient d'une cause étrangère qui ne peut lui être imputée, encore qu'il n'y ait aucune mauvaise foi de sa part.* »

### **La solution (proposition)**

Ces textes permettent, ainsi, d'envisager des recours :

- pour l'entreprise KELSEN : de justifier son exception d'inexécution et de demander la résiliation judiciaire du contrat sur la base de la garantie légale due par le vendeur en fonction des vices cachés (Articles 1641 à 1649 du Code civil) ;
- pour le consommateur des produits KELSEN : d'obtenir réparation de leur préjudice, sur la base de l'obligation légale de conformité (Articles L. 211-1 à L. 212-1 du code de la consommation).

Il est donc conseillé à Monsieur Lanjuinais de ne pas rester dans cette situation qui ne peut être que temporaire : si le débiteur, cédant à la contrainte, s'exécute, le contrat reprend ses effets qui n'auront été suspendus que de façon temporaire. À défaut, d'autres sanctions doivent être envisagées, puisque les obligations n'auront toujours pas été exécutées. C'est ce qui semble être le cas, la société HEVIN ne réagissant pas aux mises en demeure.

Après avoir justifié de cette exception d'inexécution (inexécution fautive de la société HEVIN, danger encouru par les consommateurs et donc nécessité d'arrêter ces livraisons et leur paiement), il devra agir au nom de la société KELSEN pour obtenir la résiliation judiciaire du contrat d'approvisionnement et obtenir des dommages et intérêts en réparation des préjudices subis.

Par ailleurs, il devra faire rappeler, au plus vite, tous les produits mis en circulation et dédommager les clients ainsi lésés.

Enfin, il devra tenter de prouver la cause étrangère pour établir une exonération de sa responsabilité civile contractuelle en cas de recours des consommateurs de ses produits.

**2.** Deux chercheurs du laboratoire de recherche Kelsen de Bayeux, Alain Bouchart et Michel Sauvageau, ont mis au point un procédé chimique révolutionnaire de congélation, permettant de mieux préserver l'aspect et les saveurs de certains aliments. Ce procédé a été décrit par les deux chercheurs dans la prestigieuse revue américaine « Nature » et leur article a été salué par la communauté scientifique, qui reste cependant prudente sur les possibilités de mise en œuvre à l'échelle industrielle de cette invention.

**Très intéressé par la découverte des deux chercheurs de Kelsen, Jean-Denis Lanjuinais vous demande s'il est possible de breveter cette invention.**

## Éléments de correction

### Remarques liminaires

Les termes de la situation présentée sont suffisamment précis pour vous orienter : « l'invention », « protéger l'entreprise contre des concurrents ».

Vos connaissances sur la propriété industrielle sont donc attendues : « La protection de l'entreprise – le mécanisme de la propriété industrielle, le brevet, la marque ».

Mais contrairement à l'année précédente, il était important de ne pas se tromper de débat : la problématique posée ne portait pas sur le fait d'un d'inventeur-salarié de l'entreprise mais sur les qualités mêmes de l'invention : « nouveauté » et « inventivité ».

La problématique est donc de déterminer et d'appliquer si « le procédé chimique révolutionnaire » est susceptible d'être protégé par un brevet.

L'intérêt de la question n'était pas uniquement de tester les connaissances précises sur les conditions de brevetabilité, mais plutôt de prendre en compte la logique du candidat : peut-il identifier dans les différents éléments du cas posé, l'information essentielle pour répondre à la question posée ?

### Les faits

Messieurs Bouchart et Sauvageau sont salariés de l'entreprise KELSEN. Ils ont pour fonction la recherche appliquée au processus productif de l'entreprise : dans ce cadre, ils découvrent un procédé chimique révolutionnaire, en font part à la communauté scientifique en publiant le résultat de leurs recherches.

Celle-ci doute de l'application industrielle qui peut être faite de ce procédé.

### **Le problème juridique et les points de droit**

L'invention doit présenter des caractéristiques strictement énumérées (avoir un caractère industriel, être nouvelle, impliquer une activité inventive et être licite) et revient à son découvreur.

Toutes les inventions ne sont pas susceptibles d'être brevetées. En effet, elles doivent réunir les conditions suivantes :

- être absolument nouvelles, et ne pas avoir été portées à la connaissance du public ni vendues. On considère comme nouveau « tout ce qui n'est pas dans l'état de la technique ». Ainsi, L611-11 2<sup>e</sup> alinéa du code de la propriété intellectuelle dispose que : « *une invention est considérée comme nouvelle si elle n'est pas comprise dans l'état de la technique* » c'est-à-dire ce qui « *est constitué par tout ce qui a été rendu accessible au public par une description orale ou écrite, un usage ou tout autre moyen avant le jour du dépôt de la demande de brevet ou demande déposée à l'étranger et dont la priorité est valablement revendiquée* ».

- être le résultat d'une activité inventive ;

- présenter un caractère industriel, donc être susceptible d'une mise en production. Ainsi, L611-15 du même code dispose qu'« *une invention est considérée comme susceptible d'application industrielle si son objet peut être fabriqué ou utilisé dans tout genre d'industrie y compris l'agriculture* ».

### **La solution (proposition)**

La question portait donc essentiellement sur le fait que cette invention, avant d'avoir été protégée, a fait l'objet d'une publication dans une revue « prestigieuse » et donc à forte diffusion dans le monde.

La nouveauté est, ainsi, détruite par une antériorité : la publication vise à mettre l'invention à la disposition du public scientifique et averti, donc apte à la mettre en pratique.

L'antériorité doit revêtir certains caractères, notamment être certaine quant à son existence (sa date, son contenu, la consistance de la matière qu'elle divulgue), suffisante (elle permet l'exécution de l'invention par un homme de l'art c'est-à-dire une personne apte à comprendre l'invention) et publique.

La nouveauté en droit français est absolue dans le temps (l'on peut opposer une antériorité en remontant dans le temps) et l'espace (peu importe le lieu de divulgation). Cet élément empêche que le procédé « révolutionnaire » puisse être considéré comme « nouveau ».

Au surplus, nous pouvions aussi envisager un autre argument : celui de l'application industrielle.

Mais il n'appartient peut-être pas à des scientifiques de juger de cette faisabilité si par ailleurs, le propriétaire de cette invention a déjà prévu de mettre en production le nouveau procédé.

**3.** La Confédération Nationale de Défense des Consommateurs (CNDP) a assigné la société Kelsen devant le Tribunal de Grande Instance de Bayeux, dans le cadre d'une action de groupe, pour obtenir l'indemnisation de plusieurs centaines de consommateurs qui auraient été trompés par des informations mensongères figurant sur les emballages de certains produits Kelsen. Selon la CNDP, le groupe Kelsen aurait en effet commercialisé sous l'appellation « Suprême de noix de Saint Jacques de Normandie » des plats cuisinés élaborés à partir d'autres espèces de coquillages provenant d'Amérique du Sud. Certains consommateurs souhaitent également s'associer à la procédure, s'estimant victimes d'une intoxication alimentaire après avoir consommé des produits Kelsen.

**Jean-Denis Lanjuinais aimerait avoir votre avis sur la validité de cette procédure et sur les risques encourus par la société Kelsen.**

### Éléments de correction

#### Remarques liminaires

Cette dernière partie du cas pratique portait sur le droit de la consommation. Déjà parce qu'elle nécessitait une maîtrise des notions juridiques relatives à l'information du consommateur, ensuite parce qu'elle évoquait une des évolutions majeures de notre réglementation protégeant le consommateur, évolution relevant du travail de veille juridique 2014.

En effet, la loi du 17 mars 2014 relative à la consommation, dite « loi Hamon », crée un nouvel « outil de régulation économique pour rééquilibrer les pouvoirs entre consommateurs et professionnels ». La procédure d'action de groupe permet à une association de consommateurs, agréée au niveau national, d'agir en justice pour un groupe de consommateurs. Cette action s'appliquera dans le cas de la vente de biens ou de la fourniture de services, et dans le cas de pratiques anticoncurrentielles.

Il n'était bien évidemment pas attendu que le candidat sache si l'association citée dans le cas était l'une des quinze associations agréées (cf. [www.justice.gouv.fr/le-ministere-de-la-justice-10017/action-de-groupe-27534.html](http://www.justice.gouv.fr/le-ministere-de-la-justice-10017/action-de-groupe-27534.html)) mais plutôt qu'il connaisse et expose les principes de cette nouvelle procédure, caractéristiques et objectifs.

### Les faits

Une association de défense des consommateurs décide d'agir en justice au titre de l'action de groupe, pour obtenir réparation du préjudice subi par les consommateurs (défaut dans la provenance des produits, intoxication alimentaire), suite à la vente par la société KELSEN de plats cuisinés à base de fruits de la mer.

### Le problème juridique et les points de droit

L'information du consommateur, et donc sa protection, repose sur un cadre légal qui a été largement renforcé par la loi n° 2008-776 du 4 août 2008 dite de modernisation de l'économie et qui donne une qualification civile et pénale à toute infraction puis la loi n° 2010-853 du 23 juillet 2010 relative aux réseaux consulaires, au commerce, à l'artisanat et aux services et enfin, par la loi du 17 mars 2014 relative à la consommation.

La principale disposition légale pertinente ici, est l'obligation d'information sur la nature du produit ou du service. L'article L. 111-1 du Code de la consommation modifié par la loi du 23 juillet 2010 prévoit que : « I. - *Tout professionnel vendeur de biens doit, avant la conclusion du contrat, mettre le consommateur en mesure de connaître les caractéristiques essentielles du bien.*

[...]

III. - *En cas de litige portant sur l'application des I et II, il appartient au vendeur de prouver qu'il a exécuté ses obligations.* »

Par ailleurs, le consommateur lésé dans son achat peut se prévaloir de la garantie légale de conformité prévue aux articles L. 211-1 à L. 212-1 du code de la consommation. On parle de défaut de conformité dans les situations suivantes :

- Le bien est impropre à l'usage habituellement attendu d'un bien semblable ;
- Le bien ne correspond pas à la description donnée par le vendeur ;
- Le bien ne possède pas les qualités annoncées par le vendeur ou convenues lors de l'achat ;
- L'action se prescrit par 2 ans.

Enfin, la loi du 17 mars 2014 permet à tous les consommateurs d'agir contre une entreprise, pour demander une indemnisation de leur préjudice, dans le cadre d'un recours mené par les associations de consommateurs agréées. C'est le tribunal de grande instance (TGI) qui est compétent en cas d'action de groupe.

Seuls les préjudices matériels sont indemnisables dans le cadre de l'action de groupe. Les dommages corporels (intoxication alimentaire notamment) ou les dommages moraux ne sont donc pas concernés.

Enfin, seules les quinze associations, agréées, sont autorisées à entamer des actions de groupe.

### La solution (proposition)

Dans la mesure où l'association CNDF est agréée pour agir, l'action pourra être accueillie sur l'atteinte à l'information des consommateurs par le TGI de Bayeux.

N.B. : l'association CNDF ne fait pas partie des quinze associations agréées.

En ce qui concerne, les cas d'intoxication alimentaire, les consommateurs qui en sont victimes ne peuvent pas obtenir de réparation par l'intermédiaire d'une action de groupe.

Le consommateur victime d'un défaut de sécurité d'un produit pourra tenter une action en justice en invoquant la responsabilité pénale, la responsabilité contractuelle. Le consommateur agira sur le fondement de la responsabilité pénale du professionnel s'il a été blessé. Le consommateur agira sur le fondement de la responsabilité contractuelle du professionnel s'il prouve que la faute du professionnel, dans le cadre du contrat de vente, est directement à l'origine du préjudice qu'il a subi.

## SECONDE PARTIE : VEILLE JURIDIQUE

« Quelles sont les limites aux pouvoirs de l'employeur dans la rupture du contrat de travail ? »

Vous répondrez à cette question dans un bref développement en illustrant vos propos par plusieurs exemples issus notamment de votre activité de veille juridique.

### Remarques préliminaires

Les éléments de veille juridique – 2014 – portant sur le thème « Droit et pouvoir » étaient nombreux et variés dans le domaine du droit du travail et tout particulièrement concernant les pouvoirs de l'employeur en cas de rupture du contrat de travail.

On citera, notamment, les législations emblématiques de cette problématique :

- la loi du 29 mars 2014 visant à reconquérir l'économie, dite « loi Florange » qui oblige à une nouvelle procédure devant prévenir la fermeture des sites industriels rentables. Une entreprise d'au moins 1 000 salariés qui souhaite fermer un site industriel devra rechercher un repreneur. Cette même entreprise devra donner accès aux entreprises candidates à toutes les informations nécessaires pour élaborer un projet de reprise ;
- la loi du 1<sup>er</sup> juillet 2014 relative à la procédure applicable devant le conseil de prud'hommes dans le cadre d'une prise d'acte de rupture du contrat de travail par le salarié, dite « loi Braillard », inscrit dans le code du travail la possibilité accordée, jusqu'alors par la jurisprudence, pour un salarié de rompre un contrat de travail aux torts de son employeur ;
- la loi du 4 août 2014 pour l'égalité entre les femmes et les hommes prévoit que pour protéger les collaboratrices libérales enceintes et les collaborateurs libéraux qui souhaitent prendre leur congé de paternité et d'accueil de l'enfant, une période de suspension de contrat et de protection contre les ruptures de contrat.

### Remarques liminaires

Il est, à nouveau, important de rappeler que :

1. le travail de veille n'est ni proposer une liste d'éléments d'actualité plus ou moins précis, ni répondre à une question de cours sur les « pouvoirs de l'employeur dans la rupture du contrat de travail et ses limites » ;
2. dès lors, les compétences attendues dans ce travail de restitution de la veille juridique effectuée sur l'année sont : comprendre la question et y répondre avec la forme demandée, « un bref développement », donc avec une introduction qui rappelle la problématique, une présentation structurée à défaut d'un plan apparent.

### Éléments de plan

Le sujet portait une limite importante dans son libellé : « les pouvoirs de l'employeur » dans « la rupture du contrat » et entraînait alors une problématique énon-

cée : le Droit (le législateur et la jurisprudence), particulièrement en 2014, a-t-il contraint ou au contraire, conforter les pouvoirs de l'employeur dans les cas de rupture du contrat de travail ?

Il ne pouvait donc être question des pouvoirs de l'employeur autres que dans le cadre du licenciement, la démission ou la rupture conventionnelle.

Il est d'usage d'énoncer que le droit du travail est protecteur des salariés. Dès lors, dans l'introduction, les candidats pouvaient, après avoir présenté le contexte de la veille et les éléments de définition requis, préciser que des contraintes existent et ont été confirmées (I), préservant ainsi l'équilibre dans les relations contractuelles et que d'autres ont été modifiées (II) pour prendre en compte l'évolution de notre société.

*N.B.* : Les attentes de cette partie de l'épreuve sont claires : il s'agit d'un « bref développement » dans le cadre d'une sous-épreuve de Droit qui doit pouvoir être effectuée en 1 h 30.

Ainsi, le travail en amont, lors de la veille juridique est donc tout autant la recherche des éléments que la compréhension du contexte juridique dans lesquels ils s'insèrent.

Enfin, on pouvait aux textes législatifs cités plus haut ajoutés, notamment, les éléments suivants :

<p><b>Le régime légal de la période d'essai.</b> L'arrêt n° 13-18114 de la chambre sociale de la cour de cassation, à propos de la période d'essai dont la durée ne peut être allongée par un délai de prévenance créé par la loi du 25 juin 2008, confirme le 5 novembre 2014 la requalification en licenciement abusif une rupture à l'initiative de l'employeur.</p>	<p><b>La confirmation de l'intérêt légitime de l'entreprise contre celui d'un salarié.</b> Un employeur voit sa décision de licenciement d'une salariée titulaire d'un mandat local, confirmée. Celle-ci contestait une modification de son contrat incompatible, selon elle, avec son mandat d'élu local (arrêt n° 13-11060 de la chambre sociale de la cour de cassation du 2 avril 2014).</p>
<p><b>La fin de la rupture amiable ?</b> La cour de cassation le 15 octobre 2014 requalifie en rupture conventionnelle et exige donc l'application de sa procédure à une situation pourtant envisagée comme une rupture amiable (arrêt n° 11-22251).</p>	<p><b>Une nouvelle flexibilité dans le choix des modes de rupture.</b> Un entretien préalable au licenciement peut se transformer en entretien préparatoire à une rupture conventionnelle (arrêt 13-21979 du 9 novembre 2014).</p>

# MATHÉMATIQUES

**DURÉE : 4 HEURES.**

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

*Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.*

*- L'épreuve est constituée de quatre exercices indépendants.*

*- La probabilité d'un événement  $B$  est notée  $P(B)$ .*

## S U J E T

### EXERCICE 1

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  à valeurs réelles telle que :  $f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$ .

On ne cherchera pas à calculer l'intégrale qui définit  $f(x)$ .

- Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  à valeurs réelles telle que  $g(t) = \frac{e^t}{t}$  et  $G$  une primitive de  $g$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
    - Pour tout réel  $x > 0$ , exprimer  $f(x)$  à l'aide de la fonction  $G$ .
    - Déduire de la question précédente que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et pour tout réel  $x > 0$ , calculer  $f'(x)$  où  $f'$  désigne la fonction dérivée de  $f$ .
    - Calculer  $f(1)$ .
  - Établir pour tout réel  $x \geq 1$ , l'inégalité :  $f(x) \geq e \times \ln x$ .
    - En déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
  - Établir pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $]0, 1]$ , l'inégalité :  $f(x) \leq e^x \times \ln x$ .
    - En déduire  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ .
- 4 Dresser le tableau de variation de  $f$ .
- On note  $(C)$  la courbe représentative de  $f$  dans le plan rapporté à un repère orthogonal (unité 1 cm pour les abscisses et  $e$  cm pour les ordonnées). On rappelle que le nombre  $e$  est à peu près égal à 2,7.
    - On note  $f''$  la dérivée seconde de  $f$ . Pour tout réel  $x > 0$ , calculer  $f''(x)$ .
    - Montrer que la courbe  $(C)$  admet un point d'inflexion  $A$  et déterminer les coordonnées du point  $A$ .
    - Écrire l'équation de la tangente  $(T)$  à la courbe  $(C)$  au point  $A$ .
    - Tracer l'allure de la courbe  $(C)$  en précisant la position relative de  $(C)$  et  $(T)$ .
  - Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe un unique réel, noté  $u_n$ , vérifiant  $\int_1^{u_n} \frac{e^t}{t} dt = n$ .
    - En utilisant les variations de la fonction  $f$ , montrer que la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est croissante.
    - Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

## EXERCICE 2

Pour tout couple  $(a, b)$  de  $\mathbb{R}^2$ , soit  $M$  la matrice carrée d'ordre 2 définie par :  $M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$ .

1. Dans cette question, on choisit  $a = b = -1$ .

- La matrice  $M$  est-elle inversible ?
- Calculer pour tout entier  $n \geq 2$ , la matrice  $M^n$ .

2. Dans cette question, on choisit  $a = b$ .

- La matrice  $M$  est-elle inversible ?
- Montrer que pour tout entier  $n \geq 2$ , on a :  $M^n = (1 + a)^{n-1} M$ .

3. On revient au cas général où  $a$  et  $b$  sont des réels quelconques.

Montrer que la matrice  $M$  est inversible si et seulement si  $a \neq b$ .

4. Dans cette question, on considère deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  indépendantes et suivant toutes les deux la loi géométrique de paramètre  $p$  avec  $0 < p < 1$ . On pose :  $q = 1 - p$ .

Soit  $N$  la matrice aléatoire définie par  $N = \begin{pmatrix} 1 & X \\ 1 & Y \end{pmatrix}$  et  $A$  l'événement : " la matrice  $N$  est inversible " .

a) Établir la relation :  $P([X = Y]) = \sum_{k=1}^{+\infty} P([X = k]) \times P([Y = k])$ .

b) Calculer  $\sum_{k=1}^{+\infty} p^2 q^{2k-2}$ .

c) En déduire  $P(A)$  en fonction de  $q$ .

5. Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 1.

Dans cette question, on considère deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  indépendantes et suivant toutes les deux la loi binomiale de paramètres  $n$  et  $\frac{1}{2}$ .

Soit  $N$  la matrice aléatoire définie par  $N = \begin{pmatrix} 1 & X \\ 1 & Y \end{pmatrix}$  et  $A$  l'événement : " la matrice  $N$  est inversible " .

a) Pour  $x$  réel, écrire les développements de  $(x + 1)^n$  et  $(x + 1)^{2n}$  à l'aide de la formule du binôme.

b) En utilisant l'identité  $(x + 1)^{2n} = (x + 1)^n (x + 1)^n$ , montrer que l'on a :  $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k}$ .

c) En déduire la relation :  $P([X = Y]) = \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n}$ .

d) Calculer  $P(A)$  en fonction de  $n$ .

## EXERCICE 3

1. Soit  $T$  une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1.  
Donner sans calcul les valeurs de l'espérance  $E(T)$  et de la variance  $V(T)$  de la variable aléatoire  $T$ .
2. Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  à valeurs réelles telle que :

$$f(t) = \begin{cases} t e^{-t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}.$$

- a) Montrer que  $f$  est une densité de probabilité d'une variable aléatoire  $X$  à densité.  
b) En utilisant la question 1, montrer que la variable aléatoire  $X$  admet une espérance et donner sa valeur.
3. Soit  $F$  la fonction de répartition de la variable aléatoire  $X$ .

$$\text{Montrer que l'on a : pour tout } x \text{ réel, } F(x) = \begin{cases} 1 - (x+1)e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Soit  $X_1$  et  $X_2$  deux variables aléatoires indépendantes et suivant toutes les deux la même loi que  $X$ .  
Soit  $Z$  la variable aléatoire définie par  $Z = \min(X_1, X_2)$ .

- 4.a) Justifier que pour tout  $x$  réel, on a :  $P([Z > x]) = P([X_1 > x]) \times P([X_2 > x])$ .  
b) Déterminer la fonction de répartition  $H$  de la variable aléatoire  $Z$ .  
c) Montrer qu'une densité  $h$  de  $Z$  est donnée par :  $h(x) = \begin{cases} 2x(x+1)e^{-2x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ .

5. Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  à valeurs réelles telle que :

$$g(x) = -\left(x^3 + \frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{5}{4}\right)e^{-2x}.$$

On note  $g'$  la fonction dérivée de la fonction  $g$ .

- a) Pour tout  $x$  réel, calculer  $g'(x)$ .  
b) En déduire que l'espérance  $E(Z)$  de la variable aléatoire  $Z$  est égale à  $\frac{5}{4}$ .
6. Soit  $W$  la variable aléatoire définie par  $W = \max(X_1, X_2)$ .  
a) Exprimer la variable aléatoire  $Z + W$  en fonction de  $X_1$  et  $X_2$ .  
b) En déduire la valeur de l'espérance  $E(W)$  de la variable aléatoire  $W$ .  
c) Exprimer la variable aléatoire  $|X_1 - X_2|$  en fonction de  $Z$  et  $W$ .  
d) En déduire la valeur de l'espérance  $E(|X_1 - X_2|)$  de la variable aléatoire  $|X_1 - X_2|$ .

## EXERCICE 4

Soit  $M$  une matrice carrée d'ordre 3 et  $I$  la matrice unité d'ordre 3. On pose par convention :  $M^0 = I$ .

On se propose d'étudier la suite réelle  $(u_n)_{n \geq 0}$  définie par :

$$u_0 = 0, u_1 = 0, u_2 = 1 \text{ et pour tout entier naturel } n, u_{n+3} = 2u_{n+2} - \frac{5}{4}u_{n+1} + \frac{1}{4}u_n.$$

Soit  $A$  la matrice carrée d'ordre 3 telle que  $A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 8 & -5 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$  et pour tout entier naturel  $n$ , soit  $X_n$  la

matrice à trois lignes et une colonne définie par :  $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$ .

1. Déterminer  $X_0$  et  $X_1$ .

2.a) Justifier pour tout entier naturel  $n$ , l'égalité :  $X_{n+1} = AX_n$ .

b) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, en déduire pour tout entier naturel  $n$ , la relation :  $X_n = A^n X_0$ .

3. Soit  $P$ ,  $Q$  et  $T$  les matrices suivantes :  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $Q = \begin{pmatrix} 16 & -16 & 4 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$  et  $T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

a) Calculer le produit  $PQ$ . En déduire que la matrice  $P$  est inversible et déterminer sa matrice inverse  $P^{-1}$ .

b) Calculer les produits  $PT$  et  $AP$ . En déduire pour tout entier naturel  $n$ , l'égalité :  $A^n = PT^n P^{-1}$ .

4. Soit  $D$  la matrice définie par :  $D = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . On pose :  $N = T - D$ .

a) Déterminer pour tout entier  $k \geq 2$ , la matrice  $N^k$ .

b) Vérifier que  $DN = ND$  et montrer que pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $T^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

c) En déduire pour tout entier naturel  $n$ , l'expression de la matrice  $A^n$ .

5.a) Déduire des questions précédentes l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .

b) Déterminer la limite de la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$ .

# CORRIGÉ

Par Bernard Delacampagne, professeur de mathématiques au lycée Madeleine-Michelis à Amiens.

## EXERCICE 1

1.a. Par définition d'une intégrale, et puisque  $G$  est une primitive de  $g$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ , on a, **pour tout réel strictement positif  $x$**  :

$$f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt = \int_1^x g(t) dt = [G(t)]_1^x = G(x) - G(1)$$

b.  $G$  étant une primitive de  $g$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ ,  $G$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et on a :

$$G' = g$$

D'après l'expression de  $f(x)$  trouvée à la question 1.a,  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ , comme différence de la fonction dérivable  $G$  et de la fonction constante  $x \mapsto G(1)$ , dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ , de dérivée nulle, et on a donc, **pour tout réel strictement positif  $x$**  :

$$f'(x) = g(x) = \frac{e^x}{x}$$

c. D'après la question 1.a, on a :

$$f(1) = G(1) - G(1) = 0$$

2.a.  $x$  étant un réel supérieur ou égal à 1, on a, par croissance de la fonction exponentielle sur  $\mathbb{R}$  :

$$\forall t \in [1, x] \quad e^t \geq e^1 = e$$

Il en résulte, par division par  $t$ , réel strictement positif, que :

$$\forall t \in [1, x] \quad \frac{e^t}{t} \geq \frac{e}{t}$$

En intégrant cette inégalité sur l'intervalle  $[1, x]$ , on obtient :

$$f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt \geq \int_1^x \frac{e}{t} dt$$

Or, on a :

$$\int_1^x \frac{e}{t} dt = e \int_1^x \frac{1}{t} dt = e [\ln t]_1^x = e(\ln x - \ln 1) = e \ln x$$

On a bien montré que, **pour tout réel  $x$  supérieur ou égal à 1**, on a :

$$f(x) \geq e \ln x$$

b. On a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e \ln x = +\infty \quad \text{car} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \quad \text{et} \quad e > 0$$

D'après l'inégalité de la question 2.a et un théorème de comparaison, on en déduit que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

3.a.  $x$  étant un réel appartenant à  $]0, 1]$ , on a, par croissance de la fonction exponentielle sur  $\mathbb{R}$  :

$$\forall t \in [x, 1] \quad e^x \leq e^t$$

Il en résulte, par division par  $t$ , réel strictement positif, que :

$$\forall t \in [x, 1] \quad \frac{e^x}{t} \leq \frac{e^t}{t}$$

En intégrant cette inégalité sur  $[x, 1]$ , on obtient :

$$\int_x^1 \frac{e^x}{t} dt \leq \int_x^1 \frac{e^t}{t} dt$$

Or, on a :

$$\int_x^1 \frac{e^x}{t} dt = e^x \int_x^1 \frac{1}{t} dt = e^x [\ln t]_x^1 = e^x (\ln 1 - \ln x) = -e^x \ln x$$

Comme de plus  $f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt = -\int_x^1 \frac{e^t}{t} dt$ , il vient, pour tout réel  $x$  appartenant à  $]0, 1[$  :

$$-e^x \ln x \leq -f(x)$$

On a bien montré que, **pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $]0, 1[$** , on a :

$$f(x) \leq e^x \ln x$$

b. On a :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^x \ln x = -\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

D'après l'inégalité de la question 3.a et un théorème de comparaison, on en déduit que :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

4. D'après la question 1.b, on a, pour tout réel strictement positif  $x$  :

$$f'(x) = \frac{e^x}{x} > 0$$

Donc  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+^*$  ; le tableau de variation de  $f$  est le suivant :

<b>x</b>	<b>0</b>	<b><math>+\infty</math></b>
<b><math>f'</math></b>		<b>+</b>
<b>f</b>	<b><math>-\infty</math></b>	<b><math>+\infty</math></b>

5.a. On a vu, à la question 1.b, que pour tout réel strictement positif  $x$ , on a :

$$f'(x) = \frac{e^x}{x}$$

Il en résulte que **pour tout réel strictement positif  $x$** , on a :

$$f''(x) = \frac{xe^x - e^x}{x^2} = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$$

b.  $e^x$  et  $x^2$  étant strictement positifs sur  $\mathbb{R}_+^*$ ,  $f''(x)$  est du signe de  $x-1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ , et s'annule donc en changeant de signe en  $x=1$ . Donc **la courbe (C) admet un point d'inflexion A** d'abscisse 1 ; puisque  $f(1) = 0$  d'après la question 1.c, les coordonnées de A sont :

$$A(1, 0)$$

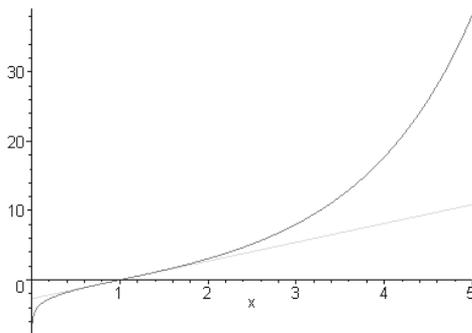
c. Une équation de la tangente (T) à (C) au point A est :

$$y = f'(1)(x-1) + f(1) = e(x-1)$$

d. D'après la question 5.b,  $f$  est concave sur  $]0, 1[$  et convexe sur  $[1, +\infty[$ , car  $f'' \leq 0$  sur  $]0, 1[$

et  $f' \geq 0$  sur  $[1, +\infty[$ ; donc (C) est en dessous de (T) sur  $]0, 1]$ , et (C) est au-dessus de (T) sur  $[1, +\infty[$ .

L'allure de la courbe (C) est la suivante :



6.a. Remarquons que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$\int_1^{u_n} \frac{e^t}{t} dt = n \Leftrightarrow f(u_n) = n$$

$f$  est continue  $\mathbb{R}_+^*$  (car dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  d'après la question 1.b) et strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+^*$  (d'après la question 4), donc  $f$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}_+^*$  sur  $f(\mathbb{R}_+^*)$ .

On a, d'après les questions 2.b et 3.b :

$$f(\mathbb{R}_+^*) = f(]0, +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[ = ]-\infty, +\infty[ = \mathbb{R}$$

Pour tout entier naturel  $n$ ,  $n$  appartient à  $f(\mathbb{R}_+^*)$ , donc **il existe un unique réel, noté  $u_n$ ,**

**appartenant à  $\mathbb{R}_+^*$  et vérifiant  $f(u_n) = n$ , c'est à dire  $\int_1^{u_n} \frac{e^t}{t} dt = n$ .**

b. Par définition de  $u_n$ , on a, pour tout entier naturel  $n$  :

$$f(u_n) = n < f(u_{n+1}) = n + 1$$

Puisque  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ , il en résulte que, pour tout entier naturel  $n$  :

$$u_n < u_{n+1}$$

Donc la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est (strictement) croissante.

c. D'après la question 6.b, la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est croissante ; elle peut donc avoir une limite finie  $\ell$  ou diverger vers  $+\infty$ .

Si la suite avait une limite finie  $\ell$ , on aurait, puisque  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$  :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(\ell)$$

Soit encore, par définition de  $u_n$ , le résultat absurde :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n = f(\ell)$$

On en déduit donc que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

**EXERCICE 2**

1. Dans cette question, on choisit  $a = b = -1$ , donc on a :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

a. La transformation  $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$  transforme la matrice  $M$  en la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , qui est triangulaire avec un 0 sur la diagonale, donc la méthode du pivot de Gauss assure que la **matrice  $M$  n'est pas inversible**.

b. On a, en notant  $O$  la matrice carrée nulle d'ordre 2 :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

Il vient donc, **pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 2** :

$$M^n = M^{n-2}M^2 = M^{n-2}O = O$$

2. Dans cette question, on choisit  $a = b$ , donc on a :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & a \end{pmatrix}$$

a. La même transformation  $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$  transforme la matrice  $M$  en la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , qui est triangulaire avec un 0 sur la diagonale, donc la méthode du pivot de Gauss assure que la **matrice  $M$  n'est pas inversible**.

b. On a :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+a & a+a^2 \\ 1+a & a+a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+a & a(1+a) \\ 1+a & a(1+a) \end{pmatrix} = (1+a) \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & a \end{pmatrix} = (1+a)M$$

Montrons alors par récurrence la propriété  $P_n$ , définie pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 2, par :

$$M^n = (1+a)^{n-1} M$$

Initialisation :

$P_2$  est vraie car on a, d'après ce qui précède :

$$(1+a)^{2-1} M = (1+a)^1 M = (1+a)M = M^2$$

Hérédité :

On suppose  $P_n$  vraie, pour une valeur de l'entier naturel  $n$ , c'est-à-dire :

$$M^n = (1+a)^{n-1} M$$

On montre que  $P_{n+1}$  est vraie, c'est-à-dire :

$$M^{n+1} = (1+a)^n M$$

On a, d'après l'hypothèse de récurrence et l'égalité  $M^2 = (1+a)M$  :

$$M^{n+1} = M^n M = (1+a)^{n-1} M M = (1+a)^{n-1} M^2 = (1+a)^{n-1} (1+a)M = (1+a)^n M$$

Ceci assure que  $P_{n+1}$  est vraie.

D'après le principe de récurrence, on peut conclure que, **pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2**, on a :

$$M^n = (1 + a)^{n-1} M$$

3. La même transformation  $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$  transforme la matrice  $M$  en la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b-a \end{pmatrix}$ , qui est triangulaire, donc la méthode du pivot de Gauss assure que la matrice  $M$  est inversible si et seulement si les termes diagonaux de la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b-a \end{pmatrix}$  sont non nuls.

Ainsi **la matrice M est-elle inversible si et seulement si  $a \neq b$** .

4.a.  $X$  et  $Y$  suivant toutes les deux une loi géométrique, on a :

$$X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$$

On a donc :

$$[X = Y] = \bigcup_{k=1}^{+\infty} ([X = k] \cap [Y = k])$$

Puisque les événements  $[X = k] \cap [Y = k]$  sont deux à deux incompatibles, on a :

$$P([X = Y]) = \sum_{k=1}^{+\infty} P([X = k] \cap [Y = k])$$

Les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  étant indépendantes, il vient enfin :

$$P([X = Y]) = \sum_{k=1}^{+\infty} P([X = k])P([Y = k])$$

b. La série  $\sum_{k=0}^{+\infty} (q^2)^k$  est une série géométrique de raison  $q^2$  avec  $-1 < q^2 < 1$ , donc cette série est convergente et on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (q^2)^k = \frac{1}{1-q^2}$$

Il en résulte que la série  $\sum_{k=1}^{+\infty} p^2 q^{2k-2}$  est convergente et qu'on a, par changement d'indice :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} p^2 q^{2k-2} = p^2 \sum_{k=1}^{+\infty} q^{2(k-1)} = p^2 \sum_{k=1}^{+\infty} (q^2)^{(k-1)} = p^2 \sum_{k=0}^{+\infty} (q^2)^k = \frac{p^2}{1-q^2} = \frac{p^2}{(1-q)(1+q)}$$

Puisque  $q = 1 - p$ , on a finalement :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} p^2 q^{2k-2} = \frac{p^2}{p(1+q)} = \frac{p}{1+q}$$

c. D'après la question 3,  $N$  est inversible si et seulement si  $X \neq Y$ , donc on a :

$$A = [X \neq Y]$$

Il en résulte, d'après la question 4.a, que :

$$P(A) = P([X \neq Y]) = 1 - P([X = Y]) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} P([X = k])P([Y = k])$$

$X$  et  $Y$  suivant toutes les deux la loi géométrique de paramètre  $p$ , on a, pour tout entier naturel non nul  $k$  :

$$P([X = k]) = P([Y = k]) = pq^{k-1}$$

Donc :

$$P([X = k])P([Y = k]) = (pq^{k-1})^2 = p^2q^{2(k-1)}$$

Il vient donc, d'après la question 4.b :

$$P(A) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} p^2q^{2k-2} = 1 - \frac{p}{1+q} = \frac{1+q-p}{1+q} = \frac{1+q-(1-q)}{1+q} = \frac{2q}{1+q}$$

**5.a.** L'utilisation de la formule du binôme de Newton donne, **pour tout réel x et tout entier naturel n supérieur ou égal à 1** :

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$$

Et, de même :

$$(x+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k$$

**b.** L'identité  $(x+1)^{2n} = (x+1)^n (x+1)^n$  et les résultats de la question 5.a permettent d'écrire :

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k = \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \right) \left( \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i \right)$$

$\binom{2n}{n}$  est le coefficient de  $x^n$  dans le polynôme  $\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k$  ; dans le membre de droite de

l'égalité ci-dessus, le terme de degré n est obtenu comme somme des termes  $\binom{n}{k} x^k \binom{n}{i} x^i$

avec  $k+i=n$ , donc on a :

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k+i=n} \binom{n}{k} \binom{n}{i} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k}$$

**c.** X et Y suivant toutes les deux une binomiale de paramètres n et  $\frac{1}{2}$ , on a :

$$X(\Omega) = Y(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$$

On a donc :

$$[X = Y] = \bigcup_{k=0}^n ([X = k] \cap [Y = k])$$

Puisque les événements  $[X = k] \cap [Y = k]$  sont deux à deux incompatibles, on a :

$$P([X = Y]) = \sum_{k=0}^n P([X = k] \cap [Y = k])$$

Les variables aléatoires X et Y étant indépendantes, il vient enfin :

$$P([X = Y]) = \sum_{k=0}^n P([X = k])P([Y = k])$$

X et Y suivant toutes les deux la loi binomiale de paramètres n et  $\frac{1}{2}$ , on a, pour tout entier

naturel  $k$  de  $\llbracket 0, n \rrbracket$  :

$$P([X = k]) = P([Y = k]) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-k} = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Donc :

$$P([X = k])P([Y = k]) = \left(\binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^2 = \binom{n}{k}^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \frac{1}{2^{2n}} \binom{n}{k}^2 = \frac{1}{4^n} \binom{n}{k}^2$$

Il en résulte, d'après la question 5.b, que :

$$P([X = Y]) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{4^n} \binom{n}{k}^2 = \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n}$$

d. Comme dans la question 4.c, et en utilisant le résultat de la question 5.c, on obtient :

$$P(A) = 1 - P([X = Y]) = 1 - \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n}$$

### EXERCICE 3

1.  $T$  étant une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre  $\lambda = 1$ , les valeurs de l'espérance  $E(T)$  et de la variance  $V(T)$  de la variable aléatoire  $T$  sont respectivement :

$$E(T) = \frac{1}{\lambda} = 1 \text{ et } V(T) = \frac{1}{\lambda^2} = 1$$

2.a.  $f$  est continue sur  $]-\infty, 0[$  comme fonction nulle, et continue sur  $[0, +\infty[$  comme produit et composée de fonctions continues ; on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 0 = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} te^{-t} = 0 = f(0)$$

Puisque  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$ ,  $f$  est continue en 0, donc  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

Pour tout réel positif ou nul  $t$ , on a :

$$f(t) = te^{-t} \geq 0$$

Pour tout réel strictement négatif  $t$ , on a :

$$f(t) = 0 \geq 0$$

Donc  $f$  est positive ou nulle sur  $\mathbb{R}$ .

Une densité  $d$  de la variable aléatoire  $T$  de la question 1 est définie par :

$$d(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} = e^{-t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

On sait que  $\int_{-\infty}^0 f(x) dx$  converge car :

$$\int_{-\infty}^0 f(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 dx = 0$$

$\int_0^{+\infty} f(x) dx$  converge car, d'après la question 1 :

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = \int_0^{+\infty} xe^{-x} dx = \int_0^{+\infty} xd(x) dx = E(T) = 1$$

Donc  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$  converge et on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{+\infty} f(x) dx = 0 + 1 = 1$$

Donc **f est bien une densité de probabilité.**

**b.** La variable aléatoire X admet une espérance si et seulement si  $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx$  converge, et dans ce cas, on a :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx$$

On sait que  $\int_{-\infty}^0 xf(x) dx$  converge car :

$$\int_{-\infty}^0 xf(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 dx = 0$$

$\int_0^{+\infty} xf(x) dx$  converge car, d'après la question 1 et la formule de Koëning :

$$\int_0^{+\infty} xf(x) dx = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} x^2 d(x) = E(T^2) = V(T) + (E(T))^2 = 1 + 1 = 2$$

Donc  $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx$  converge, donc **la variable aléatoire X admet une espérance** et on a :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx = \int_{-\infty}^0 xf(x) dx + \int_0^{+\infty} xf(x) dx = 0 + 2 = 2$$

**3.** La fonction de répartition F de la variable aléatoire X est définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

Il vient donc :

$$\forall x \in ]-\infty, 0[ \quad F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$$

Et :

$$\forall x \in [0, +\infty[ \quad F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x te^{-t} dt = \int_0^x te^{-t} dt$$

On pose :

$$\begin{aligned} u(t) &= t & u'(t) &= 1 \\ v'(t) &= e^{-t} & v(t) &= -e^{-t} \end{aligned}$$

Il vient alors, par intégration par parties,  $u'$  et  $v'$  étant continues sur  $[0, x]$  :

$$\int_0^x te^{-t} dt = [-te^{-t}]_0^x - \int_0^x (-e^{-t}) dx = -xe^{-x} - [-e^{-t}]_0^x = -xe^{-x} - e^{-x} + 1 = 1 - (x+1)e^{-x}$$

Ainsi a-t-on, **pour tout réel x** :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - (x+1)e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

**4.a.** On a, pour tout réel x :

$$Z > x \Leftrightarrow \min(X_1, X_2) > x \Leftrightarrow (X_1 > x \text{ et } X_2 > x)$$

Il vient donc, puisque  $X_1$  et  $X_2$  deux variables aléatoires indépendantes, **pour tout réel x** :

$$P([Z > x]) = P([X_1 > x] \cap [X_2 > x]) = P([X_1 > x])P([X_2 > x])$$

**b.** Par définition de la fonction de répartition H de la variable aléatoire Z et d'après la question 4.a, on a, pour tout réel x :

$$H(x) = P([Z \leq x]) = 1 - P([Z > x]) = 1 - P([X_1 > x])P([X_2 > x])$$

$X_1$  et  $X_2$  étant deux variables aléatoires suivant toutes les deux la même loi que  $X$ , on a :

$$P([X_1 > x]) = P([X_2 > x]) = P([X > x]) = 1 - P([X \leq x]) = 1 - F(x)$$

Il en résulte, pour tout réel  $x$  :

$$H(x) = 1 - (1 - F(x))^2$$

D'après la question 3, il vient donc, **pour tout réel  $x$**  :

$$H(x) = \begin{cases} 1 - (x+1)^2 e^{-2x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

c. Une densité  $h$  de  $Z$  s'obtient en dérivant  $H$  là où cela est possible, c'est-à-dire ici sur  $\mathbb{R}^*$ , et en prolongeant  $h$  en 0, pour obtenir une fonction définie sur  $\mathbb{R}$ .

On a donc :

$$h(x) = H'(x) = \begin{cases} -2(x+1)e^{-2x} - (x+1)^2(-2)e^{-2x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

On a, pour tout réel  $x$  strictement positif :

$$-2(x+1)e^{-2x} - (x+1)^2(-2)e^{-2x} = 2(-x-1+x^2+2x+1)e^{-2x} = 2(x^2+x)e^{-2x} = 2x(x+1)e^{-2x}$$

En posant  $h(0) = 0$ , **une densité  $h$  de  $Z$  est bien donnée par :**

$$h(x) = \begin{cases} 2x(x+1)e^{-2x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

**5.a.** On a, **pour tout réel  $x$**  :

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\left(3x^2 + 5x + \frac{5}{2}\right)e^{-2x} - \left(x^3 + \frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{5}{4}\right)(-2e^{-2x}) \\ &= \left(-3x^2 - 5x - \frac{5}{2} + 2x^3 + 5x^2 + 5x + \frac{5}{2}\right)e^{-2x} = (2x^3 + 2x^2)e^{-2x} \\ &= 2x^2(x+1)e^{-2x} \end{aligned}$$

**b.** La variable aléatoire  $Z$  admet une espérance si et seulement si  $\int_{-\infty}^{+\infty} xh(x) dx$  converge, et dans ce cas, on a :

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} xh(x) dx$$

On sait que  $\int_{-\infty}^0 xh(x) dx$  converge car :

$$\int_{-\infty}^0 xh(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 dx = 0$$

Pour tout réel positif ou nul  $x$ , on a :

$$\begin{aligned} \int_0^x th(t) dt &= \int_0^x th(t) dt = \int_0^x 2t^2(t+1)e^{-2t} dt = \int_0^x g'(t) dt = [g(t)]_0^x = g(x) - g(0) \\ &= -\left(x^3 + \frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{5}{4}\right)e^{-2x} + \frac{5}{4} \end{aligned}$$

On a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x th(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\left(x^3 + \frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{5}{4}\right)e^{-2x} + \frac{5}{4}\right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( -\left( \frac{1}{8} + \frac{5}{16x} + \frac{5}{16x^2} + \frac{5}{32x^3} \right) (2x)^3 e^{-2x} + \frac{5}{4} \right) = \frac{5}{4}$$

Car :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{8} + \frac{5}{16x} + \frac{5}{16x^2} + \frac{5}{32x^3} \right) = \frac{1}{8}$$

Et :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x)^3 e^{-2x} = 0 \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty \text{ et, par croissance comparée, } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^{-x} = 0$$

Donc  $\int_0^{+\infty} xh(x) dx$  converge et on a :

$$\int_0^{+\infty} xh(x) dx = \frac{5}{4}$$

Donc  $\int_{-\infty}^{+\infty} xh(x) dx$  converge, donc **la variable aléatoire Z admet une espérance** et on a :

$$\mathbf{E}(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} xh(x) dx = \int_{-\infty}^0 xh(x) dx + \int_0^{+\infty} xh(x) dx = 0 + \frac{5}{4} = \frac{5}{4}$$

**6.a.** Lorsque  $X_1 \leq X_2$ , on a :

$$Z = \min(X_1, X_2) = X_1 \text{ et } W = \max(X_1, X_2) = X_2$$

Donc :

$$Z + W = X_1 + X_2$$

Lorsque  $X_2 < X_1$ , on a :

$$Z = \min(X_1, X_2) = X_2 \text{ et } W = \max(X_1, X_2) = X_1$$

Donc :

$$Z + W = X_2 + X_1$$

Donc on a, dans les deux cas :

$$\mathbf{Z + W = X_1 + X_2}$$

**b.** Par linéarité de l'espérance, et d'après les questions 6.a, 2.b et 5.b, il vient :

$$\mathbf{E(W)} = E(X_1 + X_2 - Z) = E(2X - Z) = 2E(X) - E(Z) = 2 \cdot 2 - \frac{5}{4} = 4 - \frac{5}{4} = \frac{11}{4}$$

**c.** Lorsque  $X_1 \leq X_2$ , on a :

$$Z = \min(X_1, X_2) = X_1, W = \max(X_1, X_2) = X_2 \text{ et } |X_1 - X_2| = X_2 - X_1 \text{ car } X_1 - X_2 \leq 0$$

Donc :

$$|X_1 - X_2| = W - Z$$

Lorsque  $X_2 < X_1$ , on a :

$$Z = \min(X_1, X_2) = X_2, W = \max(X_1, X_2) = X_1 \text{ et } |X_1 - X_2| = X_1 - X_2 \text{ car } X_1 - X_2 > 0$$

Donc :

$$|X_1 - X_2| = W - Z$$

Donc on a, dans les deux cas :

$$\mathbf{|X_1 - X_2| = W - Z}$$

**d.** Par linéarité de l'espérance, et d'après les questions 5.b et 6.c, il vient :

$$\mathbf{E(|X_1 - X_2|)} = E(W - Z) = E(W) - E(Z) = \frac{11}{4} - \frac{5}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

EXERCICE 4

1. Par définition de la matrice  $X_n$ , on a :

$$X_0 = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } X_1 = \begin{pmatrix} u_3 \\ u_2 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Car :

$$u_3 = 2u_2 - \frac{5}{4}u_1 + \frac{1}{4}u_0 = 2$$

2.a. Par définition de la matrice  $X_n$ , et vu la relation de récurrence définissant la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$ , on a, **pour tout entier naturel n** :

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u_{n+2} - \frac{5}{4}u_{n+1} + \frac{1}{4}u_n \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 8 & -5 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = AX_n$$

b. Montrons par récurrence la propriété  $P_n$ , définie pour tout entier naturel n, par :

$$X_n = A^n X_0$$

Initialisation :

$P_0$  est vraie car on a :

$$A^0 X_0 = IX_0 = X_0$$

Hérédité :

On suppose  $P_n$  vraie, pour une valeur de l'entier naturel n, c'est-à-dire :

$$X_n = A^n X_0$$

On montre que  $P_{n+1}$  est vraie, c'est-à-dire :

$$X_{n+1} = A^{n+1} X_0$$

On a, d'après l'hypothèse de récurrence et la question 2.a :

$$X_{n+1} = AX_n = AA^n X_0 = A^{n+1} X_0$$

Ceci assure que  $P_{n+1}$  est vraie.

D'après le principe de récurrence, on peut conclure que, **pour tout entier naturel n**, on a :

$$X_n = A^n X_0$$

3.a. On a :

$$PQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 & -16 & 4 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4I$$

Cette égalité peut encore s'écrire :

$$P \left( \frac{1}{4} Q \right) = I$$

Ceci assure que **la matrice P est inversible** et que sa matrice inverse est :

$$P^{-1} = \frac{1}{4}Q$$

b. Les calculs donnent :

$$PT = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 8 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Et :

$$AP = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 8 & -5 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 12 \\ 4 & 4 & 16 \\ 4 & 8 & 16 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 8 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Montrons alors par récurrence la propriété  $P_n$ , définie pour tout entier naturel  $n$ , par :

$$A^n = PT^nP^{-1}$$

Initialisation :

$P_0$  est vraie car on a :

$$PT^0P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I = A^0$$

Hérédité :

On suppose  $P_n$  vraie, pour une valeur de l'entier naturel  $n$ , c'est-à-dire :

$$A^n = PT^nP^{-1}$$

On montre que  $P_{n+1}$  est vraie, c'est-à-dire :

$$A^{n+1} = PT^{n+1}P^{-1}$$

Le calcul des produits  $PT$  et  $AP$  permet de constater que :

$$AP = PT$$

Par multiplication à droite par  $P^{-1}$  des deux membres de cette égalité, il vient donc :

$$A = PTP^{-1}$$

On a donc, d'après l'hypothèse de récurrence et l'égalité précédente :

$$A^{n+1} = A^nA = PT^nP^{-1}PTP^{-1} = PT^nITP^{-1} = PT^nTP^{-1} = PT^{n+1}P^{-1}$$

Ceci assure que  $P_{n+1}$  est vraie.

D'après le principe de récurrence, on peut conclure que, **pour tout entier naturel  $n$** , on a :

$$A^n = PT^nP^{-1}$$

4.a. On a :

$$N = T - D = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Puis, en notant  $0$  la matrice nulle d'ordre 3 :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Il vient donc, **pour tout entier naturel  $k$  supérieur ou égal à 2** :

$$N^k = N^{k-2}N^2 = N^{k-2}0 = 0$$

b. On a :

$$DN = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Et :

$$ND = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc on a bien vérifié que :

$$\mathbf{DN = ND}$$

Puisque D et N commutent pour la multiplication des matrices, la formule du binôme de Newton permet d'écrire, pour tout entier naturel n :

$$T^n = (D + N)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D^{n-k} N^k$$

D'après la question 4.a, il vient, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 :

$$T^n = \sum_{k=0}^1 \binom{n}{k} D^{n-k} N^k = \binom{n}{0} D^n N^0 + \binom{n}{1} D^{n-1} N = D^n + nD^{n-1}N$$

Puisque D est une matrice diagonale, on a :

$$D^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 1^n \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et donc } D^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il vient donc, pour tout entier naturel n :

$$D^{n-1}N = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Puis, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 :

$$T^n = D^n + nD^{n-1}N = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2n \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La formule ci-dessus reste vraie pour n = 0 puisque T<sup>0</sup> = I.

Ainsi a-t-on, **pour tout entier naturel n** :

$$T^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c. On a, pour tout entier naturel n :

$$PT^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 1 & 2n+4 \\ 2^n & 2 & 4n+4 \\ 2^n & 4 & 8n \end{pmatrix}$$

Puis, d'après les questions 3.b et 3.a, pour tout entier naturel n :

$$A^n = PT^nP^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 1 & 2n+4 \\ 2^n & 2 & 4n+4 \\ 2^n & 4 & 8n \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 16 & -16 & 4 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Soit encore, pour tout entier naturel  $n$  :

$$A^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 4 \cdot 2^n - n - 3 & -4 \cdot 2^n + \frac{3}{2}n + 4 & 2^n - \frac{1}{2}n - 1 \\ 4 \cdot 2^n - 2n - 4 & -4 \cdot 2^n + 3n + 5 & 2^n - n - 1 \\ 4 \cdot 2^n - 4n - 4 & -4 \cdot 2^n + 6n + 4 & 2^n - 2n \end{pmatrix}$$

5.a. Par définition de la matrice  $X_n$ , et d'après les questions 2.b, 4.c et 1, il vient, pour tout entier naturel  $n$  :

$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = X_n = A^n X_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 4 \cdot 2^n - n - 3 & -4 \cdot 2^n + \frac{3}{2}n + 4 & 2^n - \frac{1}{2}n - 1 \\ 4 \cdot 2^n - 2n - 4 & -4 \cdot 2^n + 3n + 5 & 2^n - n - 1 \\ 4 \cdot 2^n - 4n - 4 & -4 \cdot 2^n + 6n + 4 & 2^n - 2n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En calculant la dernière ligne de cette matrice colonne, on a donc, pour tout entier naturel  $n$  :

$$u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (4 \cdot 2^n - 4n - 4)$$

b. Il résulte de la question 5.a que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n (4 \cdot 2^n - 4n - 4) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(4 - 4n \left(\frac{1}{2}\right)^n - 4 \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

Puisque  $-1 < \frac{1}{2} < 1$ , on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

On a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{\ln n}}{e^{n \ln 2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\ln n - n \ln 2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n \left(\frac{\ln n}{n} - \ln 2\right)} = 0$$

Car :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln n}{n} - \ln 2\right) = -\ln 2 < 0 \text{ car } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n} = 0 \text{ par croissance comparée}$$

Donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\frac{\ln n}{n} - \ln 2\right) = -\infty$$

Et :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

On en déduit donc que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$$

## MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 HEURES.

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

*Il n'est fait usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée. Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.*

## S U J E T

## Exercice 1

On considère les matrices :  $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  ;  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$  et  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ .

1. a) Montrer que  $P$  est inversible et calculer  $P^{-1}$ .
- b) Vérifier que  $P^{-1}AP = D$ .
2. a) Exprimer  $A$  en fonction de  $D$ ,  $P$  et  $P^{-1}$ .
- b) Montrer que pour tout entier naturel  $n$  on a :  $A^n = PD^nP^{-1}$ .
- c) Calculer  $D^n$  pour tout entier naturel  $n$ .

d) En déduire que pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , on a :  $A^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 + (-\frac{1}{2})^n & 1 - (-\frac{1}{2})^n \\ 2 + (-\frac{1}{2})^{n-1} & 1 - (-\frac{1}{2})^{n-1} \end{pmatrix}$ .

Une mouche se déplace aléatoirement dans un appartement constitué de 3 pièces contiguës  $A$ ,  $B$  et  $C$ . A l'instant initial 0, la mouche se trouve dans la pièce  $B$ . On suppose que les déplacements qui suivent se font selon le protocole suivant :

- si à un instant  $n$  donné la mouche est dans la pièce  $A$  ou dans la pièce  $C$  alors elle revient dans la pièce  $B$  à l'instant  $n + 1$  ;
- si à un instant  $n$  donné la mouche est dans la pièce  $B$  alors elle y reste à l'instant  $n + 1$  avec la probabilité  $\frac{1}{2}$ , sinon elle va de façon équiprobable dans  $A$  ou dans  $C$ .

Pour tout entier naturel  $n$ , on définit l'événement  $A_n$  : « la mouche est dans la pièce  $A$  à l'instant  $n$  ». On définit de même les événements  $B_n$  et  $C_n$ . Enfin, on note  $a_n$ ,  $b_n$  et  $c_n$  les probabilités respectives de ces événements.

3. Montrer en utilisant la formule des probabilités totales que pour tout entier naturel  $n$  :

$$a_{n+1} = \frac{1}{4}b_n ; b_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}b_n + c_n \text{ et } c_{n+1} = \frac{1}{4}b_n$$

4. Montrer que pour tout entier naturel  $n$  on a :  $b_{n+2} = \frac{1}{2}b_{n+1} + \frac{1}{2}b_n$ .

On considère, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la matrice colonne  $U_n = \begin{pmatrix} b_{n+1} \\ b_n \end{pmatrix}$ .

5. a) Justifier que  $U_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ . Montrer que  $U_{n+1} = AU_n$  pour tout entier naturel  $n$ .  
 b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$  on a :  $U_n = A^n U_0$ .  
 c) Dédire de la question 2.d) que pour tout entier naturel  $n$  on a :  $b_n = \frac{1}{3} \left( 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right)$ .  
 d) En déduire, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , des expressions de  $a_n$  et  $c_n$  en fonction de  $n$ .

## Exercice 2

On considère les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $]0, +\infty[$  par :

$$f(x) = x + 1 + \frac{\ln(x)}{x} \text{ et } g(x) = x^2 + 1 - \ln(x)$$

On note  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé.

- Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .
  - Montrer que la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $y = x + 1$  est asymptote à la courbe de  $f$ .
  - Montrer que  $\mathcal{C}$  est au-dessus de  $\mathcal{D}$  sur  $[1, +\infty[$  et en dessous de  $\mathcal{D}$  sur  $]0, 1]$ .
- Calculer la dérivée de  $g$ . En déduire le sens de variation de  $g$  sur  $]0, +\infty[$ .
  - Montrer que  $g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\ln(2)$ . En déduire que  $g(x)$  est positif strictement sur  $]0, +\infty[$ .
  - Montrer que la dérivée de  $f$  vérifie pour tout réel  $x$  strictement positif :  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$
  - Dédire des questions précédentes le tableau des variations de  $f$  en y faisant figurer les limites trouvées en 1.a)
- Tracer l'allure de  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  dans un repère orthonormé d'unité 2cm.

On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$  pour tout entier naturel  $n$ .

- Montrer que pour tout entier naturel  $n$  on a :  $u_n \geq n + 1$ .
  - Déterminer le sens de variation et la limite de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

## Exercice 3

Coralie est étudiante en classe préparatoire. Chaque matin, elle se lève en retard avec la probabilité  $\frac{1}{3}$ . Lorsqu'elle se lève en retard elle est obligée de prendre le bus pour se rendre au lycée. Par contre, lorsque elle est à l'heure, elle choisit avec deux chances sur cinq d'aller à pied et avec trois chances sur cinq de prendre le bus.

## Partie I

On considère un matin donné et on définit les événements  $R$  : « Coralie se lève en retard » et  $B$  : « Coralie prend le bus ».

1. Montrer en utilisant la formule des probabilités totales que  $P(B) = \frac{11}{15}$ .
2. On remarque qu'un matin donné Coralie prend le bus. Quelle est la probabilité qu'elle se soit levée à l'heure ?
3. On étudie maintenant les trajets pendant les 180 jours de cours d'une année scolaire. On suppose que chaque jour les choix de Coralie sont indépendants des choix des jours précédents. On nomme  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de fois où Coralie prend le bus.
  - a) Reconnaître la loi de  $X$ . Donner l'ensemble  $X(\Omega)$  des valeurs prises par  $X$  et pour chaque entier  $k$ , une expression de  $P(X = k)$  en fonction de  $k$ .
  - b) Donner  $E(X)$  et  $V(X)$ .
  - c) En moyenne combien de matins dans l'année Coralie peut-elle espérer aller au lycée à pied ?

## Partie II

La société de bus annonce pour la semaine prochaine un préavis de grève reconductible. On suppose que durant la grève aucun bus ne circule.

Cette fois-ci, bien entendu, Coralie est obligée de se rendre au lycée à pied. Mais si elle se lève en retard, elle arrivera en retard au lycée. Chaque jour de grève, elle arrive donc en retard au lycée avec la probabilité  $\frac{1}{3}$ .

On admet que la durée de la grève en nombre de jours suit une variable aléatoire  $N$  dont la loi est donnée dans le tableau suivant :

$k$	1	2	3
$P(N = k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$

Soit  $Y$  la variable aléatoire égale au nombre de jours où Coralie est en retard au lycée pendant la période de grève.

1. Calculer  $E(N)$ .
2. Décrire  $Y(\Omega)$ , ensemble des valeurs prises par  $Y$ .
3.
  - a) Calculer les probabilités conditionnelles  $P_{(N=1)}(Y = 0)$  et  $P_{(N=1)}(Y = 1)$ .
  - b) En déduire que  $P((N = 1) \cap (Y = 0)) = \frac{1}{3}$  et que  $P((N = 1) \cap (Y = 1)) = \frac{1}{6}$ .  
Que valent  $P((N = 1) \cap (Y = 2))$  et  $P((N = 1) \cap (Y = 3))$  ?

4. On admet que la loi conjointe du couple  $(N, Y)$  est donnée dans le tableau suivant :

N \ Y	0	1	2	3
	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	0
2	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{72}$	0
3	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{72}$

- Déterminer la loi de  $Y$ . Justifier que  $E(Y) = \frac{5}{8}$ .
- Quelle est la probabilité que Coralie ne soit pas en retard au lycée une seule fois pendant la durée de la grève ?
- Les variables aléatoires  $Y$  et  $N$  sont-elles indépendantes ?
- Calculer  $E(YN)$ . En déduire  $\text{cov}(Y, N)$ .

### Exercice 4

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(t) = \frac{1}{\ln(2)(t+1)} \text{ si } t \in [0, 1] \text{ et } f(t) = 0 \text{ sinon}$$

- Calculer  $\int_0^1 \frac{1}{t+1} dt$ .
  - Montrer que  $f$  est une densité de probabilité.

Soit  $X$  une variable aléatoire ayant pour densité  $f$ . On nomme  $F$  la fonction de répartition de  $X$ .

- Calculer  $F(x)$  pour tout réel  $x < 0$  et pour tout réel  $x > 1$ .
  - Montrer que si  $x \in [0, 1]$  alors  $F(x) = \frac{\ln(x+1)}{\ln(2)}$ .
  - On donne  $\ln(3) \simeq 1,1$  et  $\ln(2) \simeq 0,7$ . Montrer que  $P(X \leq \frac{1}{2}) \simeq \frac{4}{7}$ .
- Justifier que pour tout réel  $t$  de  $[0, 1]$  on a :  $\frac{t}{t+1} = 1 - \frac{1}{t+1}$ .
  - Calculer  $\int_0^1 \frac{t}{t+1} dt$ .
  - Justifier que  $X$  admet une espérance et que  $E(X) = \frac{1 - \ln(2)}{\ln(2)}$ .

# CORRIGÉ

Par Bernard Delacampagne, professeur de mathématiques au lycée Madeleine-Michelis à Amiens.

## Exercice 1

1.a. Montrons que P est inversible et déterminons  $P^{-1}$ , en utilisant la méthode de Gauss :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Les deux termes diagonaux 1 et -3 de la matrice triangulaire ci-dessus étant non nuls, **P est une matrice inversible** ; la fin de la méthode de Gauss donne :

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow 3L_1 + L_2 \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} L_1 \leftarrow \frac{1}{3}L_1 \\ L_2 \leftarrow -\frac{1}{3}L_2 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

L'inverse de la matrice P est donc la matrice :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

b. Les calculs donnent :

$$AP = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Puis :

$$P^{-1}AP = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = D$$

2.a. Par multiplication de l'égalité  $P^{-1}AP = D$  à gauche par P et à droite par  $P^{-1}$ , on obtient, puisque  $PP^{-1} = P^{-1}P = I$  :

$$A = PDP^{-1}$$

b. Montrons alors par récurrence la propriété  $P_n$ , définie pour tout entier naturel n, par :

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

Initialisation :

$P_0$  est vraie car on a :

$$PD^0P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I = A^0$$

Hérédité :

On suppose  $P_n$  vraie, pour une valeur de l'entier naturel n, c'est-à-dire :

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

On montre que  $P_{n+1}$  est vraie, c'est-à-dire :

$$A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$$

On a, d'après l'hypothèse de récurrence et la question 2.a :

$$A^{n+1} = A^n A = PD^n P^{-1} P D P^{-1} = PD^n ID P^{-1} = PD^n D P^{-1} = PD^{n+1} P^{-1}$$

Ceci assure que  $P_{n+1}$  est vraie.

D'après le principe de récurrence, on peut conclure que, **pour tout entier naturel n**, on a :

$$A^n = PD^n P^{-1}$$

c. D étant une matrice diagonale, on a, pour tout entier naturel n :

$$D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}$$

d. Il résulte des questions 2.b et 2.c que, pour tout entier naturel n, on a :

$$PD^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 1 & -2\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 1 & \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{pmatrix}$$

Puis, **pour tout entier naturel n** :

$$A^n = PD^n P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 1 & \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} & 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{pmatrix}$$

3. D'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements  $\{A_n, B_n, C_n\}$ , il vient :

$$a_{n+1} = P(A_{n+1}) = P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(A_{n+1})$$

D'après le protocole de déplacement de la mouche, on a :

$$P_{A_n}(A_{n+1}) = P_{C_n}(A_{n+1}) = 0 \text{ et } P_{B_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{4}$$

On a donc, **pour tout entier naturel n** :

$$a_{n+1} = \frac{1}{4}b_n$$

On obtient de même, **pour tout entier naturel n** :

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= P(B_{n+1}) = P(A_n)P_{A_n}(B_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(B_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(B_{n+1}) \\ &= a_n \cdot 1 + b_n \cdot \frac{1}{2} + c_n \cdot 1 = a_n + \frac{1}{2}b_n + c_n \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= P(C_{n+1}) = P(A_n)P_{A_n}(C_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(C_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(C_{n+1}) \\ &= a_n \cdot 0 + b_n \cdot \frac{1}{4} + c_n \cdot 0 = \frac{1}{4}b_n \end{aligned}$$

4. D'après la question 3, on a, **pour tout entier naturel n** :

$$b_{n+2} = a_{n+1} + \frac{1}{2}b_{n+1} + c_{n+1} = \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}b_{n+1} + \frac{1}{4}b_n = \frac{1}{2}b_{n+1} + \frac{1}{2}b_n$$

5.a. A l'instant initial 0, la mouche se trouve dans la pièce B, donc :

$$a_0 = c_0 = 0 \text{ et } b_0 = 1$$

Il en résulte que :

$$U_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 + \frac{1}{2}b_0 + c_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Par définition de  $U_n$ , et vu le résultat de la question 4, on a, **pour tout entier naturel n** :

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} b_{n+2} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}b_{n+1} + \frac{1}{2}b_n \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{n+1} \\ b_n \end{pmatrix} = AU_n$$

**b.** Montrons par récurrence la propriété  $P_n$ , définie pour tout entier naturel n, par :

$$U_n = A^n U_0$$

Initialisation :

$P_0$  est vraie car on a :

$$A^0 U_0 = I U_0 = U_0$$

Hérédité :

On suppose  $P_n$  vraie, pour une valeur de l'entier naturel n, c'est-à-dire :

$$U_n = A^n U_0$$

On montre que  $P_{n+1}$  est vraie, c'est-à-dire :

$$U_{n+1} = A^{n+1} U_0$$

On a, d'après l'hypothèse de récurrence et la question 5.a :

$$U_{n+1} = AU_n = AA^n U_0 = A^{n+1} U_0$$

Ceci assure que  $P_{n+1}$  est vraie.

D'après le principe de récurrence, on peut conclure que, **pour tout entier naturel n**, on a :

$$U_n = A^n U_0$$

**c.** D'après les questions 5.b et 2.d, on a, pour tout entier naturel n :

$$\begin{pmatrix} b_{n+1} \\ b_n \end{pmatrix} = U_n = A^n U_0 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} & 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

En calculant la deuxième ligne de cette matrice, on a donc, **pour tout entier naturel n** :

$$b_n = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} \left( 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right) + 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right) = \frac{1}{3} \left( 2 - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right) = \frac{1}{3} \left( 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right)$$

**d.** On a, pour tout entier naturel n *non nul* :

$$a_n = c_n = \frac{1}{4} b_{n-1} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \left( 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right) = \frac{1}{12} \left( 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right)$$

Pour  $n = 0$ , la formule reste vraie, car on a :

$$\frac{1}{12} \left( 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{0-1} \right) = \frac{1}{12} (2 - 2) = 0 = a_0 = c_0$$

On a donc, **pour tout entier naturel n** :

$$a_n = c_n = \frac{1}{12} \left( 2 + \left( -\frac{1}{2} \right)^{n-1} \right)$$

### Exercice 2

1.a. On a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x + 1 + \frac{\ln(x)}{x} \right) = +\infty$$

Car :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) = +\infty \text{ et, par croissance comparée, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

On a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( x + 1 + \frac{\ln(x)}{x} \right) = -\infty$$

Car :

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x+1) = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0^+$$

b. On a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x+1)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x + 1 + \frac{\ln(x)}{x} - x - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

Donc la droite **D** d'équation  $y = x + 1$  est asymptote à la courbe de  $f$  au voisinage de  $+\infty$ .

c. On a vu à la question 1.b que pour tout réel strictement positif  $x$  :

$$f(x) - (x+1) = \frac{\ln(x)}{x}$$

Puisque  $x$  est strictement positif sur  $]0, +\infty[$ ,  $f(x) - (x+1)$  est du signe de  $\ln(x)$  ; on a :

$$\ln(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$$

Donc **C** est au-dessus de **D** sur  $[1, +\infty[$  et en dessous de **D** sur  $]0, 1[$ .

2.a. On a, pour tout réel strictement positif  $x$  :

$$g'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 1}{x} = \frac{(\sqrt{2}x - 1)(\sqrt{2}x + 1)}{x}$$

On en déduit, puisque  $\sqrt{2}x + 1$  et  $x$  sont strictement positifs sur  $]0, +\infty[$ , que  $g'(x)$  est du signe de  $\sqrt{2}x - 1$  sur  $]0, +\infty[$  ; on a :

$$\sqrt{2}x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Donc **g** est décroissante sur  $\left]0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right[$  et croissante sur  $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right[$ .

b. On a :

$$g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1 - \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} + 1 + \ln(\sqrt{2}) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\ln(2)$$

D'après les variations de  $g$  vues à la question 2.a,  $g$  admet un minimum en  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  de valeur  $g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  ; puisque  $g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  est strictement positif,  $g(x)$  est strictement positif sur  $]0, +\infty[$ .

c. On a, pour tout réel  $x$  strictement positif :

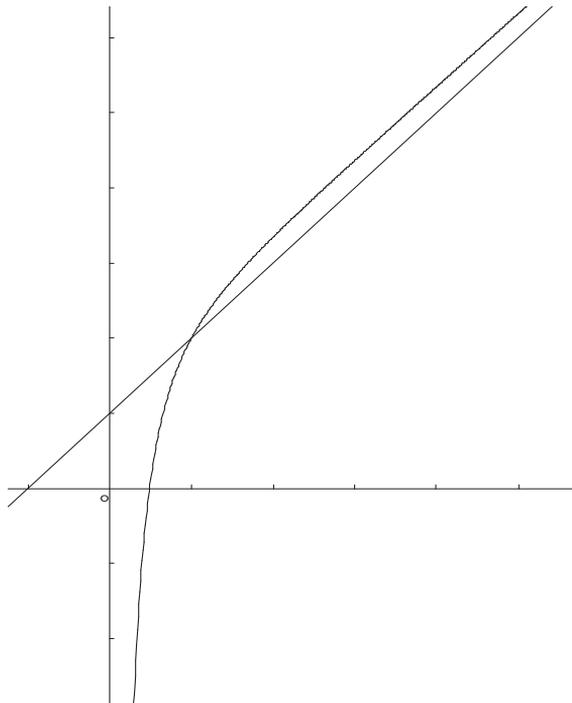
$$f'(x) = 1 + \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln(x)}{x^2} = 1 + \frac{1 - \ln(x)}{x^2} = \frac{x^2 + 1 - \ln(x)}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

d. On déduit de la question 2.c, puisque  $x^2$  est strictement positif sur  $]0, +\infty[$ , que  $f'(x)$  est du signe de  $g(x)$  sur  $]0, +\infty[$ , donc strictement positif d'après la question 2.b, donc  $f$  est strictement croissante sur  $]0, +\infty[$ .

Le tableau des variations de  $f$  est le suivant :

<b>x</b>	0	$+\infty$
<b>f'</b>		+
<b>f</b>	$-\infty$	$+\infty$

3. L'allure de C et D dans un repère orthonormé d'unité 2 cm est la suivante :



4.a. Montrons par récurrence la propriété  $P_n$ , définie pour tout entier naturel  $n$ , par :

$$u_n \geq n + 1$$

Initialisation :

$P_0$  est vraie car on a :

$$u_0 = 1 \geq 0 + 1$$

Hérédité :

On suppose  $P_n$  vraie, pour une valeur de l'entier naturel  $n$ , c'est-à-dire :

$$u_n \geq n + 1$$

On montre que  $P_{n+1}$  est vraie, c'est-à-dire :

$$u_{n+1} \geq n + 2$$

On a, d'après l'hypothèse de récurrence et puisque  $f$  est croissante sur  $]0, +\infty[$  :

$$f(u_n) \geq f(n + 1)$$

Or :

$$f(n + 1) = n + 2 + \frac{\ln(n + 1)}{n + 1} \geq n + 2 \quad \text{car} \quad \frac{\ln(n + 1)}{n + 1} \geq 0 \quad \text{puisque} \quad n + 1 \geq 1$$

Donc

$$u_{n+1} \geq n + 2$$

Ceci assure que  $P_{n+1}$  est vraie.

D'après le principe de récurrence, on peut conclure que, **pour tout entier naturel  $n$** , on a :

$$u_n \geq n + 1$$

b. On a, pour tout entier naturel  $n$  :

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = u_n + 1 + \frac{\ln(u_n)}{u_n} - u_n = 1 + \frac{\ln(u_n)}{u_n} \geq 0 \quad \text{car} \quad u_n \geq n + 1 \geq 1$$

Donc la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante.

On sait que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n + 1) = +\infty$$

L'inégalité de la question 4.a et un théorème de comparaison permettent de conclure que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

### Exercice 3

#### Partie I

1. D'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements  $\{R, \overline{R}\}$ , il vient :

$$P(B) = P(R)P_R(B) + P(\overline{R})P_{\overline{R}}(B) = P(R)P_R(B) + (1 - P(R))P_{\overline{R}}(B)$$

Chaque matin, Coralie se lève en retard avec la probabilité  $\frac{1}{3}$ , donc :

$$P(R) = \frac{1}{3}$$

Lorsqu'elle se lève en retard elle est obligée de prendre le bus pour se rendre au lycée, donc :

$$P_R(B) = 1$$

Lorsqu'elle est à l'heure, elle choisit avec trois chances sur cinq de prendre le bus, donc :

$$P_{\bar{R}}(B) = \frac{3}{5}$$

Il vient donc :

$$P(B) = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{5+6}{15} = \frac{11}{15}$$

2. On remarque qu'un matin donné Coralie prend le bus. La probabilité qu'elle se soit levée à l'heure est, d'après la formule de Bayes :

$$P_B(\bar{R}) = \frac{P(\bar{R})P_{\bar{R}}(B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5}}{\frac{11}{15}} = \frac{2}{5} \cdot \frac{15}{11} = \frac{6}{11}$$

3.a. X est le nombre de succès de l'événement « Coralie prend le bus », de probabilité  $p = \frac{11}{15}$ , au cours de  $n = 180$  tentatives identiques et indépendantes, donc X suit la loi binomiale

$$\mathcal{B}\left(n = 180, p = \frac{11}{15}\right).$$

On a :

$$X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket = \llbracket 0, 180 \rrbracket$$

Et, pour tout entier naturel k de  $\llbracket 0, 180 \rrbracket$  :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{180}{k} \left(\frac{11}{15}\right)^k \left(\frac{4}{15}\right)^{180-k}$$

b. L'espérance et la variance de X sont :

$$E(X) = np = 180 \cdot \frac{11}{15} = 12 \cdot 11 = 132 \text{ et } V(X) = np(1-p) = 132 \cdot \frac{4}{15} = 44 \cdot \frac{4}{5} = \frac{176}{5}$$

c. Coralie peut espérer aller au lycée à pied en moyenne  $180 - E(X) = 48$  matins dans l'année.

### Partie II

1. Par définition de l'espérance, on a :

$$E(N) = \sum_{k=1}^3 kP(N = k) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{3}{8} = \frac{4+2+9}{8} = \frac{15}{8}$$

2. Puisqu'il y a au plus trois jours de grève, on a :

$$Y(\Omega) = \llbracket 0, 3 \rrbracket$$

3.a. Puisque  $P_{(N-1)}(Y = 0) = P(\bar{R}) = 1 - P(R)$ , on a :

$$P_{(N-1)}(Y = 0) = \frac{2}{3}$$

Puisque  $P_{(N=1)}(Y=1) = P(R)$ , on a :

$$P_{(N=1)}(Y=1) = \frac{1}{3}$$

b. On déduit de la loi de N et de la question II.3.a que :

$$P((N=1) \cap (Y=0)) = P(N=1)P_{(N=1)}(Y=0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Et que :

$$P((N=1) \cap (Y=1)) = P(N=1)P_{(N=1)}(Y=1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Puisque  $Y \leq N$ , on a :

$$P((N=1) \cap (Y=2)) = P((N=1) \cap (Y=3)) = 0$$

4.a. La loi de Y est une des lois marginales du tableau de la loi conjointe du couple (N, Y), obtenue en additionnant les probabilités colonne par colonne ; elle est donnée par les quatre probabilités suivantes :

$$P(Y=0) = \frac{1}{3} + \frac{1}{18} + \frac{1}{9} = \frac{6+1+2}{18} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$$

$$P(Y=1) = \frac{1}{6} + \frac{1}{18} + \frac{1}{6} = \frac{3+1+3}{18} = \frac{7}{18}$$

$$P(Y=2) = \frac{1}{72} + \frac{1}{12} = \frac{1+6}{72} = \frac{7}{72}$$

$$P(Y=3) = \frac{1}{72}$$

Par définition de l'espérance, on a :

$$E(Y) = \sum_{k=0}^3 kP(Y=k) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{7}{18} + 2 \cdot \frac{7}{72} + 3 \cdot \frac{1}{72} = \frac{28+14+3}{72} = \frac{45}{72} = \frac{5}{8}$$

b. La probabilité que Coralie ne soit pas en retard au lycée une seule fois pendant la durée de la grève est :

$$P(Y=0) = \frac{1}{2}$$

c. D'après la loi conjointe du couple (N, Y), on a :

$$P((N=1) \cap (Y=2)) = 0$$

D'après la loi de N et la question II.4.a, on a :

$$P(N=1) = \frac{1}{2} \text{ et } P(Y=2) = \frac{7}{72}$$

Il en résulte que :

$$P((N=1) \cap (Y=2)) \neq P(N=1)P(Y=2)$$

Donc les variables aléatoires Y et N ne sont pas indépendantes.

d. On a :

$$E(YN) = \sum_{i=1}^3 \left( \sum_{j=0}^3 ijP((N=i) \cap (Y=j)) \right)$$

Soit, en ne tenant compte que des termes non nuls de cette somme :

$$E(YN) = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{18} + 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{72} + 3 \cdot 1 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{12} + 3 \cdot 3 \cdot \frac{1}{72}$$

Soit encore :

$$E(\mathbf{Y}\mathbf{N}) = \frac{12 + 8 + 4 + 36 + 36 + 9}{72} = \frac{105}{72} = \frac{35}{24}$$

Il vient donc :

$$\text{cov}(\mathbf{Y}, \mathbf{N}) = E(\mathbf{Y}\mathbf{N}) - E(\mathbf{Y})E(\mathbf{N}) = \frac{35}{24} - \frac{5}{8} \cdot \frac{15}{8} = \frac{280 - 225}{192} = \frac{55}{192}$$

#### Exercice 4

1.a. La fonction  $t \mapsto \frac{1}{t+1}$  étant de la forme  $\frac{u'}{u}$ , on a :

$$\int_0^1 \frac{1}{t+1} dt = [\ln(t+1)]_0^1 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2)$$

b.  $f$  est continue sur  $]-\infty, 0[$  et  $]1, +\infty[$  comme fonction nulle, et continue sur  $[0, 1]$  comme inverse d'une fonction continue qui ne s'annule pas ; de plus,  $f$  admet des limites finies à gauche et à droite en 0 et en 1, puisque :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 0 = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln(2)(x+1)} = \frac{1}{\ln(2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\ln(2)(x+1)} = \frac{1}{2\ln(2)} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 0 = 0$$

Donc  $f$  est continue par morceaux sur  $\mathbb{R}$ .

Pour tout réel  $t$  appartenant à  $[0, 1]$ , on a :

$$f(t) = \frac{1}{\ln(2)(t+1)} > 0$$

Pour tout réel  $t$  n'appartenant pas à  $[0, 1]$ , on a :

$$f(t) = 0 \geq 0$$

Donc  $f$  est positive ou nulle sur  $\mathbb{R}$ .

On a enfin, d'après la question 1.a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 dt + \frac{1}{\ln(2)} \int_0^1 \frac{1}{t+1} dt + \int_1^{+\infty} 0 dt = 0 + \frac{1}{\ln(2)} \cdot \ln(2) + 0 = 1$$

Donc  $f$  est bien une densité de probabilité.

2.a. Par définition de la fonction de répartition  $F$  de  $X$ , on a, pour tout réel  $x$  :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

On a donc, pour tout réel  $x$  de  $]-\infty, 0[$  :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$$

Et, d'après les calculs des questions 1.a et 1.b, pour tout réel  $x$  de  $]1, +\infty[$  :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 dt + \frac{1}{\ln(2)} \int_0^1 \frac{1}{t+1} dt + \int_1^x 0 dt = 0 + 1 + 0 = 1$$

b. Si  $x$  appartient à  $[0, 1]$ , on a :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x \frac{1}{\ln(2)(t+1)} dt = 0 + \left[ \frac{\ln(t+1)}{\ln(2)} \right]_0^x = \frac{\ln(x+1)}{\ln(2)}$$

c. On a :

$$P\left(X \leq \frac{1}{2}\right) = F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}+1\right)}{\ln(2)} = \frac{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}{\ln(2)} = \frac{\ln(3) - \ln(2)}{\ln(2)}$$

Puisque  $\ln(3) \approx 1,1$  et  $\ln(2) \approx 0,7$

$$P\left(X \leq \frac{1}{2}\right) \approx \frac{0,4}{0,7} = \frac{4}{7}$$

3.a. On a, pour tout réel  $t$  de  $[0,1]$  :

$$1 - \frac{1}{t+1} = \frac{t+1-1}{t+1} = \frac{t}{t+1}.$$

Ainsi a-t-on, pour tout réel  $t$  de  $[0,1]$  :

$$\frac{t}{t+1} = 1 - \frac{1}{t+1}$$

b. D'après les questions 3.a et 1.a, il vient :

$$\int_0^1 \frac{t}{t+1} dt = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{t+1}\right) dt = \int_0^1 1 dt - \int_0^1 \frac{1}{t+1} dt = [t]_0^1 - \ln(2) = 1 - \ln(2)$$

c. Par définition de l'espérance d'une variable à densité, et sous réserve de convergence de l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) dt$ , on a :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) dt$$

$\int_{-\infty}^0 tf(t) dt$  et  $\int_1^{+\infty} tf(t) dt$  convergent car on a :

$$\int_{-\infty}^0 tf(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 dt = 0 \text{ et } \int_1^{+\infty} tf(t) dt = \int_1^{+\infty} 0 dt = 0$$

Donc  $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) dt$  converge, ce qui assure que **X admet une espérance** et que, d'après la question 3.b :

$$E(X) = \int_{-\infty}^0 tf(t) dt + \int_0^1 tf(t) dt + \int_1^{+\infty} tf(t) dt = \int_0^1 tf(t) dt = \frac{1}{\ln(2)} \int_0^1 \frac{t}{t+1} dt = \frac{1 - \ln(2)}{\ln(2)}$$

# RÉSUMÉ DE TEXTE

**DURÉE : 3 HEURES.**

*Résumez en 400 mots le texte suivant.*

*Une tolérance de 40 mots est admise : le résumé devra être strictement compris entre 380 et 420 mots.*

*Les candidats doivent indiquer sur leur copie le nombre employés de 50 en 50 (marque dans le texte et en regard dans la marge), ainsi que le total exact à la fin.*

*Les correcteurs tiendront compte de la présentation de la copie et de la correction de la langue.*

*L'usage de documents et de tout matériel électronique est interdit.*

## SUJET

L'obsession du temps, son accélération, semblent être aujourd'hui une évidence. Comment en sommes-nous arrivés là ? Le rôle de l'historien est de s'interroger sur les racines de cette perception du temps. Quand s'est-elle installée et pourquoi ?

Remontons au début du <sup>xix</sup><sup>e</sup> siècle. La plupart des gens vivent alors selon un rythme lent, un temps long dicté par la nature et par Dieu. Ils se lèvent avec le soleil, se couchent peu après lui s'ils ne prolongent pas la veillée au coin du feu. Les signaux auditifs sont donnés par la cloche de l'église, l'angélus du matin qui appelle à la consécration du temps nouveau qu'il annonce, et l'angélus du soir qui se veut temps de recueillement. Une plongée dans l'univers de Balzac fait sentir toute la lenteur de l'écoulement temporel, au fil des saisons. A Saumur, dans la maison d'Eugénie Grandet, la vie provinciale garde un rythme identique à celui des siècles passés, une sorte d'engourdissement, loin de l'agitation de la vie urbaine de son cousin. Dans *Le Député d'Arcis*, la petite ville d'Arcis-sur-Aube, malgré l'agitation liée à l'enfantement de son nouveau député, prouve la même lenteur.

Ce temps, solitaire incontestablement, est-il encore celui de l'Église ? L'historien Jacques Le Goff a daté du <sup>xv</sup><sup>e</sup> siècle la transition entre le temps de l'Église et celui du marchand. L'horloge municipale érigée à cette époque est un symbole et un instrument de pouvoir pour les négociants. Quatre siècles plus tard, les horloges municipales dans les villes grandes et moyennes se superposent toujours aux multiples cloches des églises et couvents. Mais seules les cloches de Dieu marquent le temps dans les villages qui rassemblent encore les trois quarts de la population ; là on ignore l'heure et on se contente des coutumes horaires qui rythment la vie quotidienne.

C'est entre les années 1820 et 1850 que le temps s'accélère vraiment sous les effets conjugués des transformations économiques et des nouvelles idées. C'est sans doute pour cela que les poètes se montrent alors particulièrement attirés par ce thème du temps qui passe, qui efface trop vite les souvenirs, du célèbre « Ô temps ! suspends ton vol ; et vous, heures propices ! / Suspendez votre cours » de Lamartine (*Le Lac*) jusqu'à la *Recherche du temps perdu* de Proust. « Jamais autant qu'au <sup>xix</sup><sup>e</sup> siècle, le temps n'était apparu comme aussi perceptible aux yeux de l'esprit, comme aussi assimilable par la pensée » (Georges Poulet). Quels sont les événements qui ont fait prendre conscience d'une accélération du temps ?

Parmi ceux-ci arrêtons-nous sur trois d'entre eux. C'est d'abord le progrès des techniques qui rend omniprésent l'affichage de l'heure et l'élaboration d'un temps réglé, universel, rendu nécessaire par la vitesse des communications ferroviaires ou télégraphiques. Puis la volonté d'économiser le temps se répand dans le monde du travail, elle conduit à sa réglementation pour une meilleure productivité. Enfin, ce souci d'utiliser au mieux le temps gagne aussi les loisirs.

L'élaboration d'un temps réglé et universel est un processus lent qui s'étale sur l'ensemble du XIX<sup>e</sup> siècle. L'heure traditionnellement donnée par la nature et par l'Église devient une heure abstraite donnée par des machines que chacun peut posséder. Elle se révèle être un important enjeu de pouvoir.

Dès le XVIII<sup>e</sup> siècle, les progrès techniques rendent les mécanismes plus fiables, la première manufacture de montres est lancée par Frédéric Japy à Beaucourt près de Montbéliard en 1772 et un pôle horloger naît à Besançon avec la création de la Fabrique nationale créée par Laurent Mégevand avec le soutien du gouvernement révolutionnaire. La montre descend dans la rue et les premiers agendas sont publiés. Il n'empêche que ce ne sont que les débuts. La diffusion de ces moyens de mesurer le temps s'élargit considérablement au XIX<sup>e</sup> siècle.

Les horloges publiques sont plus nombreuses dès le Consulat et la reconstruction postrévolutionnaire. Elles se multiplient ensuite au gré des mairies et gares qui fleurissent sous le Second Empire puis au début de la Troisième République. Dans la sphère domestique, les horloges à balancier deviennent courantes. Les témoignages enregistrés lors des procès impliquant de petites gens des campagnes révèlent qu'ils se rappellent un événement au quart d'heure près. Les prix des montres sorties des fabriques de Besançon ou de Genève baissent à partir de 1860. On peut alors acquérir une montre en argent pour 40 francs. Les soldeurs en proposent même à crédit. Malgré tout, 40 francs équivalent à vingt à trente journées de salaire d'un ouvrier. Aussi la montre reste-t-elle jusqu'en fin de siècle le cadeau d'élection pour la première communion ou la réussite au certificat d'études primaires. Objet de convoitise, la montre tente aussi les voleurs ; c'est pourquoi est gravé à l'intérieur un numéro de fabrication que l'horloger consigne dans un registre, surveillé par la police. Emblématique de l'importance accordée aux instruments de mesure du temps, horloger est une profession respectée et chaque bourg rêve d'en posséder un. Hommes aux montres à gousset, femmes avec montre bijou en sautoir, chacun peut avoir la maîtrise individuelle du temps, d'autant que d'autres instruments se répandent pour gérer son temps grâce à la diffusion du réveil après 1860, la banalisation de l'agenda et la vogue des almanachs.

Un nombre croissant de gens ont donc accès à l'heure précise. Précise ? Comment est-elle réglée ? Sur le cadran solaire, ce qui signifie que chaque lieu a son heure. Pour pallier cet inconvénient, un règlement de Paris demande dès 1816 que soit adopté le « temps solaire moyen ». Les annuaires départementaux donnent les tables du temps moyen, indiquant l'heure que doit afficher une pendule ou une montre bien réglée les 5, 15 et 25 de chaque mois à midi vrai. Peu à peu s'impose la transmission de la bonne heure par les postiers car la poste aux lettres a sa propre horloge à partir de 1844, qu'elle règle bientôt sur celle de la gare. Car c'est bien le développement des chemins de fer qui fait éprouver la nécessité d'une heure précise et uniformisée sur le parcours du train. Les diligences se contentaient de l'approximation d'une demi-heure. Ce n'est plus le cas, car dès 1850 la vitesse moyenne des trains est de 60 km/h et les locomotives peuvent atteindre 100 km/h dès 1860. La coordination des correspondances pour les voyageurs et surtout celle des manœuvres de croisement impliquent la précision. Sur une ligne,

la compagnie ferroviaire adopte le temps local moyen de son siège administratif. Solution encore imparfaite puisque chaque compagnie a son heure. La Grande-Bretagne est la première à adopter une heure nationale. En 1847, la British Railway Charing House recommande à toutes les compagnies d'adopter l'heure de l'observatoire de Greenwich, déjà utilisé par le Post Office. L'Etat n'en a pas pris l'initiative, le Parlement s'est contenté d'entériner en 1852. L'heure nationale ne s'impose que plus tard en Allemagne (1893) et en France (1891).

Le processus est lent et l'historien dispose de peu d'archives sur ce thème. A Bonnétable, en Sarthe, le maire prend un arrêté en septembre 1884 afin que les horloges de la ville soient réglées sur celles de l'intérieur de la gare, donc à l'heure de la compagnie ferroviaire. Ce n'est que le 5 novembre 1891 qu'elles sont réglées sur le temps de Paris. Un autre exemple montre la difficulté du processus. Les villes américaines de Boston et de New York ont chacune leur heure, avec douze minutes de différence, ce qui pose problème là où les transports les desservant se croisent. En 1881, la ville de Boston se rend à l'évidence : sa puissance est inférieure à celle de New York, elle s'aligne à regret. C'est ainsi que le nombre d'heures locales diminue progressivement en fin de siècle, par regroupements.

Il reste à résoudre la coordination internationale. Un guide touristique de 1864, *Les Bords du Rhin en poche*, donne un aperçu de ce qui attend les voyageurs en gare de Strasbourg : « On part à l'heure de Paris, et à cet égard, faire bien attention, car les horloges marquent sur leur cadran deux heures différentes, l'heure de Paris d'abord et ensuite l'heure de Strasbourg en avance de deux minutes. [...] A partir de Kehl, les horloges sont réglées sur l'heure allemande et avancent de trente-deux minutes sur l'heure de Paris. »

Il n'y a pas que les chemins de fer qui exigent une harmonisation des horaires. Le télégraphe dessert toutes les préfectures en France à partir de 1852, puis relie toutes les places européennes. Il est rapidement utilisé dans les relations d'affaires et les opérations financières. Le téléphone, inventé en 1876, exploité dès 1879, voit son réseau nationalisé en France dès 1889. Sandford Fleming, ingénieur en chef de la Canadian Pacific Railways Company, d'origine écossaise, propose de créer une heure universelle et pour cela d'établir des fuseaux horaires dessinés à partir d'un méridien d'origine, de préférence neutre, situé sur l'océan. Venu spécialement à Dublin en 1878 pour la réunion de la British Association for the Advancement of Science, il n'est pas autorisé à lire sa communication. Airy (né en 1800), qui a introduit l'heure standardisée en Angleterre, a réussi à écarter Fleming par jalousie et par crainte que l'observatoire de Greenwich puisse perdre son monopole lucratif de la vente des éphémérides et cartes nautiques (*the charts*) utilisés par 80 % des bateaux. En 1884, la conférence internationale du *Prime Meridian* adopte le système de l'heure universelle comptée à partir du méridien de Greenwich. Malgré tout, l'heure adoptée en France est celle de Paris en 1891, puis en mars 1919, « l'heure du méridien de Paris retardée de neuf minutes vingt et une secondes », autrement dit, l'heure de Greenwich. Cette formulation exprime tous les enjeux de pouvoir que représente la mesure du temps.

On peut apprécier diversement ces négociations pour un temps universel : s'étonner de la vigueur des susceptibilités et des enjeux de pouvoir ; s'étonner inversement qu'il ait fallu si peu de temps entre le moment où se fait sentir la nécessité et son aboutissement. Quoi qu'il en soit, cette diffusion d'un temps réglé, bien que très inégale selon les lieux, atteint tout le monde. Elle implique une vraie conscience du temps qui s'écoule, une accélération du temps par le fait de compter les minutes et les secondes. Elle ouvre aussi sur un élargissement du cadre spatio-temporel au monde entier.

Attardons-nous un instant sur l'enjeu du pouvoir. Dans les villes et villages de France, le maire et le curé se combattent afin que leur propre cloche impose son rythme. C'est la « lutte entre le curé qui réitère sa ferme volonté que la cloche de l'angélus vespéral soit la dernière de la journée » et le maire qui fait sonner plus tard la retraite ou couvre-feu afin de moraliser la nuit. « Au travers de ces conflits se joue la maîtrise des biorhythmes de la communauté, celle de la gestion des temps du travail et du repos » (Alain Corbin). L'enjeu n'est pas purement symbolique, il touche la vie économique.

Réglementer le temps de travail pour l'économiser : voici l'enjeu du XIX<sup>e</sup> siècle passé à l'ère industrielle. L'usine doit s'assurer une main d'œuvre stable alors que l'ouvrier fraîchement arrivé de sa campagne ou non, est volontiers absentéiste. Souvent, il ne revient que lorsque le besoin financier le taraude, après avoir fêté la Saint-Lundi.

Le problème ne naît pas avec l'usine. L'industrie qui se propage dans les campagnes du début du siècle, ou proto-industrie, associe à domicile l'agriculture avec le tissage ou la métallurgie en un travail sans répit, mais souple, agencé au gré des besoins de l'ouvrier. Bien souvent le fabricant qui ordonne et prend livraison de la commande n'obtient pas ce qu'il veut, ni en qualité ni en délai. Aussi les conflits sont-ils fréquents car s'opposent les plaintes des patrons sur la lenteur des rythmes et celles des ouvriers sur la faiblesse des salaires accordés.

Au-delà de ces raisons économiques évidentes, le besoin d'une réglementation est imposé par une nouvelle morale. Tous les théoriciens, en particulier les philanthropes, les économistes aussi bien que les premiers socialistes, s'accordent sur deux aspects. La richesse d'une nation provient de son travail agricole et industriel. La morale du bourgeois s'impose : tout son temps doit être consacré au travail, il y va de son prestige individuel. Il faut former dans cet esprit les jeunes des classes aisées. L'internat est le passage obligé, où la vie se déroule selon un temps militairement régulé. D'autre part, les théoriciens veulent aussi aider les pauvres à améliorer leur niveau de vie, non par l'assistance qui ne pourrait être qu'un remède temporaire, mais par la formation qui leur inculque des règles de vie, d'où l'attention primordiale portée à l'instruction primaire, de Guizot (1833) à Duruy (1867) jusqu'à Jules Ferry (1880). S'y ajoutent les conférences, les cours du soir, les manuels destinés à gouverner les esprits. Il existe de multiples collections destinées à la formation de la main d'œuvre : par exemple la « bibliothèque populaire ou l'instruction mise à la portée de toutes les classes et de toutes les intelligences », vaste encyclopédie à bon marché créée en 1827, comprenant au total 200 volumes in-12 mis en vente à 30 centimes ; puis, sous le Second Empire, les « Manuels de morale et d'économie politique à l'usage des classes ouvrières ». Outre l'apprentissage du travail productif, il y a celui de l'épargne, avec la création des caisses par Benjamin Delessert et le duc de la Rochefoucauld-Liancourt. L'épargne elle-même sensibilise au temps puisque les dépôts dans les caisses d'épargne rapportent au taux 4 % l'an.

C'est surtout le travail qui se soumet au rythme de la montre. Il faut abandonner le temps poreux d'autrefois, le labeur interrompu de multiples pauses. Dans l'usine, la mécanisation de la fabrique a pour conséquence l'invention de nouvelles normes de comportements. Il faut mettre les ouvriers au travail de façon continue : les obliger à respecter les horaires, à maintenir une assiduité soutenue, à rester à leur poste de travail en contrôlant leurs déplacements. Sous la surveillance de la hiérarchie, les infractions sont sanctionnées par les amendes.

Les horaires fixes de travail s'imposent. L'usine ouvre et ferme ses portes à une heure déterminée. En son sein, l'heure devient une unité de travail. Cette percep-

tion de la valeur du temps se traduit par le calcul du temps nécessaire aux opérations à effectuer. Bien avant que la taylorisation ne soit inventée et pénètre en France, on exige déjà du rendement assorti de présence. Ainsi les faïenciers du Nivernais, qui étaient pourtant déjà payés à la pièce et géraient leur travail comme ils l'entendaient, se voient contraints à partir de 1880 à des horaires de présence. « L'ouvrier doit être au travail à 6 heures du matin ; il peut prolonger son travail autant qu'il lui convient » (Guy Thuillier). Le processus est le même pour les mineurs de Carmaux. L'assiduité vise à une production plus régulière, quotidienne. De la même façon, tous les horaires des administrations, des Bourses, des marchés et foires sont officiellement réglementés.

Cette exigence de productivité va de pair avec la diminution des heures de travail que les ouvriers n'ont de cesse d'obtenir. La législation sur la durée du travail des enfants, mue par l'action des philanthropes, s'attache d'abord à protéger les enfants. La loi du 21 mars 1841 interdit tout travail aux enfants de moins de huit ans, et le travail de nuit à ceux de moins de treize ans, elle limite la journée de travail à huit heures pour les huit-douze ans et à douze heures pour les douze-seize ans. A partir de ce moment, la revendication ouvrière sera constante. Elle convainc le gouvernement provisoire qui, en mars 1848, accorde la limitation de la journée de travail à dix heures à Paris et onze heures en province. Révélatrice de la différence de perception du temps selon les lieux et les catégories d'ouvriers, la réaction du milieu rural est très négative face à cette mesure. Il ne comprend pas la nécessité d'un temps contraint avec son corollaire, l'obligation de rendement. Il en va de même lorsque le repos obligatoire du dimanche est décidé (lois de 1880 et 1906) : les résistances sont nombreuses. Pourtant, cette réduction du temps de travail et l'augmentation des rendements horaires ne cessent plus. Sois la Troisième République, on passe de soixante-six heures hebdomadaires à la journée de huit heures en 1919 et, ensuite à l'introduction du taylorisme, à la semaine de quarante heures en juin 1936 avec les congés payés.

Le monde ouvrier n'est pas le seul à entrer dans l'engrenage du temps contraint. Il en va de même des élèves dont l'emploi du temps est rempli de façon à ne laisser aucun temps libre aux rêveries malsaines. Malgré tout, ces enfants ont besoin d'une détente et de longues vacances estivales leur offrent l'occasion de se refaire une santé. Et c'est sans doute ce modèle qui incite les ouvriers à réclamer un rythme analogue.

Y a-t-il intériorisation progressive par les salariés de l'obsession utilitariste du temps ? Beaucoup le pensent, toutefois on note que les ouvriers renâclent à chaque étape de l'organisation du temps de travail. Les ouvriers s'opposent pendant tout le XIX<sup>e</sup> siècle à l'introduction de la mécanisation : soit par peur de perdre des emplois, soit par crainte de la déqualification, on oppose alors la machine au savoir-faire traditionnel.

La mesure du temps ne reste pas cantonnée à l'activité laborieuse, elle s'introduit dans le temps libre et acquiert même une présence insistante dans certains loisirs.

Le temps disponible s'accroît grâce à l'éclairage. Les bougies de cire étaient très onéreuses, les lampes à huile ne donnaient qu'une faible lumière. Aussi la plupart des gens restaient-ils au coin du feu, pour les veillées villageoises. Dès 1845 se répandent les lampes à pétrole à la lueur plus vive, puis c'est l'éclairage au gaz qui équipe les écoles, bureaux et usines. En extérieur, les becs de gaz rendent les rues nocturnes plus hospitalières.

A cette dilatation du temps quotidien s'ajoute maintenant un temps de non-travail, celui des congés payés. Ceux-ci apparaissent en 1853 pour les agents civils de l'Etat qui peuvent demander jusqu'à quinze jours sans diminution de leur

salaire ; et en 1862 pour les militaires. Certains ouvriers commencent à en bénéficier à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle avant que la loi de 1936 ne généralise les congés payés. Parallèlement, les vacances scolaires sont vues comme une nécessité médicale. La chaleur de l'été transforme la salle de classe en vivier de bactéries et l'Académie de médecine recommande l'envoi des enfants à l'air libre, ce qui aboutit à la fin du siècle à une extension des vacances d'été qui ne commençaient que le 15 août depuis le Second Empire.

Tout ce temps libre conquis peut être utilisé individuellement, à l'image des temps morts d'autrefois. Il fait partie des loisirs qu'Alain Corbin définit moins comme un temps spécifique que comme l'invention de l'usage de ce temps particulier libéré des obligations et autres contraintes. De multiples occasions de divertissement s'offrent : cafés et restaurants, cabarets, promenades nocturnes, lectures individuelles. Mais au XIX<sup>e</sup> siècle, ces loisirs inquiètent les penseurs sociaux : crainte montante de l'alcoolisme, méfaits de la lecture sur les jeunes filles (que l'on pense au procès fait à Flaubert pour *Madame Bovary*). Afin d'éviter les mauvaises distractions aussi bien que l'oisiveté, mère de tous les vices, des tentatives sont faites pour organiser les loisirs des enfants et des travailleurs, pour leur proposer des activités alliant détente et apprentissage de la discipline : sociétés de musique (chorale, orphéons...) du deuxième tiers du XIX<sup>e</sup>, sociétés de gymnastique en fin de siècle. Ces deux activités supposent l'apprentissage de la maîtrise du corps et de l'esprit, et celle du temps.

Dès le XIX<sup>e</sup> siècle les activités de loisirs sont gagnées par le souci du temps, elles dénotent une exigence d'exactitude, une omniprésence de la montre : on voit les horloges trôner dans les piscines ou les salles de gymnastique nouvellement construites. Prenons deux exemples, celui du sport et celui du tourisme.

Sous la monarchie de Juillet naissent les premières organisations de rameurs, citadins passionnés de construction nautique et de calcul. Ils se livrent à des courses chronométrées sur la Seine. Les commentaires publiés par la presse montrent que l'enjeu porte sur la technique et la qualité des bateaux qui doivent répondre au souci de vitesse. Souci d'autant mieux marqué qu'on ne parle pas de la distance parcourue ni de la vitesse mais seulement du temps mesuré en minutes et secondes. Ces compétitions conduisent à l'organisation d'un calendrier des rencontres, avec une progression de l'entraînement des sportifs afin d'améliorer les performances. Les courses de vélocipèdes organisées dès la fin des années 1860 sont structurées autour de clubs semblables. L'engouement pour le vélo s'inscrit dans une nouvelle logique, celle de la recherche de la performance humaine. « Griserie de l'impossible, porte ouverte au-delà des limites humaines, la vitesse formule magique et mystérieuse, que l'on tente de déchiffrer sur tous les continents à partir du moment où se répand l'usage du chronomètre vers 1945, envoûte le genre humain dès que la compétition est codifiée » (Parienté et Billouin). Cette recherche de la vitesse, de l'homme luttant contre le chronomètre dans les courses de vélocipèdes, on la retrouve dans la nouvelle épreuve de cent mètres masculin (l'Américain Thomas Potter en 1884 et le Français André Tournon en 1891 le couvrent en onze secondes), tout comme dans la création du record de l'heure à vélo par Henri Desgrange, fondateur du Tour de France (de 35,3 km en 1903).

Comparés aux Guides bleus Hachette, les Guides Michelin sont obsédés par la mesure du temps. Michelin aide le touriste à bien choisir ses sites sans perdre son temps à hésiter entre des sites hiérarchisés par leur intérêt ; il étudie les temps de déplacement en voiture, indique le lieu de stationnement le mieux adapté, puis le temps de visite. Ainsi par exemple le Guide bleu de Rouen prévoit une visite de trois jours, sans précision ; le Guide Michelin prévoit une visite rapide des principaux sites en trois heures et demie, ou une visite complète en un jour et demi.

Stephen Harp pense que le passage des usines Michelin au taylorisme a rendu la firme attentive à la gestion du temps du touriste.

Ces deux exemples dévoilent incontestablement la pénétration du souci du temps et de la vitesse des loisirs, individuels ou collectifs. Toutefois, les exemples pris, excepté pour la course à pied accessible à tous, exigent des capitaux et sont donc réservés à une élite fortunée. Leur nombre est nettement inférieur à celui des pêcheurs à la ligne, distraction en vogue à la fin du siècle. Or les pêcheurs n'ont pas l'obsession du temps !

Ceci conduit à souligner la diversité des rythmes. Certes, le <sup>xix</sup><sup>e</sup> siècle est celui du passage d'un temps solaire et religieux à un temps mécanique, d'un temps poreux à un temps contraint. Mais ce passage intervient avec des temporalités très diverses selon les catégories sociales, chaque groupe a son temps collectif ; temporalités diverses aussi selon les lieux, en particulier les décalages sont nets entre les villes et les campagnes.

La conscience aiguë du temps qui s'écoule se double dorénavant de la volonté d'utiliser à plein le temps disponible, pour un travail productif, pour les loisirs organisés au mieux. Vivre pleinement chaque seconde : c'est ce qu'exprime Baudelaire en 1857.

*Trois mille six cents fois par heure, la Seconde  
Chuchote : Souviens-toi ! – Rapide, avec sa voix  
D'insecte, Maintenant dit : Je suis Autrefois ;  
Et j'ai pompé ta vie avec ma trompe immonde !*

Remember ! Souviens-toi ! *prodigue* ! Estor memor !  
(*Mon gosier de métal parle toutes les langues.*)  
*Les minutes, mortel folâtre, sont des gangues  
Qu'il ne faut pas lâcher sans en extraire l'or !*

Baudelaire, extrait de « L'horloge »,  
*Spleen et idéal*, LXXXV, *Les Fleurs du Mal*.

Nadine Vivier, « *La conscience du temps. Les mutations de la perception du temps aux <sup>xix</sup><sup>e</sup> et <sup>xx</sup><sup>e</sup> siècles* »,  
dans *Où est passé le temps ?*, Folio essais, 2012.

## CORRIGÉ

Par Françoise Détharré, professeur agrégé de lettres modernes.

Pour comprendre notre actuelle inféodation au temps, il nous faut revenir plus de deux siècles en arrière, quand chacun réglait sa vie sur la course du soleil et les sonneries des Angélus. La province balzacienne reflète parfaitement ce déroulement des jours, semblant aussi torpide qu'immuable. Certes, dès le quinzième/(50) siècle selon Jacques Le Goff, la scansion des horloges municipales a doublé, pour les citadins, celle des clochers mais c'est le dix-neuvième siècle qui voit éclore l'impératif de maîtriser le temps, ressenti comme irrémédiablement fugace.

Apparue dans le Jura à la fin du dix-huitième siècle, l'industrie horlogère/(100) prend son essor au siècle suivant, en réponse à une demande grandissante. Montres et réveils se démocratisent, rendant nécessaire un étalon horaire fourni par la poste puis par la gare. La rapidité et la fréquence accrues des trains appellent effectivement une heure identique pour tous, heure fixée d'abord nationalement/(150) puis, avec le développement des échanges internationaux, du télégraphe et du téléphone, heure universelle, fondée sur celle de Greenwich. Ainsi se généralise la mesure des minutes et des secondes qui aiguise la perception voire l'angoisse du passage du temps que clercs et laïcs se disputent toujours à cadencer.

La/(200) révolution industrielle instaure une nouvelle conception du travail. Elle commande de travailler beaucoup, les agriculteurs en ont l'habitude, mais aussi de gagner en productivité par la rigueur et la régularité de l'activité. La démocratisation de l'instruction suit d'ailleurs les mêmes principes. Une journée de travail a/(250) désormais une durée définie, tout comme les temps de production. Dès lors, les ouvriers, en cela mal compris par les paysans, bataillent pour réduire leurs charges horaires, celles des enfants avant celles des adultes, jusqu'aux quarante heures hebdomadaires et aux congés payés, obtenus après qu'on a reconnu la/(300) nécessité des vacances scolaires.

Le temps de loisir bénéficie d'une telle évolution, d'autant que les techniques d'éclairage progressent. On encourage à des pratiques saines, la gymnastique ou la natation et, avec les compétitions, naît l'obsession du chronomètre ; les sportifs cultivent la perfection technique pour gagner en/(350) célérité. Le touriste est également invité à optimiser ses journées : le Guide Michelin lui indique comment ne pas se disperser. Evidemment, le rapport au temps n'est pas totalement uniforme d'un milieu à un autre, cependant, c'est bien toute la société que vise l'injonction de Baudelaire : « [...] Les minutes,/(400) mortel folâtre, sont des gangues / Qu'il ne faut pas lâcher sans en extraire l'or ! »

416 mots

ESC

CORRIGÉ

TECHNOLOGIQUE

RÉSUMÉ DE TEXTE

## NOTES

---

© **GROUPE STUDYRAMA**

34/38, rue Camille-Pelletan - 92309 Levallois-Perret cedex  
Imprimerie Normandie Roto Impression s.a.s. - 61250 Lonrai  
Imprimé en France - 4<sup>e</sup> trimestre 2015

**Service éditorial :** Marjorie Champetier, Benjamin Dias Pereira,  
Deborah Lopez, Elodie Sebbah

**Conception graphique :** e-look

**Dépôt légal à parution**  
**ISBN 978-2-7590-3101-6**